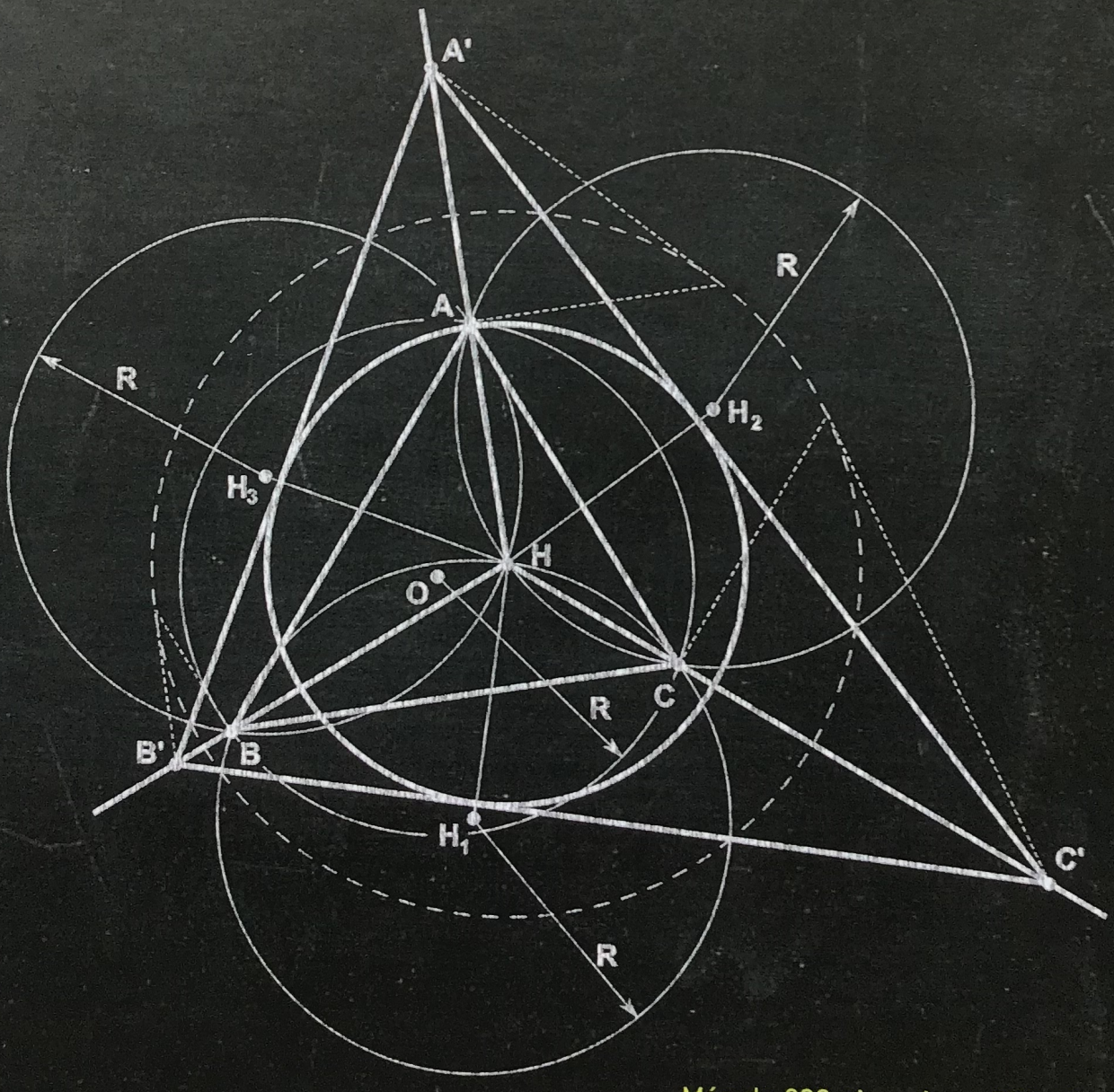
MISCELÁNEA DE GEOMETRÍA

Juan Ángel
Díaz Hernando

Tomo I Proyectividades. Inversión



Más de 200 ejemplos y 500 dibujos.

Juan Ángel Díaz Hernando

Doctor Ingeniero Industrial

Licenciado en Ciencias Matemáticas

Profesor Titular de la Universidad Politécnica de Madrid

MISCELÁNEA DE GEOMETRÍA
Tomo I
Proyectividades. Inversión

Madrid, 2015

Datos de catalogación bibliográfica.

JUAN ÁNGEL DÍAZ HERNANDO.

Miscelánea de Geometría. Tomo I. Proyectividades. Inversión

©JUAN ÁNGEL DÍAZ HERNANDO, Madrid 2015

Formato 176 x 250 mm Páginas: 381

Todos los derechos reservados.

Queda prohibida, salvo excepción prevista por la ley, cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública y transformación de esta obra sin contar con autorización del titular de la propiedad intelectual. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (*arts. 270 y sgts. Código Penal*)

DERECHOS RESERVADOS

©2015 por Juan Ángel Díaz Hernando

Presentación: M-002741/2015

R.P.I. 16/2015/3544 del 27 de Mayo de 2015

(España)

Editor: Juan Ángel Díaz Hernando

Técnico editorial: E.B.M.

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

A la memoria de mi esposa, Mari Luz

Prólogo

Es un reto personal, tras haber pasado muchos años dando clase en la Universidad, el de publicar una colección de libros que puedan ayudar a nuestros universitarios a ir más allá en su conocimiento, sin la presión de los exámenes.

La metodología que me propongo es explicar, más que exponer, llamando su atención en los puntos que pudieran confundirles, y mostrando los contenidos con un gran número de ejemplos, a modo de parábolas, que pueden hacer más atractivo el estudio y divertido el aprendizaje.

La división de los diferentes capítulos en lecciones, y éstas en apartados, responde a mi convicción de que será agradecida por el lector. Son como peldaños de una hipotética escalera que conduce a un aprendizaje que permite programarse, en cuanto a su velocidad. Los asideros lo constituyen los abundantes ejemplos que tratan de clarificar al máximo las propiedades, lo que llamamos PROPOSICIONES, de los elementos que paso a paso se van a estableciendo. Por otra parte, no ha sido casual que toda demostración se desarrolle en *letra pequeña*, y no precisamente porque no sean importantes. Si tuviera que hacer una recomendación al estudiante, le diría que, el orden a seguir podría ser: En primer lugar leer cuidadosamente los enunciados de las PROPOSICIONES, luego deslizarse por los ejemplos que los siguen y por último deleitarse en la correspondiente demostración, que no ha de plantearle, así, problema alguno.

Por otra parte, puede resultar una ayuda extra el que la impresión se haya hecho con tres colores: negro, rojo y azul. En general, el negro sirve siempre de base en el dibujo, el rojo para representar los datos o puntos de partida y el azul el resultado final.

En todo lo que tengo escrito, y así pienso seguir, más que demostrar lo que sé, de lo que se trata es de ser pedagógico. En relación con el saber son importantes el conocimiento y la enseñanza; si no se sabe nada, nada se puede transmitir, y si se sabe mucho pero no transmite, ¿donde está el maestro?

Alguien me dijo en cierta ocasión: *"La sabiduría suprema es tener sueños suficientemente grandes, para no perderlos de vista mientras se persiguen"*. Por mi parte, ¡totalmente de acuerdo!

Después de haber publicado los cinco tomos de lo que denomine Álgebra - Geometría - Cálculo, allá por los años ochenta, ahora ya con más tiempo libre, mi proyecto es seguir tratando de ayudar a quien tenga ganas de aprender, facilitándoles una más amplia información sobre esos temas y algún otro que de momento me reservo.

En particular, la extensión que pretendo tratar en lo que he llamado MISCELÁNEA DE GEOMETRÍA, ha dado origen a una colección, que se compone de en seis tomos, si bien los dos primeros hubiesen podido reunirse en un solo libro, lo que no fue recomendable, únicamente por lo voluminoso que hubiera resultado. En cualquier caso, el **Tomo II** es una prolongación natural del **Tomo I**, que mantiene su estructura y en el que se da continuidad incluso en la numeración de las lecciones.

Por otra parte, se ha tratado de que el esquema de la obra resulte cómodo, tanto para su estudio como para su consulta.

En el **Capítulo I**, se parte, en la **Lección 1**, de un concepto casi elemental, como es el de **rectas antiparalelas**, que con toda naturalidad nos establecen teoremas tan sencillos como útiles en todo lo que sigue; los del **cateto**, de la **altura**, el de **Pitágoras** y el de **Thales**, de los que se deducen un buen número de propiedades geométricas. La **Lección 2** ataca un concepto importante en sí mismo y en lo que ha de seguir: La **inversión** en el plano. Como siempre, los ejemplos que siguen están planteados para aclarar cualquier duda sobre el mismo.

En el **Capitulo II**, en las lecciones de que consta, se establecen las definiciones de **razón simple de tres puntos** y **razón doble de cuatro puntos**, y partiendo de lo que se entiende por **coordenadas cartesianas** en la recta, nos aparecen las coordenadas **baricéntricas**, las **proyectivas**, y su relación entre ellas.

En el **Capitulo III**, se establecen lo que se entiende por **figuras de primera, segunda y tercera categoría**, y lo que es relativamente importante, el concepto de **proyectividad entre series rectilíneas**, y los distintos tipos que pueden presentarse: **hiperbólicas**, **parabólicas** y **elípticas**, para terminar con una lección dedicada, íntegramente, a las **involuciones**.

En el **Capítulo IV**, se trabaja con la proyectividad entre figuras de primera categoría, destacando, por sus aplicaciones, el **Teorema de Fregier**, y sobre todo los de **Pascal** y **Brianchon**. Termina el capítulo resolviendo, con extraordinaria facilidad, un problema métrico que fue objeto de discusión de grandes geómetras: El **problema de Castillón**.

En el **Capítulo V**, se plantea el tema de las coordenadas en el **plano proyectivo**: Puntuales, tangenciales y su asociación. Se dedica una lección a los **Teoremas de Desargues**, y se termina con otra, que nos da una interpretación euclídea de las coordenadas proyectivas.

En el **Capítulo VI**, se establecen y desarrollan conceptos importantes: La **homotecia**, la **potencia en la circunferencia** y la **polaridad** en la misma. Así mismo, se dedica una lección para resolver el tema de la **inversión**, con nuevas aplicaciones. La última lección se dedica al establecimiento de una circunferencia por condiciones de tangencia, y se termina con la determinación de las circunferencias tangentes a otras tres dadas; el conocido como **problema de Apolonio**.

Anticipando el contenido del **Tomo II**, que como he comentado antes, no es sino la continuación natural de este primero, se estudian, en él, los siguientes temas: Los teoremas de **Simson**, **Feuerbach**, **Menelao** y **Ceva**, dedicándose una especial atención a las **semimedianas** y sus propiedades. Se tratan, así mismo las circunferencias de **Lemoine** , **Taylor** , **Tucker** , **Brocard** y **Neuberg** , así como los teoremas de **Ptolomeo** y **Pappus**.

Se replantean, también, los teoremas de **Pascal** y **Brianchon** como correlativos.
Se estudian las **homografías** entre planos superpuestos, con una especial dedicación a las **homologías**; y generalizando la proyectividad al espacio, se termina con una lección dedicadas exclusivamente a la **sucesión de Fibonacci**, y al denominado **número de oro**.

Debo particular agradecimiento a mi buen amigo Enrique Belda, por su paciencia y valiosa colaboración en lograr que los dibujos que aparecen en el libro sean fiel reflejo de los originales, por sus comentarios y por evitar que más de una errata se haya colado tanto en el texto como en las figuras.

Sigo agradeciendo la ayuda que siempre he recibido de mis amigos, y sobre todo de mi familia, que no parientes, encabezada por mi esposa y mis padres, siempre presentes en mi recuerdo, en la proximidad de mis hijos, y de manera muy especial el estímulo que me sigue proporcionando esa *legión* de nietos fantásticos con que me han obsequiado: Lucía, Diego y Mario.

Juan Angel Díaz Hernando.

ÍNDICE

CAPÍTULO I

Lección 1 **RECTAS ANTIPARALELAS**

1.1 Rectas antiparalelas..... 3

1.2 Relaciones métricas relativas a los triángulos..... 13

1.3 Cuaternas armónicas e inversión..... 40

Lección 2 **LA INVERSIÓN EN EL PLANO (I)**

2.1 La inversión en el plano..... 41

2.2 Ejemplos..... 53

CAPÍTULO II

Lección 3 **RAZÓN SIMPLE DE TRES PUNTOS**

3.1 Coordenadas cartesianas de la recta..... 71

3.2 Cambio de coordenadas cartesianas..... 72

3.3 Razón simple de tres puntos..... 74

3.4 La razón simple como invariante en la proyección paralela..... 76

3.5 Abscisas baricéntricas..... 78

3.6 Cambio de coordenadas baricéntricas..... 80

Lección 4 **RAZÓN DOBLE DE CUATRO PUNTOS**

4.1 Razón doble de cuatro puntos..... 83

4.2 La razón doble como invariante en la proyección no paralela..... 89

4.3 Abscisas proyectivas..... 96

4.4 Generalidad de las abscisas proyectivas..... 99

4.5 Expresión de la razón doble mediante sus abscisas cartesianas..... 99

CAPÍTULO III

Lección 5 **PROYECTIVIDAD ENTRE SERIES RECTILÍNEAS**

5.1 Figuras de primera, segunda y tercera categoría..... 103

5.2 Proyectividad entre series rectilíneas..... 104

5.3 Teorema fundamental de la proyectividad..... 108

5.4 La razón doble en función de las abscisas proyectivas.. 110

5.5 Cambio de coordenadas proyectivas..... 112

5.6 Ecuación de la proyectividad en coordenadas proyectivas..... 113

Lección 6 **PROYECTIVIDADES HIPERBÓLICAS, PARABÓLICAS Y ELÍPTICAS**

6.1 Puntos dobles de una proyectividad entre series superpuestas..... 117

6.2 Forma reducida de la ecuación de una proyectividad.. 131

6.3 La ecuación de una proyectividad en coordenadas cartesianas..... 134

Lección 7 **INVOLUCIONES**

7.1 Involuciones..... 139

CAPÍTULO IV

Lección 8 **PROYECTIVIDAD ENTRE FIGURAS DE PRIMERA CATEGORÍA**

8.1 Razón doble de cuatro rectas de un haz..... 151

8.2 Proyectividad entre haces de rectas y entre haces de rectas y series..... 162

8.3 Haz de planos. Razón doble de cuatro planos de un haz..... 166

8.4 Proyectividad entre figuras de primera categoría..... 172

Lección 9 **INVOLUCIÓN ENTRE HACES DE RECTAS**

9.1 Proyectividad entre haces de rectas..... 173

9.2 Involuciones..... 180

9.3 Teorema de Frégier..... 183

9.4 Aplicaciones del teorema de Frégier..... 184

Lección 10 **PROYECTIVIDAD EN LA GEOMETRÍA PLANA**

10.1 Formas perspectivas..... 187

10.2 Eje proyectivo de dos series y centro proyectivo de dos haces..... 191

10.3 Puntos límites de dos series proyectivas..... 193

10.4 Eje perspectivo de dos series proyectivas superpuestas..... 194

Lección 11 **PROYECTIVIDAD ENTRE SERIES CIRCULARES**

11.1 Series y haces circulares..... 197

11.2 Eje de dos series circulares proyectivas..... 198

11.3 Construcción de puntos homólogos y de los puntos dobles..... 201

11.4 Involución entre series circulares..... 205

Lección 12 **EL PROBLEMA DE CASTILLÓN**

12.1 Series y haces superpuestos..... 207

12.2 Proyectividades..... 209

12.3 El problema de Castillón..... 211

CAPÍTULO V

Lección 13 **COORDENADAS EN EL PLANO**

13.1 Coordenadas homogéneas. Plano proyectivo..... 219

13.2 Coordenadas proyectivas puntuales..... 224

Lección 14 **COORDENADAS TANGENCIALES**

14.1 Coordenadas tangenciales..... 235

14.2 Cambio de coordenadas proyectivas..... 241

Lección 15 **SISTEMAS PUNTUAL Y TANGENCIAL ASOCIADOS**

15.1 Construcción de la cuaterna armónica mediante la regla..... 251

15.2 Sistemas puntual y tangencial asociados..... 255

Lección 16 **TEOREMAS DE DESARGUES**

16.1 Teorema de Desargues de los triángulos homológicos..... 259

16.2 Otros teoremas de Desargues..... 261

Lección 17 **INTERPRETACIÓN EUCLÍDEA DE LAS COORDENADAS PROYECTIVAS**

17.1 Interpretación euclídea de las coordenadas proyectivas..... 267

17.2 Las coordenadas cartesianas como caso particular de las proyectivas..... 271

CAPÍTULO VI

Lección 18 **HOMOTECIAS**

18.1 Figuras homotéticas..... 275

18.2 Homotecias entre circunferencias..... 280

Lección 19 **POTENCIA EN LA CIRCUNFERENCIA**

19.1 Potencia de un punto respecto de una circunferencia..... 285

19.2 Eje radical de dos circunferencias. Centro radical de tres circunferencias..... 288

19.3 Inversión, homotecia y potencia..... 296

Lección 20 **HACES DE CIRCUNFERENCIAS**

20.1 Circunferencias ortogonales..... 303

20.2 Haz de circunferencias..... 309

20.3 Haces ortogonales..... 311

20.4 Involución de puntos en la sección de un haz..... 313

Lección 21 **POLARIDAD EN LA CIRCUNFERENCIA**

21.1 Polo y polar respecto de una circunferencia..... 315

21.2 Polaridad recíproca..... 318

21.3 Transformación por polares recíprocas..... 320

21.4 Involución de puntos conjugados en una recta..... 327

21.5 Polar de un punto respecto de un ángulo..... 329

Lección 22 **INVERSIÓN EN EL PLANO (II)**

22.1 Aplicaciones de la inversión..... 331

22.2 Propiedades de las tangentes a las curvas inversas... 340

Lección 23 **EL PROBLEMA DE APOLONIO**

23.1 Determinación de una circunferencia por condiciones de tangencia..... 345

23.2 El problema de Apolonio..... 355

ÍNDICE ALFABÉTICO 363

BIBLIOGRAFÍA 367

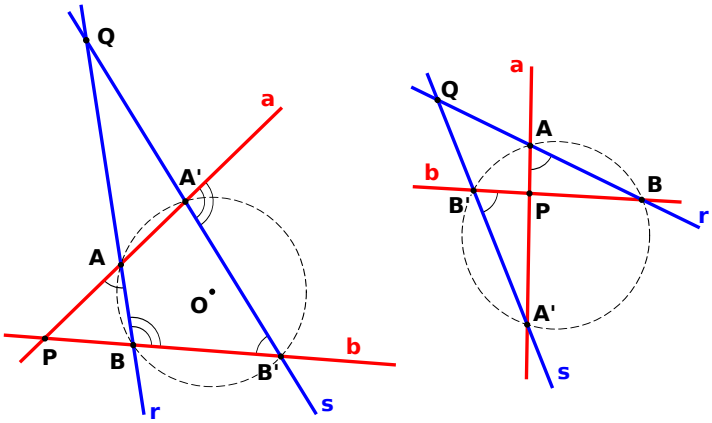
CAPÍTULO I

Lección 1.- RECTAS ANTIPARALELAS

1.1 Rectas antiparalelas
1.2 Relaciones métricas relativas a los triángulos
1.3 Cuaternas armónicas e inversión

1.1 Rectas antiparalelas

Consideremos dos rectas, **a** y **b**, secantes en el punto **P** y cortadas por otras dos, **r** y **s**, respectivamente en los puntos, **A, B** y **A′**, **B′**, de forma que los dos pares (**A**, **A′**) y (**B**, **B′**) estén a un mismo lado o, respectivamente separados por el punto **P**, y en cualquier caso iguales los ángulos $\widehat{\mathbf{PAB}}$ y $\widehat{\mathbf{PB'A'}}$. En estas condiciones diremos que las rectas **r** y **s** son **antiparalelas** respecto de las **a** y **b**.



Establezcamos, ahora, unas primeras propiedades de las rectas que acabamos de definir.

PROPOSICIÓN 1. Dos rectas, a y b, concurrentes en P son cortadas por otras dos, r y s, antiparalelas respecto de ellas, en puntos A, B y A′, B′, cuyo producto de distancias al P, es el mismo en ambas rectas. Recíprocamente, **si se verifica la relación**:

$$\overline{\mathbf{PA}} \cdot \overline{\mathbf{PA'}} = \overline{\mathbf{PB}} \cdot \overline{\mathbf{PB'}}$$

las rectas $\overline{\mathbf{AB}}$ y $\overline{\mathbf{A'B'}}$, serán antiparalelas respecto de las recta y $\overline{\mathbf{PA}}$ y $\overline{\mathbf{PB}}$.

En efecto: Como también son iguales los ángulos $\widehat{\mathbf{PBA}}$ y $\widehat{\mathbf{PA'B'}}$, resulta que la recta **r** forma con cada una de las rectas dadas, **a** y **b**, ángulos iguales a los que su antiparalela **s** forma con la otra, lo que nos muestra que el antiparalelismo es una relación simétrica. Dicho de otra forma, las rectas **a** y **b** son también antiparalelas respecto de **r** y **s**.

Por otra parte, los triángulos $\overset{\triangle}{\mathbf{APB}}$ y $\overset{\triangle}{\mathbf{B'PA'}}$ son semejantes, luego tendremos:

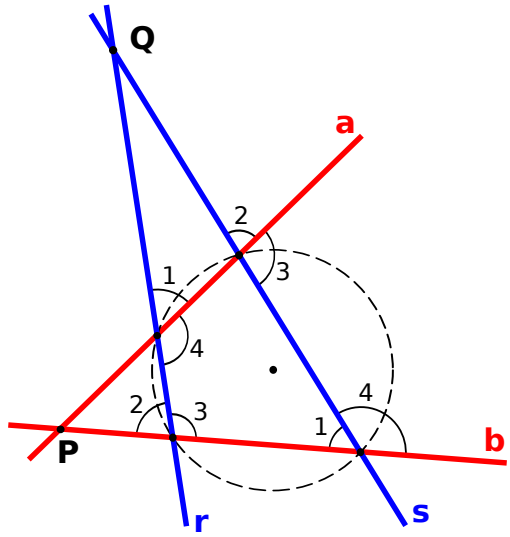
$$\frac{\overline{\mathbf{PA}}}{\overline{\mathbf{PB}}} = \frac{\overline{\mathbf{PB'}}}{\overline{\mathbf{PA'}}}$$

o lo que es lo mismo,

$$\overline{\mathbf{PA}} \cdot \overline{\mathbf{PA'}} = \overline{\mathbf{PB}} \cdot \overline{\mathbf{PB'}}$$

Recíprocamente, si se verifica esta última relación, se verificará la anterior, luego los triángulos $\overset{\triangle}{\mathbf{APB}}$ y $\overset{\triangle}{\mathbf{B'PA'}}$ serán semejantes por tener común el ángulo $\widehat{\mathbf{PAB}} = \widehat{\mathbf{PB'A'}}$, y proporcionales los lados que los forman. Por tanto las rectas $\overline{\mathbf{AB}}$ y $\overline{\mathbf{A'B'}}$ serán antiparalelas respecto de las $\overline{\mathbf{PA}}$ y $\overline{\mathbf{PB}}$.

Ejemplo 1. En la siguiente figura se visualizan los ángulos que se forman con las rectas antiparalelas **a**, **b** y **r**, **s**.



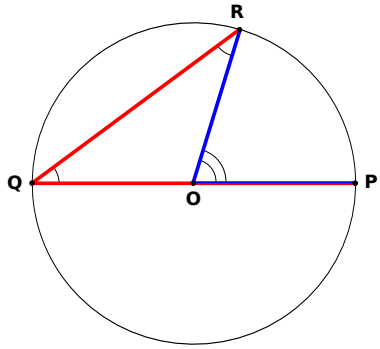
Más adelante utilizaremos el concepto de **cuadrilátero inscribible**, como aquél que tiene sus vértices situados sobre una circunferencia. Antes establezcamos la siguiente propiedad de los ángulos inscritos en una circunferencia.

PROPOSICIÓN 2. El valor de todo ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del correspondiente ángulo central que comprende el mismo arco que el dado.

En efecto: Veamos los tres casos posibles en cuanto a que el ángulo inscrito contenga o no el centro de la circunferencia.

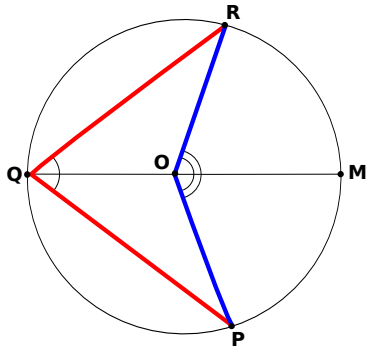
1^{o}.- Uno de los lados del ángulo inscrito $\overset{\triangle}{\mathbf{PQR}}$ pasa por el centro **O** de la circunferencia. En este caso se verifica el enunciado inmediatamente, ya que el ángulo central $\widehat{\mathbf{POR}}$ abarca el mismo arco que el inscrito $\widehat{\mathbf{PQR}}$, siendo exterior al triángulo isósceles $\overset{\triangle}{\mathbf{ROQ}}$ y por tanto igual a la suma de los internos no adyacentes, iguales entre sí, uno de los cuales es el inscrito que nos interesa, es decir

$$\widehat{\mathbf{PQR}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \widehat{\mathbf{POR}}$$



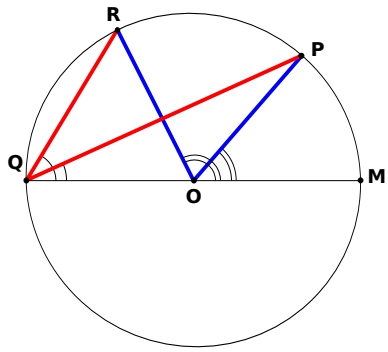
2º.- Cuando el centro **O** es interior al ángulo inscrito $\widehat{\mathbf{PQR}}$, puede considerarse éste como suma de los ángulos inscritos $\widehat{\mathbf{RQM}}$ y $\widehat{\mathbf{MQP}}$, con un lado diametral común, el $\overline{\mathbf{QM}}$, mitades respectivas de los ángulos centrales $\widehat{\mathbf{ROM}}$ y $\widehat{\mathbf{MOP}}$, cuya suma es, a su vez, el ángulo central $\widehat{\mathbf{ROP}}$, que abarca el mismo arco $\overset{\frown}{\mathbf{RMP}}$. En consecuencia, vuelve a verificarse que

$$\widehat{\mathbf{PQR}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \widehat{\mathbf{POR}}$$



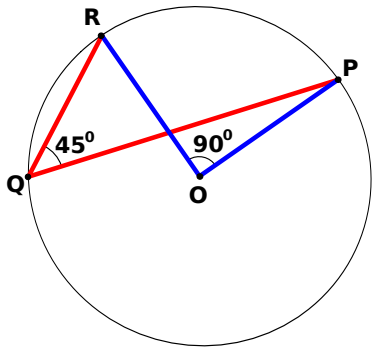
3º.- Si el centro **O** no pertenece al ángulo inscrito $\widehat{\mathbf{PQR}}$, se puede considerar éste como la diferencia de los ángulos inscritos $\widehat{\mathbf{RQM}}$ y $\widehat{\mathbf{PQM}}$, con el lado diametral común $\overline{\mathbf{QM}}$. Luego el ángulo inscrito que nos interesa, es decir el $\widehat{\mathbf{PQR}}$ será la mitad de la diferencia de los ángulos centrales $\widehat{\mathbf{ROM}}$ y $\widehat{\mathbf{POM}}$, es decir el $\widehat{\mathbf{ROP}}$. En consecuencia, se sigue verificando que

$$\widehat{\mathbf{PQR}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \widehat{\mathbf{POR}}$$



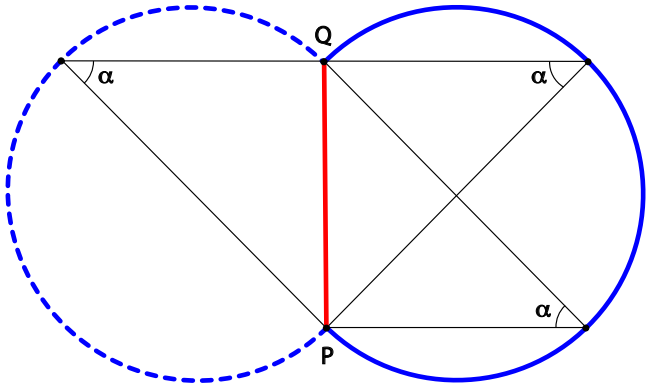
Ejemplo 2. Consideremos el ángulo inscrito $\widehat{\mathbf{POR}}$ en la circunferencia de centro **O**. Si el ángulo central es $\widehat{\mathbf{ROP}} = \mathbf{90^o}$ el valor del inscrito dado será

$$\widehat{\mathbf{PQR}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \mathbf{90^o} = \mathbf{45^o}$$



Observemos, por otra parte, que la situación del punto **Q** sobre la circunferencia no es determinante, lo que permite afirmar que: **Todos los ángulos inscritos con un mismo arco son iguales.**

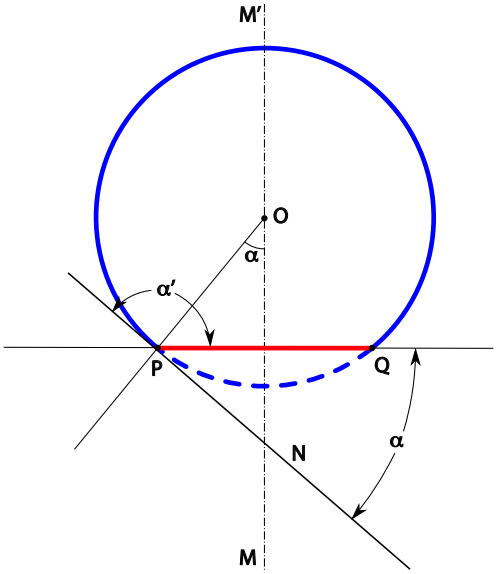
Llegados a este punto conviene recordar que el lugar geométrico de los puntos del plano, desde los que se ve un segmento $\overline{\mathbf{PQ}}$ bajo un ángulo dado $\boldsymbol{\alpha}$, es un arco de circunferencia, de extremos **P** y **Q**, llamado **arco capaz** del ángulo sobre el segmento $\overline{\mathbf{PQ}}$.



Evidentemente, en cada semiplano limitado por la recta que pasa por los puntos **P** y **Q** existe un arco capaz.

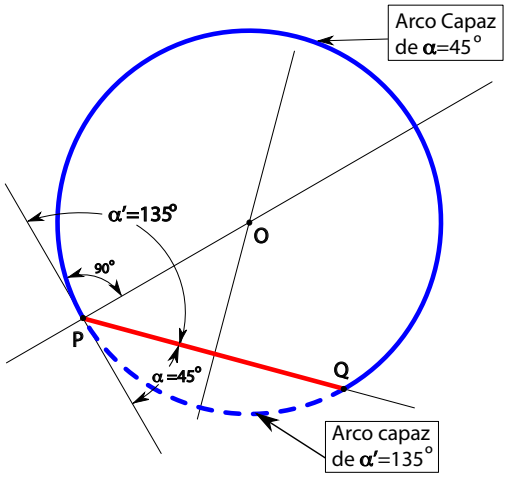
Para determinar el centro del arco capaz de un ángulo dado $\boldsymbol{\alpha}$, sobre un segmento $\overline{\mathbf{PQ}}$, hallaremos, en la mediatriz del segmento $\overline{\mathbf{PQ}}$, el punto **O** tal que el ángulo $\widehat{\mathbf{POM}}$ sea del ángulo $\boldsymbol{\alpha}$. Para esa determinación trazaremos, en el semiplano opuesto, el ángulo $\widehat{\mathbf{QPN}}$=$\boldsymbol{\alpha}$, y por el punto **P**, la perpendicular, $\overline{\mathbf{PO}}$, a la recta $\overline{\mathbf{PN}}$. Esta perpendicular cortará a la recta $\overline{\mathbf{MM'}}$ en el centro buscado, dado que $\widehat{\mathbf{POM}} = \widehat{\mathbf{QPN}} = \boldsymbol{\alpha}$,

por la perpendicularidad de los lados.



Observemos que el arco capaz del ángulo suplementario al $\boldsymbol{\alpha}$, es decir $\boldsymbol{\alpha' = 180^o - \alpha}$ en el semiplano opuesto nos daría el mismo centro **O**, con lo que ambos arcos completarían una circunferencia.

Ejemplo 3. En la siguiente figura se construye el arco capaz del ángulo $\boldsymbol{\alpha = 45^o}$ sobre el segmento $\overline{\mathbf{PQ}}$ dado.



Veamos, ahora, la condición de inscribibilidad de un cuadrilátero.

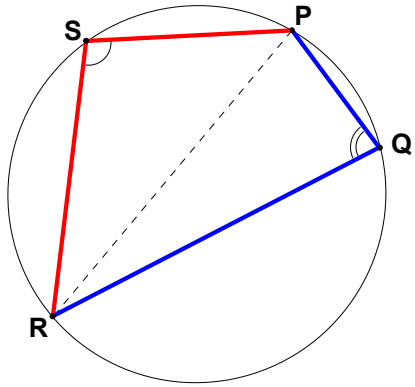
PROPOSICIÓN 3. En todo cuadrilátero inscribible los ángulos opuestos son suplementarios. Recíprocamente, todo cuadrilátero que tenga dos ángulos opuestos suplementarios es inscribible.

En efecto: Los ángulos opuestos $\widehat{\mathbf{PQR}}$ y $\widehat{\mathbf{PSR}}$, opuestos en el cuadrilátero de vértices **P**, **Q**, **R**, **S**, son ángulos inscritos en la circunferencia, cuyos arcos abarcados suman la circunferencia entera, luego su

suma vale la mitad de la de los dos centrales, que es 360^o, es decir

$$\widehat{\mathbf{PQR}} + \widehat{\mathbf{PSR}} = \mathbf{180^o}$$

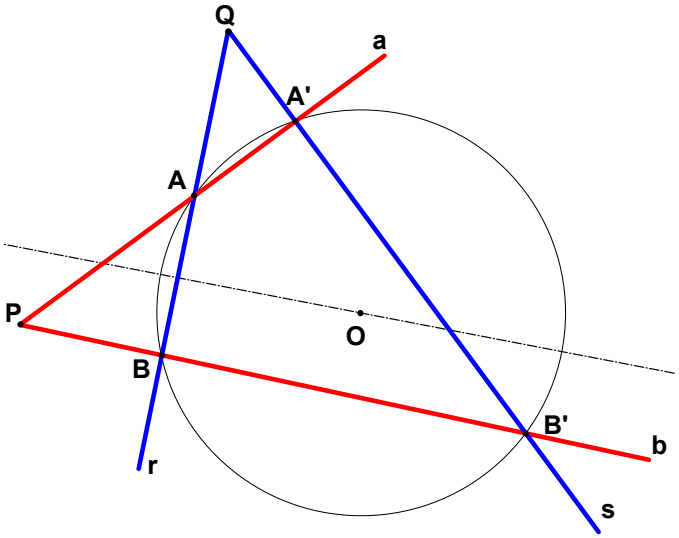
siendo, por tanto, los ángulos inscritos que nos interesan suplementarios.



Recíprocamente, si los ángulos $\widehat{\mathbf{PQR}}$ y $\widehat{\mathbf{PSR}}$ son suplementarios, tendremos, tal como hemos visto antes, que los dos arcos capaces de $\boldsymbol{\alpha} = \widehat{\mathbf{PQR}}$ y $\boldsymbol{\alpha'} = \widehat{\mathbf{PSR}}$, sobre el segmento $\overline{\mathbf{PR}}$, en distinto semiplano, tienen el mismo centro, completando ambos una circunferencia que pasa por los puntos **P**, **Q**, **R**, **S**.

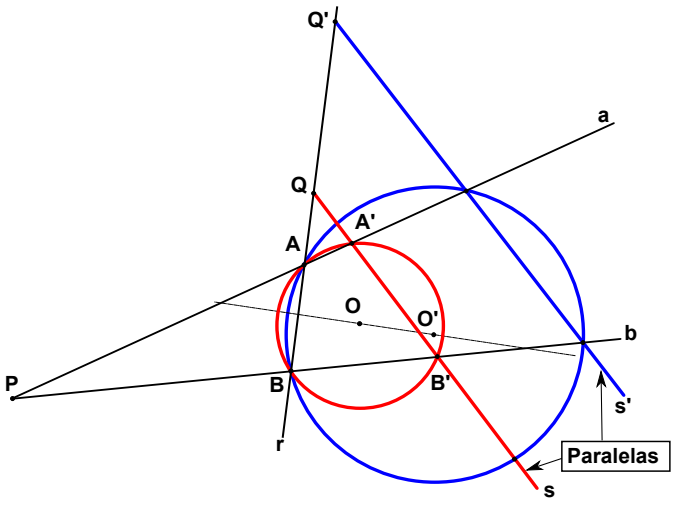
La proposición anterior permite, de una manera sencilla, el trazado de rectas antiparalelas, simplemente estableciendo **puntos concíclicos**, es decir situados sobre una circunferencia.

Ejemplo 4. Dadas las rectas **a** y **b**, si fijamos sobre ellas sendos puntos **A** y **B**, y trazamos la mediatriz del segmento $\overline{\mathbf{AB}}$, la circunferencia que tenga su centro sobre dicha mediatriz y pase por **A** y **B**, cortará a las rectas **a** y **b** en los puntos $\mathbf{A'}$ y $\mathbf{B'}$. Los puntos **A**, **B**, $\mathbf{A'}$, $\mathbf{B'}$ serán por tanto concíclicos y en consecuencia las rectas **r** y **s** que pasan, respectivamente, por los puntos **A**, **B** y $\mathbf{A'}$, $\mathbf{B'}$, serán antiparalelas respecto de las **a** y **b**.



Variando los puntos **A** y **B**, y repitiendo el procedimiento, obtendríamos otro par distinto de rectas antiparalelas.

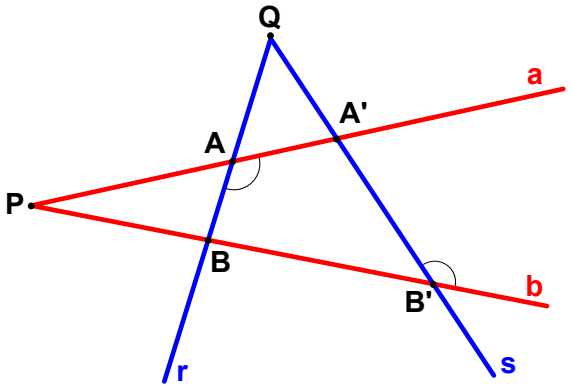
Por otra parte, si mantuviésemos los puntos **A** y **B**, y simplemente desplazásemos el punto **O** sobre la mediatriz, la nueva recta $\mathbf{s}'$ sería paralela a la anterior **s**.



Así para las rectas antiparalelas se verifica la propiedad siguiente:

PROPOSICIÓN 4. Una condición necesaria y suficiente para que dos pares de rectas sean antiparalelas es que los puntos de intersección de las rectas de uno de los pares con las rectas del otro par estén sobre una circunferencia.

En efecto: Dado los dos pares de rectas **a**, **b** y **r**, **s**, designemos por **A**, **B** los puntos en los que **r** corta a las rectas **a** y **b**, y por $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$ los puntos en los que **s** corta a esas mismas rectas.



Designando por $\widehat{(\mathbf{a},\mathbf{b})}$ y $\widehat{(\mathbf{r},\mathbf{s})}$ los ángulos que forman, respectivamente, las rectas **a**, **b** y **r**, **s**, si las rectas **a** y **b** son antiparalelas respecto de las **r** y **s**, tendremos

$$\widehat{(\mathbf{a},\mathbf{r})} = \widehat{(\mathbf{s},\mathbf{b})}$$

que podemos escribir

$$(\widehat{\mathbf{AA}', \mathbf{AB}}) = (\widehat{\mathbf{B}'\mathbf{A}', \mathbf{BB}'})$$

Luego los ángulos opuestos del cuadrilátero de vértices $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{B}$ son suplementarios, y en consecuencia estarán situados sobre una circunferencia, o como suele decirse, serán concíclicos.

Recíprocamente, si los puntos $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{B}$ son concíclicos, se verificará la igualdad

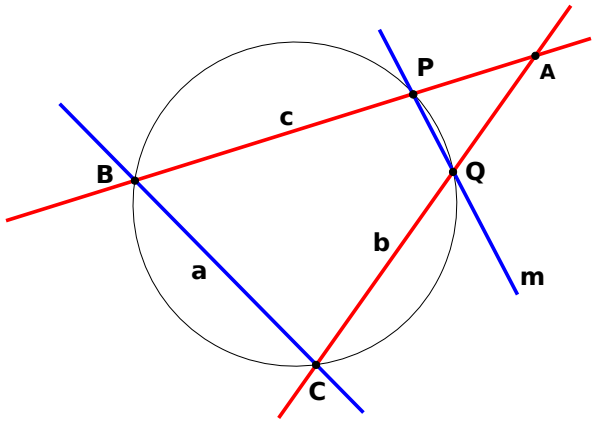
$$(\widehat{\mathbf{AA}', \mathbf{AB}}) = (\widehat{\mathbf{B}'\mathbf{A}', \mathbf{BB}'})$$

que puede ponerse en la forma

$$\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{r})} = \widehat{(\mathbf{s}, \mathbf{b})}$$

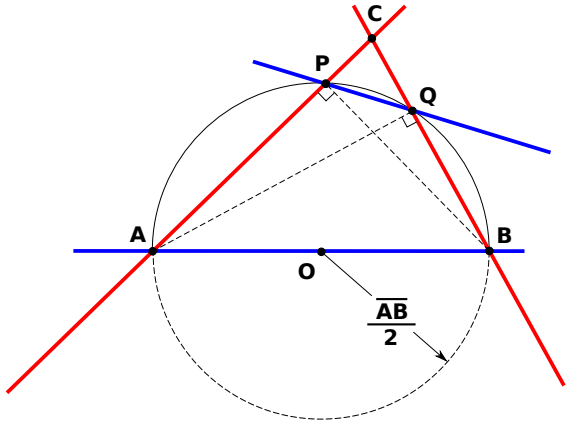
Luego, los pares de rectas $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{r}$, $\mathbf{s}$ serán antiparalelas.

Ejemplo 5. Consideremos un triángulo, $\overset{\triangle}{\mathbf{ABC}}$. Toda circunferencia que pasa por los extremos de un lado, $\mathbf{a}$, corta a los otros dos según una recta, $\mathbf{m}$, antiparalela, junto con la $\mathbf{a}$, a las rectas que soportan los otros dos lados, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$.



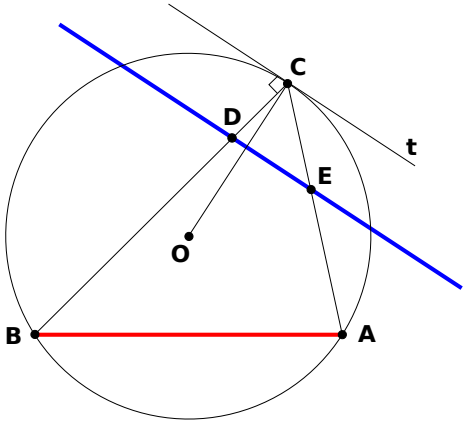
Observemos que los puntos $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ son concíclicos.

Ejemplo 6. Consideremos un triángulo, $\overset{\triangle}{\mathbf{ABC}}$. La recta $\overline{\mathbf{PQ}}$, que une a los ejes de las alturas trazadas desde los vértices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, junto con la $\overline{\mathbf{AB}}$, son antiparalelas a las rectas $\overline{\mathbf{AC}}$ y $\overline{\mathbf{BC}}$.



Observemos que la circunferencia de centro $\mathbf{O}$, y diámetro $\overline{\mathbf{AB}}$ pasa por los pies de las alturas trazadas, con lo que los puntos $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, son concíclicos.

Ejemplo 7. Las antiparalelas a uno de los lados de un triángulo son perpendiculares al radio de la circunferencia circunscrita relativa al vértice opuesto.



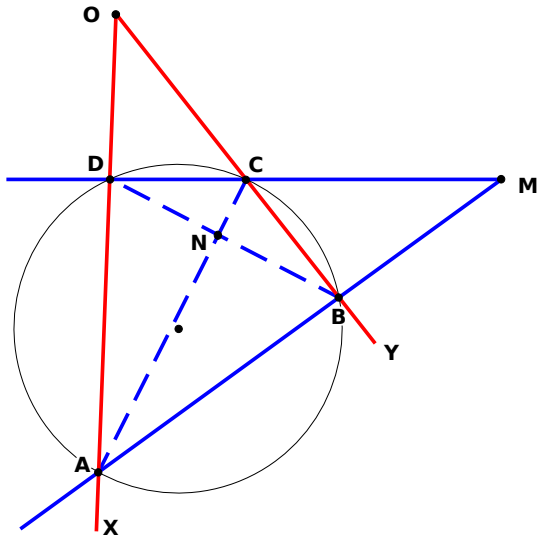
Basta observar que el radio, $\overline{\mathbf{OC}}$, es perpendicular a la tangente, **t**, y por tanto a sus paralelas $\overline{\mathbf{DE}}$, etc.

Ejemplo 8. Cuando dos rectas $\overline{\mathbf{AB}}$, $\overline{\mathbf{DC}}$ son antiparalelas respecto de los lados de un triángulo, $\overset{\triangle}{\mathbf{XOY}}$, se verifica:

$$\overline{\mathbf{OA}} \cdot \overline{\mathbf{OD}} = \overline{\mathbf{OB}} \cdot \overline{\mathbf{OC}}$$

es decir

$$\frac{\overline{\mathbf{OA}}}{\overline{\mathbf{OB}}} = \frac{\overline{\mathbf{OC}}}{\overline{\mathbf{OD}}}$$



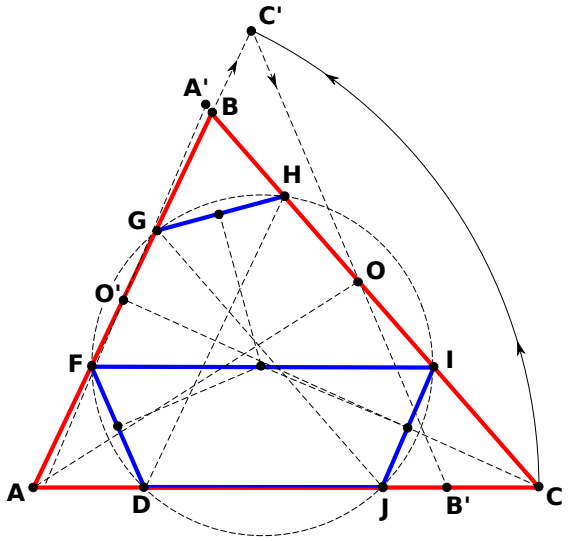
Se puede afirmar, así mismo, que toda circunferencia que corte a los lados de un ángulo determina rectas antiparalelas.

Observamos que tendremos tres pares de antiparalelas:

$$(\overline{\mathbf{OA}}, \overline{\mathbf{OB}}) \quad , \quad (\overline{\mathbf{DC}}, \overline{\mathbf{AB}}) \quad , \quad (\overline{\mathbf{DB}}, \overline{\mathbf{AC}}) \, .$$

Ejemplo 9. Las antiparalelas iguales respecto de los lados de los ángulos $\widehat{\mathbf{A}}$ y $\widehat{\mathbf{C}}$, de un triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{ABC}}$, determinan un trapecio isósceles.

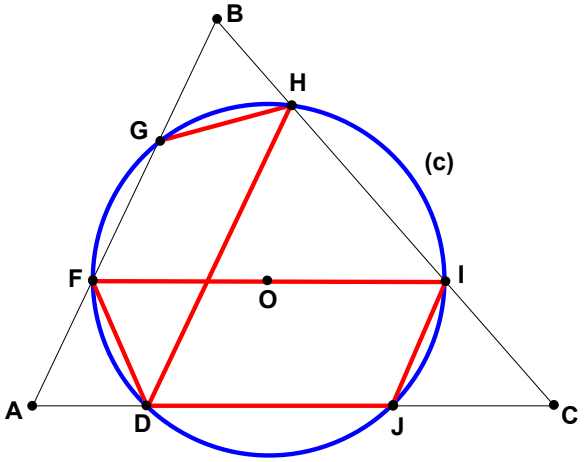
Bastará con ver que los ángulos agudos $\widehat{\mathbf{D}}$ y $\widehat{\mathbf{J}}$, son iguales al ángulo $\widehat{\mathbf{B}}$. En consecuencia el trapecio $\overset{\square}{\mathbf{DFIJ}}$ es simétrico, puesto $\overline{\mathbf{DF}} = \overline{\mathbf{IJ}}$. (La base $\overline{\mathbf{FI}}$ es paralela a $\overline{\mathbf{AC}}$; al igual que $\overline{\mathbf{DH}}$ es paralela a $\overline{\mathbf{AB}}$.)



Ejemplo 10. Consideremos el triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{ABC}}$ del ejemplo anterior. Se verifica que tres antiparalelas iguales, (en nuestro caso: $\overline{\mathbf{FD}}$, $\overline{\mathbf{IJ}}$, $\overline{\mathbf{GH}}$), inscritas en los ángulos del triángulo, determinan, sobre los lados de éste, seis puntos concíclicos, es decir, seis puntos que pertenecen a una misma circunferencia.

Evidentemente el trapecio $\overset{\square}{\mathbf{DFGH}}$, por ejemplo, es inscribible, lo mismo que el $\overset{\square}{\mathbf{DFIJ}}$. Para establecer que seis puntos determinados por las tres antiparalelas iguales son concíclicas, basta con probar que la circunferencia circunscrita $\overset{\bigcirc}{\mathbf{DFGH}}$ pasa por el punto **I**. Ahora bien el cuadrilátero $\overset{\square}{\mathbf{FGHI}}$ es inscribible, puesto que los lados opuestos $\overline{\mathbf{FI}}$, $\overline{\mathbf{GH}}$ son antiparalelas.

(Las circunferencia ,$(\mathbf{c})$, así obtenida, recibe el nombre de **circunferencia de Tucker**)



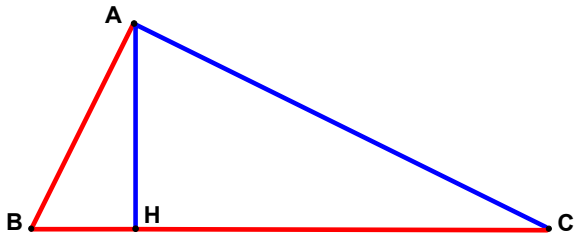
1.2 Relaciones métricas relativas a los triángulos

Dado un triángulo rectángulo, vamos a establecer una propiedades, sencillas, pero no por eso menos importantes.

TEOREMA DEL CATETO. En todo triángulo rectángulo, cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.

En efecto: Dado el triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{ABC}$, la altura $\overline{AH}$, sobre la hipotenusa $\overline{BC}$, y su cateto $\overline{AC}$, son antiparalelas respecto de la hipotenusa y el otro cateto, dado que son rectos los ángulos $\widehat{AHB}$ y $\widehat{CAB}$; por tanto

$$\overline{BA}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BH}$$



En forma análoga se establece que:

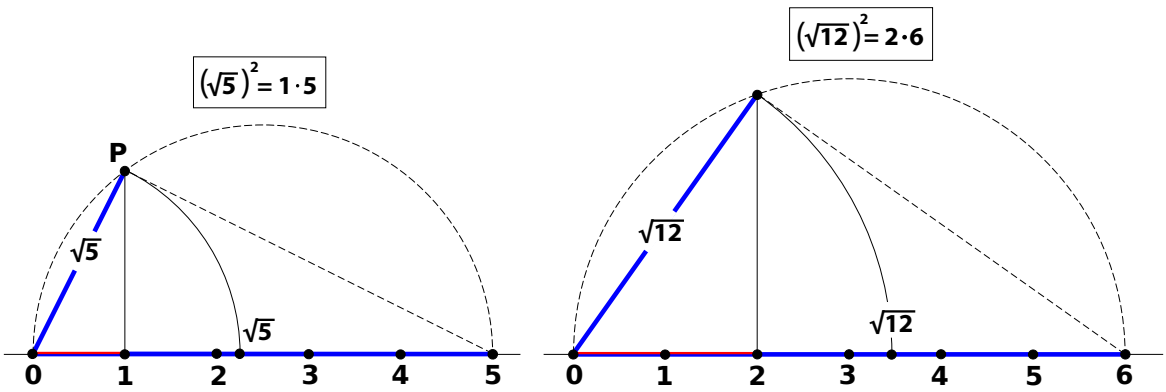
$$\overline{CA}^2 = \overline{CB} \cdot \overline{CH}$$

Ejemplo 1. Dado el triángulo rectángulo de hipotenusa: $\overline{BC} = 5$, y catetos: $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 4$, el teorema anterior determina los dos segmentos en que la altura $\overline{AH}$ divide a la hipotenusa:

$$\overline{BA}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BH} \Longrightarrow 3^2 = 5 \cdot \overline{BH} \Longrightarrow \overline{BH} = \frac{9}{5}$$

$$\overline{CA}^2 = \overline{CB} \cdot \overline{CH} \Longrightarrow 4^2 = 5 \cdot \overline{CH} \Longrightarrow \overline{CH} = \frac{16}{5}$$

Ejemplo 2. Utilizando el Teorema del Cateto, representar gráficamente los números $\sqrt{5}$ y $\sqrt{12}$.



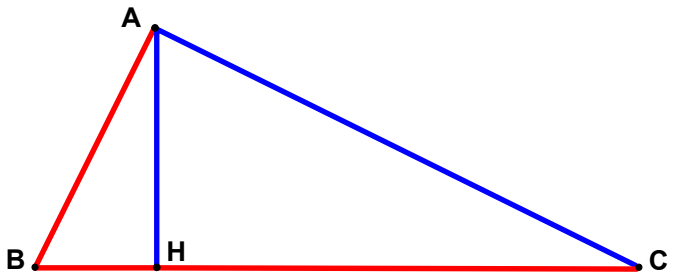
TEOREMA DE LA ALTURA. En todo triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos en que la divide.

En efecto: Por ser semejantes los triángulos rectángulos $\overset{\triangle}{\mathbf{ABH}}$ y $\overset{\triangle}{\mathbf{CAH}}$ podemos escribir

$$\frac{\overline{\mathbf{HB}}}{\overline{\mathbf{HA}}} = \frac{\overline{\mathbf{HA}}}{\overline{\mathbf{HC}}}$$

de donde resulta

$$\overline{\mathbf{HA}}^2 = \overline{\mathbf{HB}} \cdot \overline{\mathbf{HC}}$$

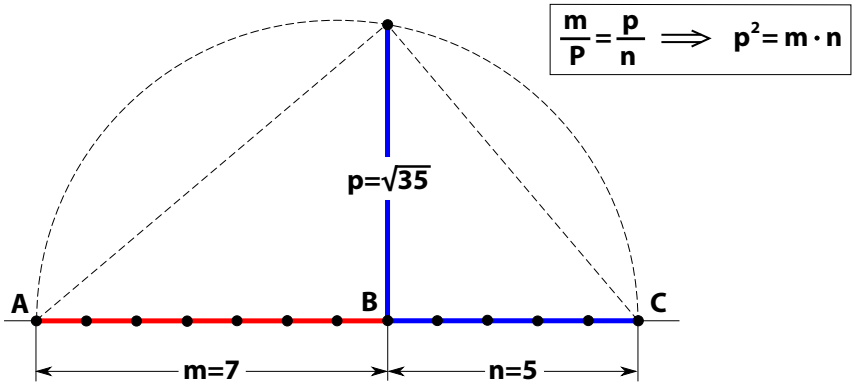


Ejemplo 3. También se verifica que, dado un triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{ABC}}$, si **H** es el pie de la perpendicular a $\overline{\mathbf{BC}}$ desde **A**, siendo $\overline{\mathbf{HB}}$ y $\overline{\mathbf{HC}}$ los segmentos que determina su intersección sobre el lado $\overline{\mathbf{BC}}$, si se cumple la igualdad

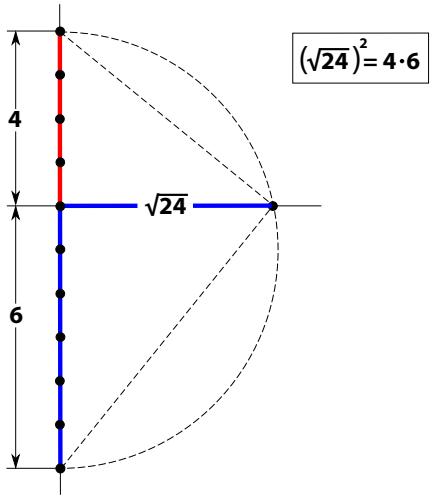
$$\overline{\mathbf{HA}}^2 = \overline{\mathbf{HB}} \cdot \overline{\mathbf{HC}}$$

que en definitiva traduce la semejanza de los triángulos rectángulos $\overset{\triangle}{\mathbf{BAH}}$ y $\overset{\triangle}{\mathbf{ACH}}$, podemos deducir que el ángulo $\widehat{\mathbf{BAC}}$ es un ángulo recto, y por tanto que el triángulo dado es rectángulo.

Ejemplo 4. Utilizando el Teorema de la Altura construir el segmento medio proporcional de los segmentos $\overline{\mathbf{AB}} = \mathbf{7}$ y $\overline{\mathbf{BC}} = \mathbf{5}$.



Ejemplo 5. Utilizando el Teorema de la Altura representar gráficamente el número $\sqrt{24}$.



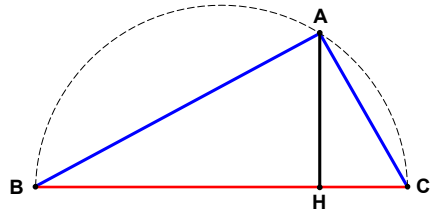
TEOREMA DE PITÁGORAS. Dado un triángulo rectángulo se verifica que, la longitud de la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus catetos.

En efecto: Aplicando el TEOREMA DEL CATETO al triángulo dado podemos escribir las igualdades

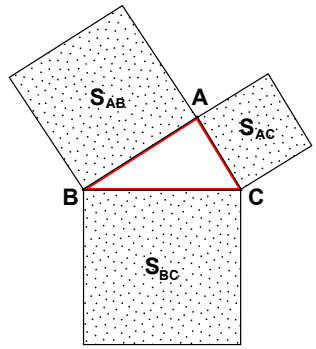
$$\overline{BA}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BH} \quad \text{y} \quad \overline{CA}^2 = \overline{CB} \cdot \overline{CH}$$

que sumadas dan

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$



Ejemplo 6. El teorema anterior nos permite afirmar que, el área del cuadrado, de lado la hipotenusa, es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de lados respectivos cada uno de los catetos.



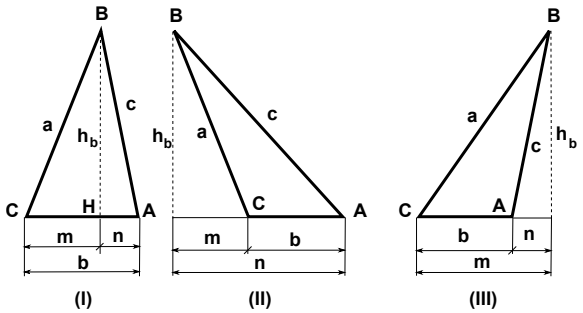
Así, si $\overline{\mathbf{AB}} = \mathbf{4}$, $\overline{\mathbf{AC}} = \mathbf{3}$, $\overline{\mathbf{BC}} = \mathbf{5}$ tendremos, efectivamente, que

$$\mathbf{S_{BC} = S_{AB} + S_{AC}} \text{ , por ser } \quad \mathbf{S_{BC} = 5^2 = 25} \ , \ \mathbf{S_{AB} = 4^2 = 16} \ , \ \mathbf{S_{AC} = 3^2 = 9}$$

El TEOREMA DE PITÁGORAS admite la siguiente generalización:

PROPOSICIÓN 1. Dado un triángulo cualquiera, el cuadrado de un lado opuesto a un ángulo (agudo/obtuso) es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados (menos/más) el doble del producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

En efecto: Consideramos los siguientes triángulos.



En los casos (I) y (II) se verifica

$$\mathbf{a^2 = m^2 + h_b^2 = (b - n)^2 + c^2 - n^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot n}$$

y en el caso (III)

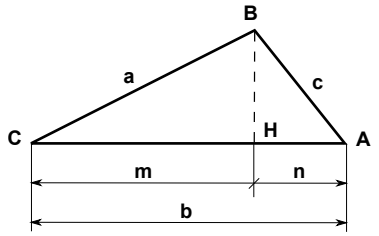
$$\mathbf{a^2 = m^2 + h_b^2 = (b + n)^2 + c^2 - n^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot b \cdot n}$$

En definitiva se tiene:

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 \pm 2 \cdot b \cdot n} \begin{cases} \widehat{\mathbf{A}} < \mathbf{90^o} \cdots\cdots \mathbf{signo -} \\ \widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{90^o} \cdots\cdots \mathbf{n = 0} \\ \widehat{\mathbf{A}} > \mathbf{90^o} \cdots\cdots \mathbf{signo +} \end{cases}$$

Ejemplo 7. Determinar la medida del lado $\overline{\mathbf{BC}}$ del triángulo de la figura en el que se tiene

$$\overline{\mathbf{AB}} = \mathbf{c = 5}, \ \overline{\mathbf{AC}} = \mathbf{b = 10}, \ \overline{\mathbf{AH}} = \mathbf{n = 3}$$



Dado que el lado a determinar es el opuesto a un ángulo agudo, tendremos:

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot n}$$

es decir:

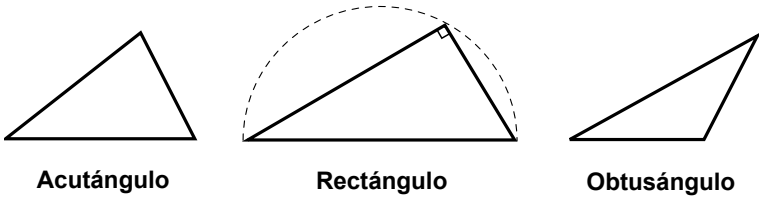
$$\mathbf{a^2 = 10^2 + 5^2 - 2 \cdot 10 \cdot 3 = 100 + 25 - 60 = 65}$$

luego

$$\mathbf{a = \sqrt{65}}$$

Ejemplo 8. La generalización estudiada nos permite reconocer, dadas las medidas de los tres lados de un triángulo, si éste es acutángulo, rectángulo u obtusángulo, sin necesidad de construirlo. Bastará con comparar el cuadrado del lado mayor con la suma de los cuadrados de los otros dos; así

$$\left(\begin{array}{l}\textbf{Lado mayor}\\ \textbf{al cuadrado}\end{array}\right) \left\{\begin{array}{c}<\\ =\\ >\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l}\textbf{Suma de los}\\ \textbf{cuadrados de}\\ \textbf{los otros dos}\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\textbf{Acutángulo}\\ \textbf{Rectángulo}\\ \textbf{Obtusángulo}\end{array}\right\}$$



Así tendríamos que:

Lados del triángulo				
a	**b**	**c**	**Operaciones**	**Tipo de triángulo**
7	6	4	$7^2 < 6^2 + 4^2$	**ACUTÁNGULO**
3	4	5	$5^2 = 3^2 + 4^2$	**RECTÁNGULO**
8	6	5	$8^2 > 6^2 + 5^2$	**OBTUSÁNGULO**

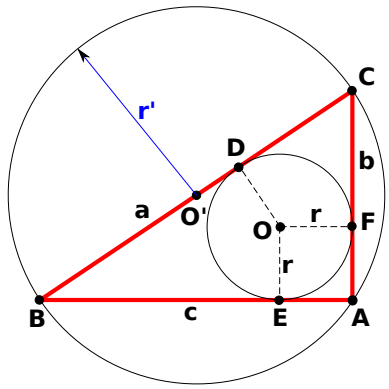
PROPOSICIÓN 2. En un triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{ABC}$, la suma de los lados del ángulo recto es igual a la suma de los diámetros de las dos circunferencias, la inscrita y la circunscrita.

En efecto: Resulta inmediato comprobar que

$$\mathbf{b + c = a + 2 \cdot r = 2 \cdot r' + 2 \cdot r}$$

puesto que

$$\begin{aligned} \mathbf{b+c} &= (\overline{\mathbf{CF}}+\overline{\mathbf{FA}})+(\overline{\mathbf{BE}}+\overline{\mathbf{EA}}) = \\ &= (\overline{\mathbf{CD}}+\mathbf{r})+(\overline{\mathbf{BD}}+\mathbf{r}) = \\ &= (\overline{\mathbf{CD}}+\overline{\mathbf{BD}})+\mathbf{2}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{a}+\mathbf{2}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{2}\cdot\mathbf{r'}+\mathbf{2}\cdot\mathbf{r} \end{aligned}$$



Observemos que, el radio de la circunferencia inscrita es la mitad de la diferencia entre la suma de los lados del ángulo recto y la hipotenusa.

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot (\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{a}) \, .$$

Llamamos **rectas isogonales** con relación a un ángulo a las dos rectas que, partiendo del mismo vértice, forman cada una con uno de los lados un ángulo igual al que la otra forma con el otro lado.

PROPOSICIÓN 3. El producto de dos lados de un triángulo es igual al de los dos segmentos isogonales respecto de dichos lados, limitados uno en el vértice y el lado opuesto, y el otro en el vértice y su segundo punto de intersección con la circunferencia circunscrita al triángulo.

En efecto: Consideremos el triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{ABC}}$, en el que se supone que

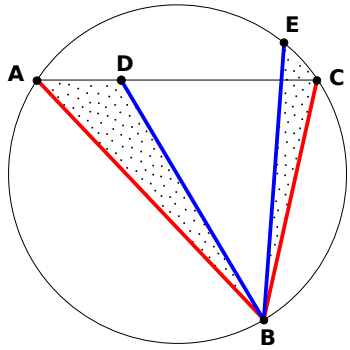
$$\widehat{\mathbf{ABD}} = \widehat{\mathbf{EBC}} \quad \Longleftrightarrow \quad \widehat{\mathbf{ABE}} = \widehat{\mathbf{DBC}}$$

Uniendo **C** con **E**, tenemos los triángulos semejantes $\overset{\triangle}{\mathbf{ABD}}$ y $\overset{\triangle}{\mathbf{BCE}}$, por tener los ángulos $\widehat{\mathbf{A}} = \widehat{\mathbf{E}}$, y $\widehat{\mathbf{ABD}} = \widehat{\mathbf{EBC}}$ por hipótesis; luego

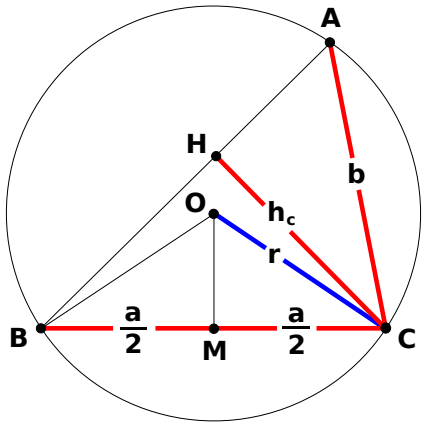
$$\frac{\overline{\mathbf{AB}}}{\overline{\mathbf{BE}}} = \frac{\overline{\mathbf{BD}}}{\overline{\mathbf{BC}}}$$

es decir:

$$\overline{\mathbf{AB}} \cdot \overline{\mathbf{BC}} = \overline{\mathbf{BD}} \cdot \overline{\mathbf{BE}}$$



Ejemplo 9. Determinación del radio de la circunferencia circunscrita de un triángulo en función de dos de sus lados y la altura del vértice común.



El ángulo $\widehat{\mathbf{BAC}}$ del triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{ABC}}$ es la mitad del ángulo central $\widehat{\mathbf{BOC}}$, luego igual al $\widehat{\mathbf{MOC}}$, limitado por $\overline{\mathbf{OC}}$ y el diámetro perpendicular a $\overline{\mathbf{BC}}$. Resulta, por tanto, que son semejantes los triángulos rectángulos $\widehat{\mathbf{MOC}}$ y $\widehat{\mathbf{HAC}}$, lo que nos permite establecer

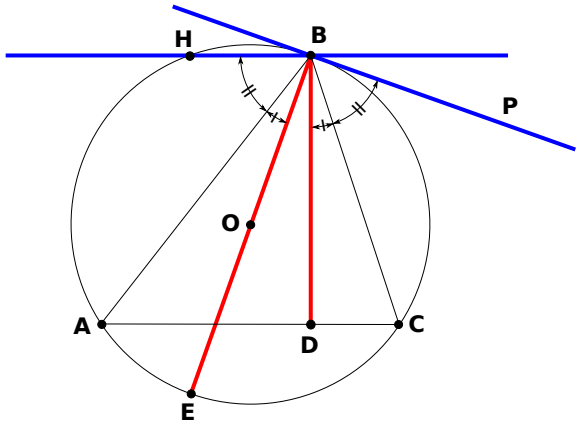
$$\frac{\mathbf{r}}{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{h_c}}$$

y en definitiva

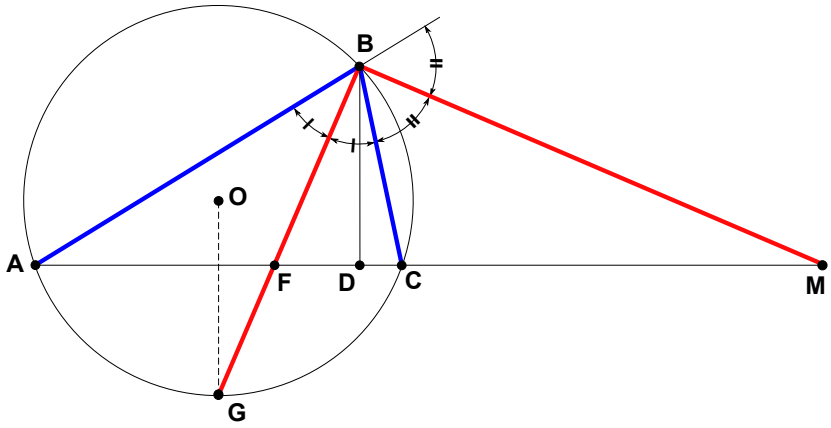
$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{2}\cdot\mathbf{h_c}} \ .$$

El resultado mostrado en este ejemplo, puede ser también considerado como corolario de la proposición anterior, que expresaríamos así: **El producto de dos lados de un triángulo es igual al producto de la altura correspondiente al tercer lado por el diámetro de la circunferencia circunscrita.**

Ejemplo 10. Las rectas $\overline{\mathbf{BP}}$, tangente en **B**, y $\overline{\mathbf{BH}}$ paralela a $\overline{\mathbf{AC}}$ son isogonales, por ser perpendiculares, respectivamente, al diámetro $\overline{\mathbf{BE}}$ y a la altura $\overline{\mathbf{BD}}$.



Ejemplo 11. La bisectriz, tanto la interior como la exterior, son isogonales de si mismas. Luego, suponiendo que, $\overline{\mathbf{BG}}$ y $\overline{\mathbf{BM}}$ son, respectivamente las bisectrices interior y exterior, tendremos:



$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{AB}}\cdot\overline{\mathbf{BC}} &= \overline{\mathbf{BF}}\cdot\overline{\mathbf{BG}} = \overline{\mathbf{BF}}\cdot(\overline{\mathbf{BF}}+\overline{\mathbf{FG}}) = \\
&= \overline{\mathbf{BF}}^2 + \overline{\mathbf{BF}}\cdot\overline{\mathbf{FG}} = \overline{\mathbf{BF}}^2 + \overline{\mathbf{FA}}\cdot\overline{\mathbf{FC}} \\
\overline{\mathbf{AB}}\cdot\overline{\mathbf{BC}} &= \overline{\mathbf{BM}}\cdot\overline{\mathbf{BN}} = \overline{\mathbf{BM}}\cdot(\overline{\mathbf{MN}}-\overline{\mathbf{MB}}) = \\
&= \overline{\mathbf{BM}}\cdot\overline{\mathbf{MN}} - \overline{\mathbf{MB}}^2 = \overline{\mathbf{MA}}\cdot\overline{\mathbf{MC}} - \overline{\mathbf{MB}}^2
\end{aligned}$$

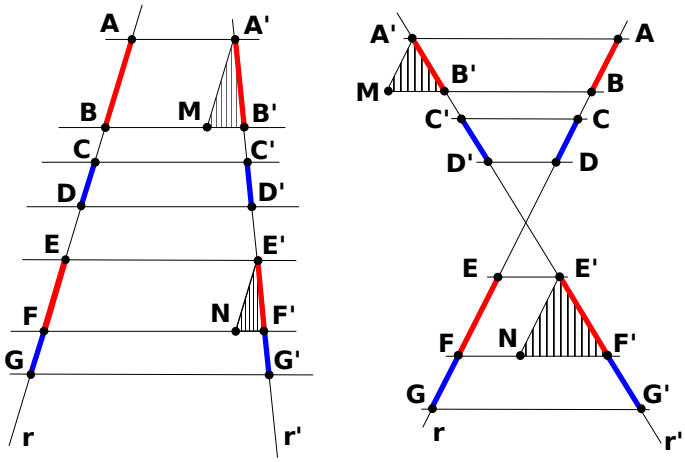
Antes de seguir vamos a recordar el Teorema de Thales del que haremos inmediata aplicación.

TEOREMA DE THALES. Si consideramos dos rectas cualquiera, r y r′, cortadas por un sistema de paralelas, los segmentos determinados por los puntos de intersección sobre r son proporcionales a los determinados por los puntos correspondientes sobre r′.

En efecto: Bastará con demostrar que se verifican las dos condiciones siguientes:

1.- A segmento iguales $\overline{\mathbf{AB}}$ y $\overline{\mathbf{EF}}$ en **r**, corresponden segmentos iguales $\overline{\mathbf{A'B'}}$ y $\overline{\mathbf{E'F'}}$ en **r′**.

2.- Al segmento $\overline{\mathbf{EG}} = \overline{\mathbf{AB}} + \overline{\mathbf{CD}}$ en **r**, le corresponde un segmento $\overline{\mathbf{E'G'}} = \overline{\mathbf{A'B'}} + \overline{\mathbf{C'D'}}$ en **r′**.



Para establecer la primera condición, trazaremos $\overline{A'M}$ y $\overline{E'N}$, segmentos paralelos a **r**, resultando que los triángulos $\overset{\triangle}{A'B'M}$ y $\overset{\triangle}{E'F'N}$ son iguales, por tener sus ángulos y un lado iguales:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{A'M}=\overline{AB}\\ \overline{E'N}=\overline{EF}\\ \overline{AB}=\overline{EF}\end{array}\right\}\Longrightarrow \overline{A'B'}=\overline{E'F'}\ .$$

También se cumple la segunda condición, puesto que:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{EF}=\overline{AB}\\ \overline{FG}=\overline{CD}\end{array}\right\}\Longrightarrow \overline{EF}+\overline{FG}=\overline{AB}+\overline{CD}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{E'F'}=\overline{A'B'}\\ \overline{F'G'}=\overline{C'D'}\end{array}\right\}\Longrightarrow \overline{E'F'}+\overline{F'G'}=\overline{A'B'}+\overline{C'D'}$$

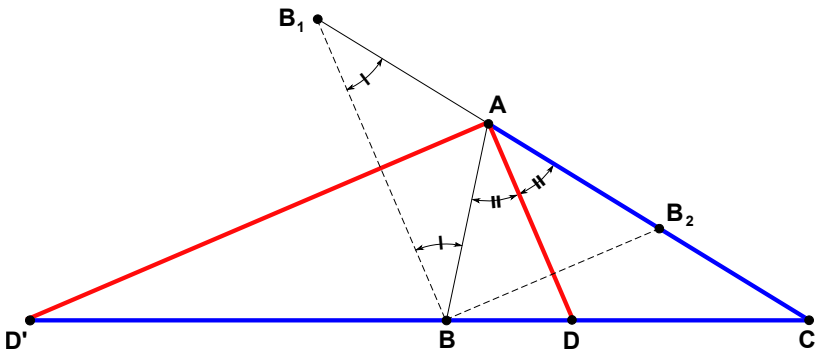
Evidentemente, las relaciones anteriores siguen verificándose en el caso de que las rectas r y r' sean paralelas.

Así, por ejemplo, se tiene que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}\quad,\quad \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}\quad,\quad \ldots\ldots$$

PROPOSICIÓN 4. En todo triángulo la bisectriz de un ángulo y la del ángulo externo correspondiente dividen al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los lados del ángulo.

En efecto: Consideremos el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$, y las dos bisectrices perpendiculares entre sí, $\overline{AD}$ y $\overline{AD'}$.



1.- Veamos que se verifica: $\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$.

Para ello tracemos por **B** una paralela a la bisectriz $\overline{AD}$, hasta que corte, en B_1, a $\overline{AC}$.
En el triángulo $\overset{\triangle}{B_1BC}$, se verificará

$$\frac{\overline{B_1A}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} ,$$

y como el triángulo $\overset{\triangle}{B_1AB}$ es isósceles, y ser $\overset{\triangle}{DAC}$=$\overset{\triangle}{BAD}$, tendremos $\widehat{BB_1A} = \widehat{B_1BA}$, luego $\overline{B_1A} = \overline{AB}$; por lo tanto

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} .$$

2.- Veamos que se verifica: $\dfrac{\overline{D'B}}{\overline{D'C}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$.

Trazada, por **B**, la paralela a la bisectriz $\overline{AD'}$, hasta que corte, en B_2, a $\overline{AC}$, vemos que se verifica

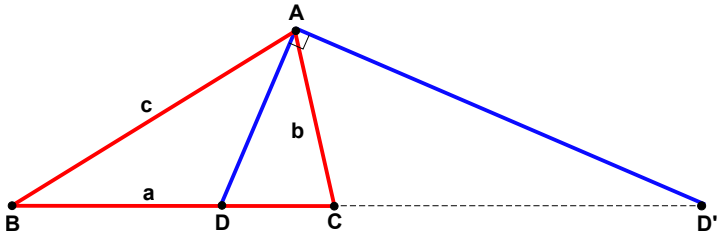
$$\frac{\overline{AB_2}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{D'B}}{\overline{D'C}} ,$$

y como el triángulo $\overset{\triangle}{ABB_2}$, es isósceles se tiene $\overline{AB_2} = \overline{AB}$.
Por último, sustituyendo resulta

$$\boxed{\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{D'B}}{\overline{D'C}}}$$

Vamos a hacer, ahora, aplicación de todo lo anterior, al cálculo de algunas líneas notables del triángulo y al cálculo de su área.

1.- BISECTRICES. Llamemos $\overline{AD}$ a la bisectriz del ángulo interno $\widehat{A}$, y **a**, **b**, **c** a los lados opuestos, respectivamente, a los vértices **A**, **B**, **C**.



El punto **D** divide a $\overline{BC}$ en partes proporcionales a los lados del ángulo $\widehat{A}$, luego tendremos

$$\frac{b}{\overline{CD}} = \frac{c}{\overline{DB}} = \frac{b+c}{a}$$

de donde

$$\overline{CD} = \frac{a \cdot b}{b+c} \quad , \quad \overline{DB} = \frac{a \cdot c}{b+c} \, .$$

Por otra parte, se verifica

$$b \cdot c = \overline{AD}^2 + \overline{BD} \cdot \overline{DC} = \overline{AD}^2 + \frac{a \cdot b}{b+c} \cdot \frac{a \cdot c}{b+c} = \overline{AD}^2 + \frac{a^2 \cdot b \cdot c}{(b+c)^2}$$

de donde

$$\overline{AD}^2 = b \cdot c - \frac{a^2 \cdot b \cdot c}{(b+c)^2} = \frac{b \cdot c \cdot [(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2} = \frac{b \cdot c \cdot (b+c+a) \cdot (b+c-a)}{(b+c)^2}$$

Llamando, ahora, $2 \cdot p = a+b+c$ (perímetro del triángulo)

y por tanto, $c+b-a = 2 \cdot (p-a)$

tendremos

$$\overline{AD}^2 = \frac{4 \cdot b \cdot c \cdot p \cdot (p-a)}{(b+c)^2}$$

y por último

$$\boxed{\overline{AD} = \frac{2}{b+c} \cdot \sqrt{b \cdot c \cdot p \cdot (p-a)}}$$

expresión de la bisectriz interior.

Para el cálculo de la bisectriz exterior partiremos de la igualdad

$$b \cdot c = \overline{D'B} \cdot \overline{D'C} - \overline{AD'}^2$$

en la que sustituyendo los valores $\overline{D'B}$ y $\overline{D'C}$, tomados de las proporciones

$$\frac{b}{\overline{D'B}} = \frac{c}{\overline{D'C}} = \frac{b-c}{a}$$

tendremos

$$b \cdot c = \frac{a^2 \cdot b \cdot c}{(b-c)^2} - \overline{AD'}^2 \, ,$$

de donde

$$\overline{AD'}^2 = \frac{b \cdot c \cdot [a^2 - (b-c)^2]}{(b-c)^2} = \frac{b \cdot c \cdot (a+b-c) \cdot (a+c-b)}{(b-c)^2}$$

y llamando, como antes, $\mathbf{2\cdot p = a+b+c}$, es decir

$$\mathbf{a+b-c = 2\cdot(p-c)} \quad , \quad \mathbf{a+c-b = 2\cdot(p-b)}$$

se tiene

$$\overline{\mathbf{AD'}}^{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{4\cdot b\cdot c\cdot(p-b)\cdot(p-c)}}{\mathbf{(b-c)^2}} \, ,$$

y por último

$$\boxed{\overline{\mathbf{AD'}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{b-c}} \cdot \sqrt{\mathbf{b\cdot c\cdot(p-b)\cdot(p-c)}}}$$

expresión de la bisectriz exterior.

PROPOSICIÓN 5. El producto de dos lados de un triángulo es igual al cuadrado de la bisectriz concurrente con ellos, más el producto de los segmentos en que divide al lado opuesto.

En efecto: Toda bisectriz $\mathbf{v_c}$ de un triángulo es isogonal de sí misma.

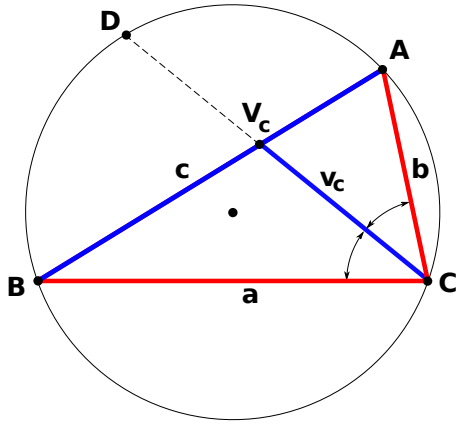
Por otra parte, si **D** es su punto de intersección con la circunferencia circunscrita se verificará por la proposición anterior:

$$\mathbf{a\cdot b = v_c\cdot\overline{CD} = v_c\cdot(v_c+\overline{V_cD}) = v_c^2+v_c\cdot\overline{V_cD}}$$

Ahora bien, $\mathbf{v_c\cdot\overline{V_cD}}$ es, en valor absoluto, la potencia del punto $\mathbf{V_c}$ respecto de la circunferencia circunscrita, que puede sustituirse por el producto $\mathbf{\overline{BV_c}\cdot\overline{V_cA}}$; luego

$$\mathbf{a\cdot b = v_c^2+\overline{BV_c}\cdot\overline{V_cA}} \, ,$$

como queríamos establecer.



PROPOSICIÓN 6. El producto de dos lados de un triángulo es igual al de los segmentos de dos isogonales concurrentes con ellos y limitados, respectivamente, por el lado opuesto y por la circunferencia circunscrita.

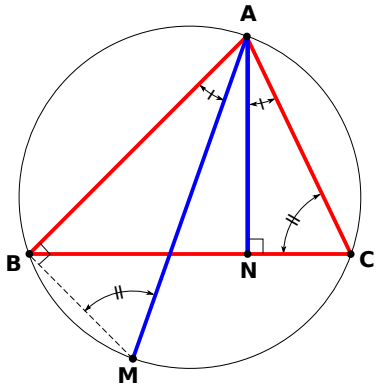
En efecto: Los ángulos inscritos $\widehat{\mathbf{BMA}}$ y $\widehat{\mathbf{BCA}}$ son iguales; por tanto los triángulos $\overset{\triangle}{\mathbf{BMA}}$ y $\overset{\triangle}{\mathbf{NCA}}$ son semejantes, por tener dos ángulos respectivamente iguales ($\widehat{\mathbf{M}} = \widehat{\mathbf{C}}$ y $\widehat{\mathbf{A}} = \widehat{\mathbf{A}}$). Resulta, entonces, que

$$\frac{\overline{\mathbf{AB}}}{\overline{\mathbf{AM}}} = \frac{\overline{\mathbf{AN}}}{\overline{\mathbf{AC}}}$$

y, en consecuencia

$$\overline{\mathbf{AB}} \cdot \overline{\mathbf{AC}} = \overline{\mathbf{AM}} \cdot \overline{\mathbf{AN}}$$

como queríamos demostrar.



Recordemos que se llamarán **isogonales** respecto de dos lados de un triángulo, a dos semi-rectas que parten del vértice común y forman ángulos iguales y sentido opuesto con dichos lados.
En la figura anterior: $\widehat{\mathbf{BAM}} = \widehat{\mathbf{CAN}}$, siendo las semi-rectas $\overline{\mathbf{AM}}$ y $\overline{\mathbf{AN}}$ isogonales respecto de los lados $\overline{\mathbf{AB}}$ y $\overline{\mathbf{AC}}$.

PROPOSICIÓN 7. Las intersecciones de las bisectrices de un ángulo de un triángulo, $\overset{\triangle}{\mathbf{ABC}}$, y de su adyacente, con el lado opuesto, están armónicamente separadas por los vértices de dicho lado.

En efecto: Las dos proposiciones anteriores nos permiten escribir lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \overline{\mathbf{AV}} = \dfrac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{a}-\mathbf{b}} \\ \overline{\mathbf{BV}} = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{a}-\mathbf{b}} \end{array}\right\} \Longrightarrow \dfrac{\overline{\mathbf{AV}}}{\overline{\mathbf{BV}}} = \dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} \\ \left.\begin{array}{l} \overline{\mathbf{BV_c}} = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{a}+\mathbf{b}} \\ \overline{\mathbf{V_cA}} = \dfrac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{a}+\mathbf{b}} \end{array}\right\} \Longrightarrow \dfrac{\overline{\mathbf{V_cA}}}{\overline{\mathbf{BV_c}}} = \dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\overline{\mathbf{AV}}}{\overline{\mathbf{BV}}} = -\frac{\overline{\mathbf{V_cA}}}{\overline{\mathbf{BV_c}}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$$

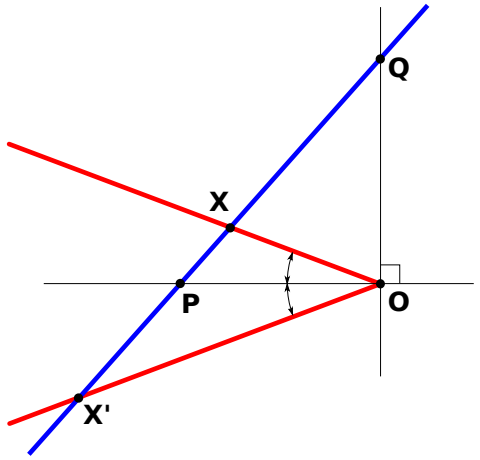
de donde:

$$(\mathbf{BAV_cV}) = (\mathbf{BAV_c}) : (\mathbf{BAV}) = \frac{\overline{\mathbf{BV_c}}}{\overline{\mathbf{AV_c}}} : \frac{\overline{\mathbf{BV}}}{\overline{\mathbf{AV}}} = \frac{\dfrac{-\mathbf{a}}{\mathbf{b}}}{\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}} = -\mathbf{1}$$

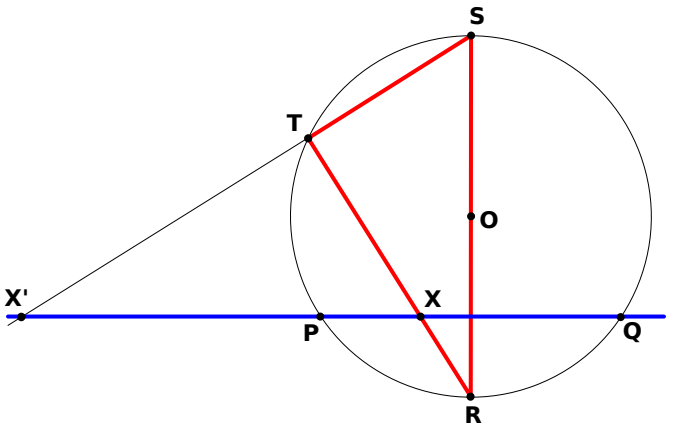
como queríamos establecer.

Podemos expresar esta propiedad, también, en la forma siguiente: **Al cortar dos rectas y las bisectrices de los ángulos que forman, por una secante cualquiera de las cuatro, se obtiene una cuaterna armónica.**

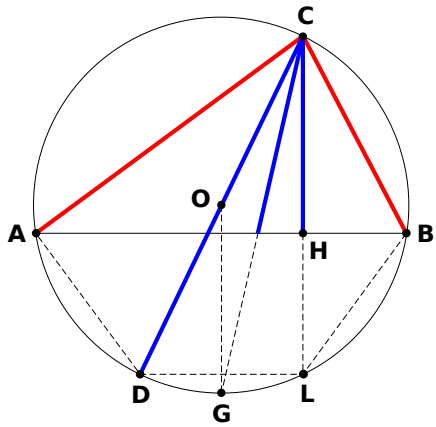
Esta propiedad nos permite construir el punto $\mathbf{X'}$, armónicamente separado del **X**, por los puntos **P** y **Q**, sin mas que hacer pasar por **P** y **Q** los lados de un ángulo recto $\widehat{\mathbf{POQ}}$, trazando luego la simétrica $\overline{\mathbf{OX'}}$ de $\overline{\mathbf{OX}}$ respecto de uno de dichos lados.



Obtendremos el mismo resultado trazando una circunferencia cualquiera por $\overline{\mathbf{PQ}}$, uniendo con **X** uno de los extremos **R** del diámetro perpendicular, y proyectando desde el otro extremo **S**, el otro punto **T** de intersección de $\overline{\mathbf{XR}}$ con la circunferencia. Basta ver que $\overline{\mathbf{TR}}$ es bisectriz de $\widehat{\mathbf{PTQ}}$ por la igualdad de los arcos $\overset{\frown}{\mathbf{PR}}$ y $\overset{\frown}{\mathbf{RQ}}$ y, $\overline{\mathbf{TS}}$ perpendicular a $\overline{\mathbf{TR}}$ por ser $\overline{\mathbf{SR}}$ diámetro.



PROPOSICIÓN 8. La bisectriz interior del ángulo de un triángulo es bisectriz del ángulo formado por el diámetro de la circunferencia circunscrita y la altura bajada del ángulo considerado.

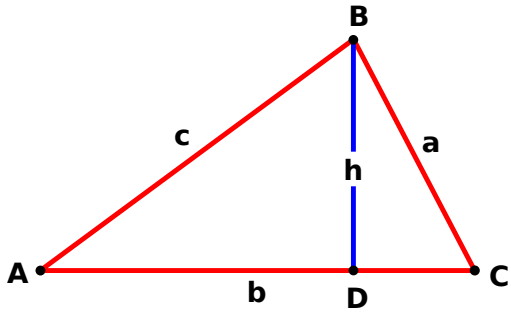


En efecto: Sea el triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{ACB}}$, sobre el que haremos lo siguiente: Trazar la circunferencia circunscrita; unir el vértice **C** con el punto medio del arco $\overset{\frown}{\mathbf{AB}}$ (con lo que habremos dibujado la **bisectriz del ángulo** $\widehat{\mathbf{C}}$) y trazar el diámetro $\overline{\mathbf{CD}}$, y la altura $\overline{\mathbf{CH}}$, que prolongaremos hasta la circunferencia, siendo **L** su punto de contacto.

Tanto el ángulo $\widehat{\mathbf{CLD}}$ como el $\widehat{\mathbf{CHA}}$ son rectos, luego los segmentos $\overline{\mathbf{AB}}$ y $\overline{\mathbf{DL}}$ son paralelos; así mismo se verifica $\overset{\frown}{\mathbf{BL}}=\overset{\frown}{\mathbf{AD}}$, y $\overset{\frown}{\mathbf{LG}}=\overset{\frown}{\mathbf{DG}}$, lo que nos establece lo que nos interesa.

Por otra parte, observamos que las rectas $\overline{\mathbf{CH}}$ y $\overline{\mathbf{CD}}$, que forman ángulos iguales con la bisectriz interior del ángulo $\widehat{\mathbf{C}}$, son **rectas isogonales** (Recordemos que dos rectas son **isogonales** si parten del mismo vértice de un triángulo, y forman ángulos iguales con la bisectriz de ese mismo ángulo.).

2.- ALTURAS. Consideremos el triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{ABC}}$.



Llamando **h** a la altura $\overline{\mathbf{BD}}$, se tiene:

$$\mathbf{h^2 = a^2 - \overline{DC}^2} \ .$$

Como se verifica, además, que

$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot \overline{DC}}$$

resultará

$$\mathbf{\overline{DC} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot b}} \ .$$

Por lo tanto

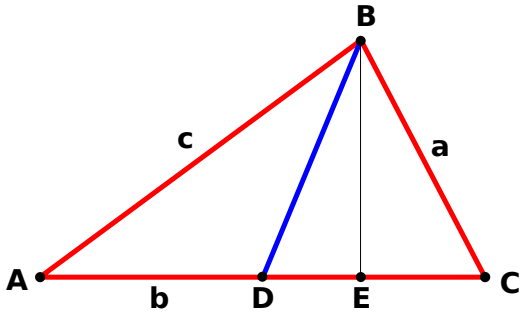
$$\begin{aligned} h^2 &= a^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot b}\right)^2 = \frac{4\cdot a^2\cdot b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{4\cdot b^2} = \\ &= \frac{(2\cdot a\cdot b+a^2+b^2-c^2)\cdot(2\cdot a\cdot b-a^2-b^2+c^2)}{4\cdot b^2} = \\ &= \frac{[(a+b)^2-c^2]\cdot[c^2-(a-b)^2]}{4\cdot b^2} = \\ &= \frac{(a+b+c)\cdot(a+b-c)\cdot(c+a-b)\cdot(c-a+b)}{4\cdot b^2} = \\ &= \frac{4\cdot p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}{b^2} \end{aligned}$$

y en definitiva

$$\boxed{h=\frac{2}{b}\cdot\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}}$$

expresión de la altura del triángulo.

3.- MEDIANAS. Consideremos el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$, y tracemos la mediana $\overline{BD}$.



Sea $\overline{DE}$ la proyección de esa mediana sobre $\overline{AC}$.

Considerando, ahora, sucesivamente los triángulos $\overset{\triangle}{ABD}$ y $\overset{\triangle}{BDC}$, tendremos

$$c^2=\overline{BD}^2+\frac{b^2}{4}+2\cdot\frac{b}{2}\cdot\overline{DE}$$

$$a^2=\overline{BD}^2+\frac{b^2}{4}-2\cdot\frac{b}{2}\cdot\overline{DE}$$

Sumando estas igualdades, se tiene

$$\mathbf{a^2 + c^2 = 2 \cdot \overline{BD}^2 + \frac{b^2}{2}} \ ,$$

de donde resultará:

$$\mathbf{\overline{BD}^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}} \quad \textbf{(FÓRMULA DE LA MEDIANA)}$$

y

$$\boxed{\mathbf{\overline{BD} = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}}}}$$

expresión, esta última, de la mediana del triángulo.

4.- DIVERSAS EXPRESIONES DEL ÁREA DE UN TRIÁNGULO.

a.- En función de sus lados. Sabemos que si designamos por **h** la altura relativa al lado **a**, por **p** el semi-perímetro, y por **S** el área del triángulo, se tiene

$$\boxed{\mathbf{S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h}}$$

Sustituyendo, ahora, el valor de **h** obtenido antes, tendremos:

$$\boxed{\mathbf{S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{2}{a} \cdot \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}}}$$

b.- En función de sus tres lados y del radio de la circunferencia circunscrita.

Llamando **r** al radio de la circunferencia circunscrita, tendremos:

$$\mathbf{\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 2 \cdot r \cdot \overline{BD}}$$

y multiplicando los dos miembros por $\overline{\mathbf{AC}}$, se tiene

$$\mathbf{\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AC} = 2 \cdot r \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AC}}$$

y dado que,

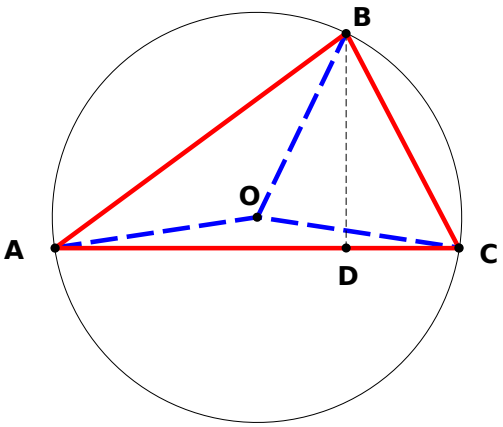
$$\mathbf{\overline{BD} \cdot \overline{AC} = 2 \cdot S} \ ,$$

se tiene

$$\mathbf{a \cdot b \cdot c = 4 \cdot r \cdot S} \ ,$$

de donde resultará:

$$\boxed{S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot r}}$$



c.- En función del perímetro y del radio de la circunferencia inscrita.

Dado el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$, si **O** es su centro y **r** el radio de la circunferencia inscrita, se tiene

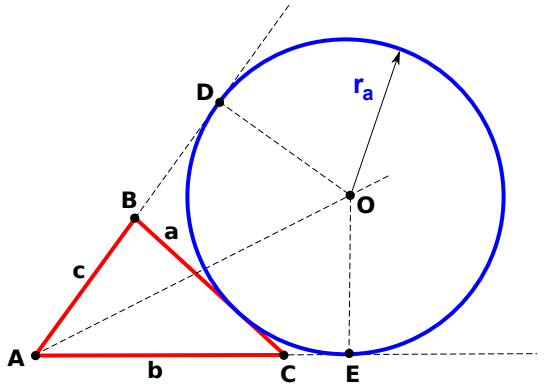
$$\text{Área de } \overset{\triangle}{AOB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot r \;\; ; \;\; \text{Área de } \overset{\triangle}{AOC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot r \;\; ; \;\; \text{Área de } \overset{\triangle}{BOC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot r$$

de donde

$$\boxed{S = r \cdot \frac{a+b+c}{2} = r \cdot p}$$

d.- En función del perímetro y de los radios de las circunferencias exinscritas.

Si, dado el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$, llamaremos r_a, r_b, r_c a los radios de las tres circunferencias exinscritas tendremos:



$$S = \overset{\triangle}{AOB} + \overset{\triangle}{AOC} - \overset{\triangle}{BOC} = \frac{c}{2} \cdot r_a + \frac{b}{2} \cdot r_a - \frac{a}{2} \cdot r_a = \frac{c+b-a}{2} \cdot r_a$$

y en definitiva

$$\boxed{\mathbf{S = (p - a) \cdot r_a}}$$

Del mismo modo obtendríamos

$$\boxed{\mathbf{S = (p - b) \cdot r_b}} \quad , \quad \boxed{\mathbf{S = (p - c) \cdot r_c}}$$

e.- En función de los cuatro radios, el de la circunferencia inscrita, r, y los de las circunferencias exinscritas r_a, r_b, r_c.

Hemos obtenido antes:

$$\mathbf{S = r \cdot p} \quad ; \quad \mathbf{S = (p - a) \cdot r_a} \quad ; \quad \mathbf{S = (p - b) \cdot r_b} \quad ; \quad \mathbf{S = (p - c) \cdot r_c} \, .$$

Multiplicando, ahora, ordenadamente las igualdades anteriores, obtenemos:

$$\mathbf{S^4 = r \cdot p \cdot r_a \cdot (p - a) \cdot r_b \cdot (p - b) \cdot r_c \cdot (p - c) = r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

Y como cuando obtuvimos el área en función de los lados teníamos

$$\mathbf{S^2 = p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)} \, ,$$

podemos escribir

$$\mathbf{S^2 = r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$$

y en definitiva

$$\boxed{\mathbf{S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}}}$$

Ejemplo 12. El área de un triángulo equilátero, en función de su lado **a**, se obtiene como sigue:

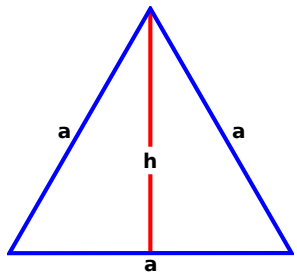
$$\mathbf{S = \frac{a \cdot h}{2}}$$

y como

$$\mathbf{h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}}$$

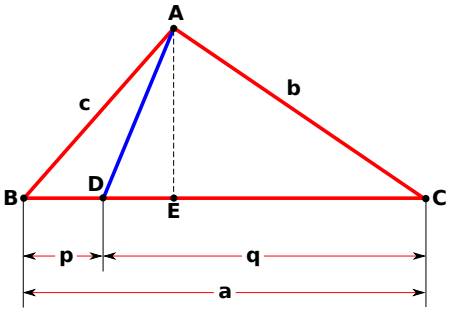
tendremos

$$\mathbf{S = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}}$$



FÓRMULA DE STEWART:

La fórmula nos proporciona la longitud de cualquier segmento de un triángulo, que une un vértice con un punto cualquiera del lado opuesto, en función de los lados del triángulo y de los segmentos en que queda dividido el lado opuesto.



$$\boxed{\overline{AD}^2 = \frac{q \cdot c^2 + p \cdot b^2 - q \cdot p \cdot a}{a}}$$

La comprobación es sencilla:

En $\overset{\triangle}{ABD}$ se verifica: $\quad c^2 = \overline{AD}^2 + p^2 + 2 \cdot p \cdot \overline{DE}$

En $\overset{\triangle}{ACD}$ se verifica: $\quad b^2 = \overline{AD}^2 + q^2 - 2 \cdot q \cdot \overline{DE}$

Multiplicando la primera igualdad por **q**, la segunda por **p**, y sumando miembro a miembro resulta:

$$q \cdot c^2 + p \cdot b^2 = (q+p) \cdot \overline{AD}^2 + q \cdot p^2 + p \cdot q^2$$

es decir

$$q \cdot c^2 + p \cdot b^2 = a \cdot \overline{AD}^2 + q \cdot p \cdot (q+p)$$

y en definitiva

$$q \cdot c^2 + p \cdot b^2 = a \cdot \overline{AD}^2 + q \cdot p \cdot a$$

de donde, despejando $\overline{AD}^2$, tenemos

$$\overline{AD}^2 = \frac{q \cdot c^2 + p \cdot b^2 - q \cdot p \cdot a}{a} \ ,$$

es decir, la **fórmula de Stewart**.

PROPOSICIÓN 9. Sea $\widehat{A}$ un ángulo formado por dos tangentes $\overline{AD}$ y $\overline{AE}$ a una determinada circunferencia. Si se traza una tercera tangente $\overline{BC}$, móvil, el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ formado tiene un perímetro constante. Además el ángulo central $\widehat{BOC}$, bajo el que se ve esa tangente móvil, es constante.

En efecto: **El perímetro del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ es constante**; puesto que si trazamos los radios $\overline{OD}$, $\overline{OE}$, $\overline{OI}$, tenemos

$$\overline{BI} = \overline{BD} \quad , \quad \overline{CI} = \overline{CE}$$

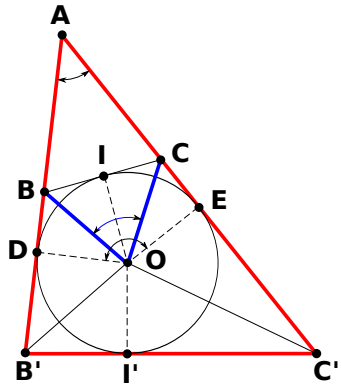
luego el perímetro del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ será

$$\overline{AB} + \overline{BI} + \overline{CI} + \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{AC} + \overline{CE} = \overline{AD} + \overline{AE}$$

cantidad independiente de la posición de $\overline{BC}$.

Por otra parte: **El ángulo $\widehat{BOC}$ es constante**; puesto que por ser la recta $\overline{OB}$ bisectriz del ángulo $\widehat{DOI}$, formado por los radios que van a los puntos de contacto, y por lo mismo $\overline{OC}$ bisectriz del ángulo $\widehat{IOE}$, se verifica que el ángulo $\widehat{BOC}$ es la mitad del ángulo total $\widehat{DOE}$, el cual es constante y suplementario del ángulo $\widehat{A}$.

(Observemos, además, que: $\widehat{BOC} + \widehat{B'OC'} = 180^o$)



PROPOSICIÓN 10. Cuando un triángulo circunscrito a una circunferencia dada tiene un ángulo constante, la suma de los lados que determinan este ángulo, a la que restamos el lado opuesto, resulta ser una constante. Además, el lado opuesto se ve desde el centro bajo un ángulo constante.

En efecto: Si restamos de la suma $\overline{AB'} + \overline{AC'}$ la cantidad $\overline{B'C'}$ tendremos

$$\begin{aligned} \overline{AB'} + \overline{AC'} - \overline{B'C'} &= \overline{AB'} + \overline{AC'} - (\overline{B'I'} + \overline{I'C'}) = \\ &= \overline{AB'} + \overline{AC'} - (\overline{B'D} + \overline{C'E}) = \\ &= (\overline{AB'} - \overline{B'D}) + (\overline{AC'} - \overline{C'E}) = \\ &= \overline{AD} + \overline{AE} = (\textbf{constante}) \end{aligned}$$

En cuanto al ángulo $\widehat{B'OC'}$ también es constante, puesto que

$$\widehat{B'OC'} = \frac{1}{2} \cdot (\widehat{DOI'} + \widehat{EOI'}) = (\textbf{constante}),$$

puesto que son constantes los ángulos $\widehat{DOI'}$ y $\widehat{EOI'}$.

(El razonamiento se ha hecho sobre la figura de la proposición anterior).

Ejemplo 13. Determinar la envolvente de la base $\overline{BC}$ de un triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ cuyo perímetro es constante, dado el ángulo $\widehat{A}$ fijo.

Dibujemos un triángulo isósceles $\overset{\triangle}{EAF}$ tal que la suma de los lados $\overline{AE}$ y $\overline{AF}$ sea igual al perímetro de $\overset{\triangle}{ABC}$, y tracemos las bisectrices de los ángulos externos $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$.

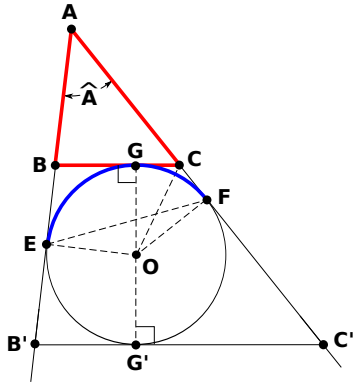
Se verificará, entonces, que:

$$\overline{AE}+\overline{AF}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$$

y

$$\overline{OG}=\overline{OE}=\overline{OF}$$

Luego, la base $\overline{BC}$ es tangente a la circunferencia exinscrita; es decir, **la envolvente de la recta $\overline{BC}$ es el arco $\overset{\frown}{EGF}$.**



Se verifica, asimismo, que le arco $\overset{\frown}{EG'F}$ es la envolvente de la recta $\overline{B'C'}$ tal que:

$$\overline{AB'}+\overline{AC'}-\overline{B'C'}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=(\textbf{constante})$$

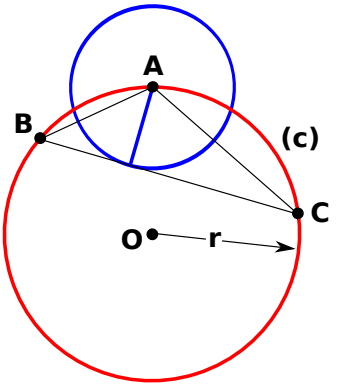
Ejemplo 14. Dada una circunferencia, $(\mathbf{c})$, y sobre ella un punto fijo, **A**, por el que trazamos dos cuerdas $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ cuyo producto $\mathbf{k^2}$ es constante. Se trata de determinar la envolvente de la base $\overline{BC}$ del triángulo $\overset{\triangle}{BAC}$.

La perpendicular $\overline{AD}$, a la base, tiene una longitud constante puesto que el producto de dos lados de un triángulo es igual a la altura de ese triángulo multiplicada por el diámetro de la circunferencia circunscrita.

Luego:

$$\overline{AD}=\frac{k^2}{2\cdot r}$$

Resulta entonces que **la envolvente de $\overline{BC}$ es la circunferencia descrita, con centro en A, y radio $\frac{k^2}{2\cdot r}$.**



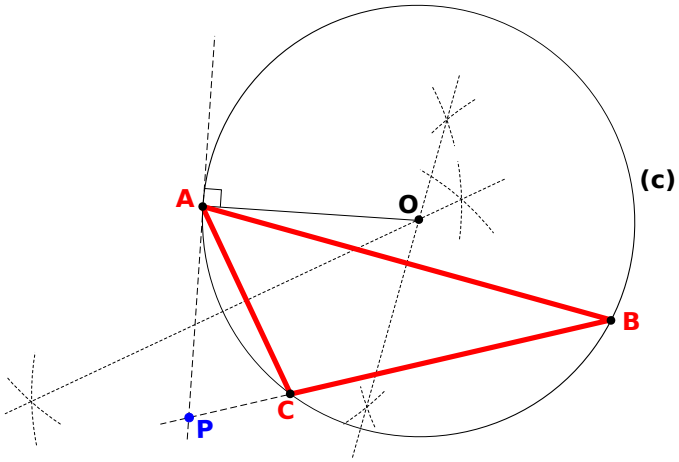
.

Ejemplo 15. Determinar el punto **P** que cumple

$$\overline{\mathbf{PA}} \cdot \overline{\mathbf{PA}} = \overline{\mathbf{PB}} \cdot \overline{\mathbf{PC}}$$

respecto de los vértices del triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{ABC}}$.

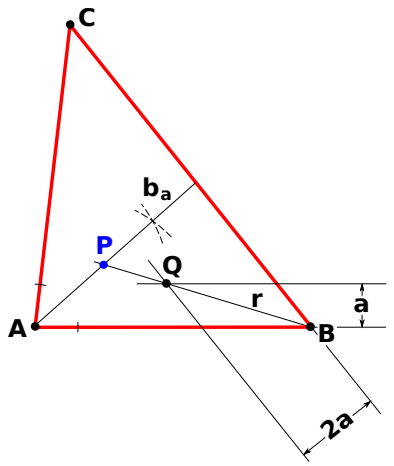
En primer lugar determinaremos el circuncentro, **O**, del triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{ABC}}$. Luego, por **A** trazamos una tangente a la circunferencia circunscrita $(\mathbf{c})$, y donde esa tangente corte a la prolongación del lado $\overline{\mathbf{BC}}$, situamos el punto **P**, solución del problema planteado.



.

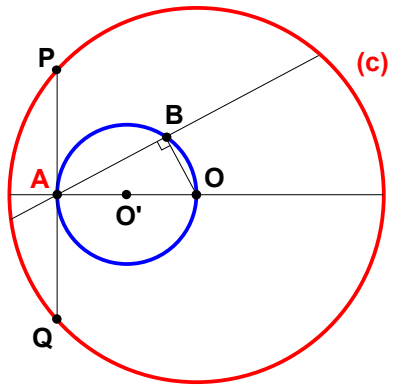
Ejemplo 16. Determinar un punto interior de un triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{ABC}}$ que equidiste de dos lados, $\overline{\mathbf{AB}}$ y $\overline{\mathbf{AC}}$, y que diste del tercer lado, $\overline{\mathbf{BC}}$, el doble que de los primeros.

En primer lugar trazamos la bisectriz del ángulo $\widehat{\mathbf{A}}$, $\mathbf{b_a}$. Luego trazaremos la recta, **r**, lugar geométrico de los puntos que distan de $\overline{\mathbf{BC}}$ el doble que de $\overline{\mathbf{AB}}$, para cuya determinación dibujaremos una paralela a $\overline{\mathbf{AB}}$ y otra a $\overline{\mathbf{BC}}$, esta última a una distancia doble de la otra; la intersección de estas determinan un punto **Q**. La recta que une **Q** con el vértice **B** cortará a $\mathbf{b_a}$ en el punto, **P**, que nos interesa.

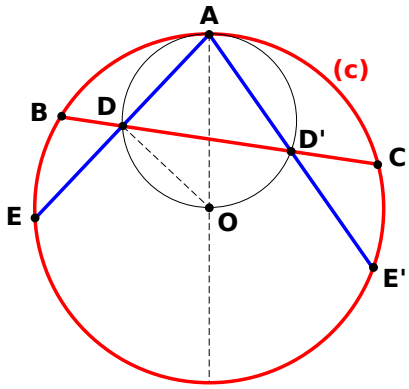


PROPOSICIÓN 11. Dada una circunferencia, (c), y un punto interior a la misma, A, el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de (c) que pasan por A, es la circunferencia de diámetro $\overline{OA}$, siendo O el centro de (c).

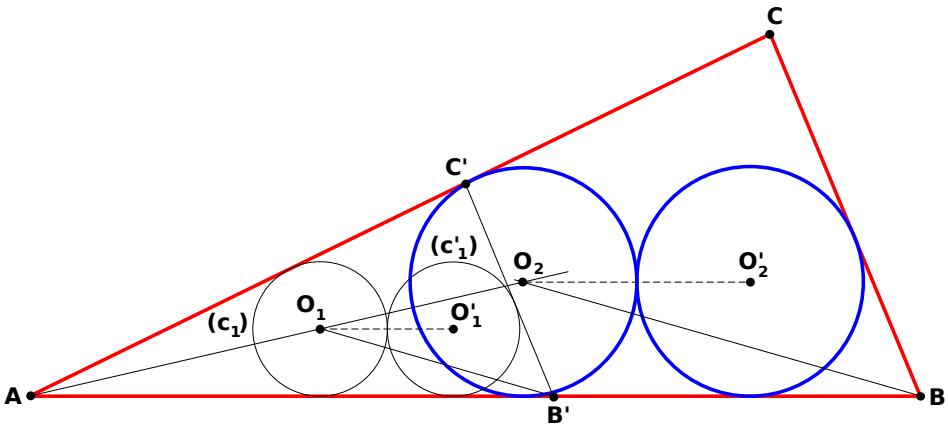
En efecto: Pertenecen al lugar geométrico buscado tanto el punto **O** (punto medio del diámetro, que pasa por **A**), como el punto **A** (punto medio de la cuerda $\overline{PQ}$, perpendicular al diámetro anterior).
Por otra parte, si **B** es el punto medio de una cuerda cualquiera, que pase por **A**, se verifica que $\overline{OB}$ es perpendicular a dicha cuerda. Luego, el punto **B**, vértice del ángulo recto $\widehat{ABO}$, pertenece a la circunferencia descrita sobre $\overline{OA}$ como diámetro, y centro O'.



Ejemplo 17. Dada una circunferencia, (c), fijemos sobre la misma un punto, **A**, y una cuerda $\overline{BC}$. Se trata de trazar, por el punto **A**, una segunda cuerda que quede dividida en dos partes iguales por la primera.
Si $\overline{ADE}$ es la cuerda buscada, el punto **D** debe encontrarse sobe la dada, $\overline{BC}$, y sobre el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas trazadas por el punto **A**, con lo que bastará trazar la circunferencia de diámetro $\overline{OA}$. Los puntos **D** y D' determinarán las cuerdas pedidas.



Ejemplo 18. Dibujar dos circunferencias tangentes entre sí, iguales, siendo además cada una de ellas tangente a un lado distinto de un triángulo dado, y ambas tangentes al tercer lado.



Dado el triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{ABC}}$, se traza una circunferencia de radio cualquiera, y tangente a dos lados, sea la $(\mathbf{c_1})$; y otra de igual radio, tangente a ella y al mismo lado, sea la $(\mathbf{c'_1})$.

Se dibuja, luego, una paralela al lado $\overline{\mathbf{BC}}$ por la circunferencia $(\mathbf{c'_1})$.

Se une, ahora, el vértice **A** con el centro $\mathbf{O_1}$, y éste a su vez con $\mathbf{B'}$.

A continuación se traza, por **B**, una paralela a $\overline{\mathbf{O_1B'}}$ que cortará a la recta $\overline{\mathbf{AO_1}}$ en el punto $\mathbf{O_2}$, centro de la primera circunferencia buscada. La construcción de la segunda de centro $\mathbf{O'_1}$ es inmediata.

Aparte de otros resultados, se atribuye a Napoleón las siguientes dos propiedades:

PROPOSICIÓN 12. Si sobre cada uno de los lados de un triángulo se construye un triángulo equilátero, y se une el tercer vértice de cada uno de esos triángulos con el vértice opuesto del triángulo primitivo, se verifica que: 1º.- Los tres segmentos así establecidos son iguales entre sí, y 2º.- se cortan en un mismo punto.

En efecto: los triángulos $\overset{\triangle}{\mathbf{FAC}}$ y $\overset{\triangle}{\mathbf{BAE}}$ son iguales puesto que:

$$\overline{\mathbf{AF}} = \overline{\mathbf{AB}} \quad , \quad \overline{\mathbf{AC}} = \overline{\mathbf{AE}} \quad , \quad \overset{\triangle}{\mathbf{FAC}} = \overset{\triangle}{\mathbf{BAE}} ;$$

luego

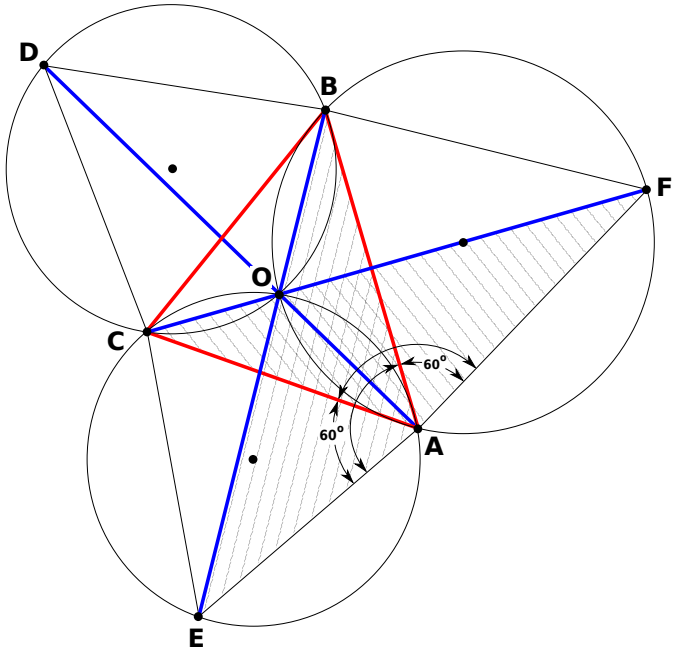
$$\overline{\mathbf{FC}} = \overline{\mathbf{BE}} .$$

Un razonamiento análogo nos conduciría a la igualdad:

$$\overline{\mathbf{FC}} = \overline{\mathbf{AD}} .$$

Concluimos, así, la igualdad de los segmentos que nos interesaban, en $\mathbf{1^o}$, es decir

$$\overline{\mathbf{FC}} = \overline{\mathbf{BE}} = \overline{\mathbf{AD}} .$$



Para establecer el punto $\mathbf{2^o}$, observemos que las circunferencias circunscritas a los dos triángulos equiláteros $\overset{\triangle}{\mathbf{ABF}}$ y $\overset{\triangle}{\mathbf{AEC}}$, se cortan en un punto **O**, tal que los ángulos $\widehat{\mathbf{AOB}}$ y $\widehat{\mathbf{AOC}}$ son iguales, y valen 120^o, como suplementarios de los ángulos $\widehat{\mathbf{F}}$ y $\widehat{\mathbf{E}}$, que valen cada uno, 60^o. En consecuencia, también el ángulo $\widehat{\mathbf{BOC}}$ valdría 120^o, y la circunferencia circunscrita al triángulo equilátero $\overset{\triangle}{\mathbf{BDC}}$ pasará por el punto **O**, intersección de las dos primeras.

Unamos, ahora, este punto **O** con los seis vértices; para demostrar lo que nos interesa, bastará con probar que $\overline{\mathbf{OF}}$ y $\overline{\mathbf{OC}}$ están alineados.

Ahora bien, cada ángulo formado alrededor del punto **O** vale 60^o, puesto que el arco $\overset{\frown}{\mathbf{BF}}$ es el tercio de la circunferencia, etc. Luego, la suma de los tres ángulos $\widehat{\mathbf{FOB}}$, $\widehat{\mathbf{BOD}}$ y $\widehat{\mathbf{DOC}}$ vale 180^o, y en consecuencia los lados exteriores $\overline{\mathbf{OF}}$ y $\overline{\mathbf{OC}}$ están alineados.

Observemos que:

a.- Cada lado del triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{ABC}}$ se ve desde el punto **O** bajo un mismo ángulo.

b.- La proposición sigue verificándose cuando cada uno de los triángulos equiláteros, tales como el $\overset{\triangle}{\mathbf{ABF}}$, se abata sobre $\overset{\triangle}{\mathbf{ABC}}$, en lugar de estar situado en el exterior del triángulo dado.

PROPOSICIÓN 13. Los centros de los triángulos equiláteros construidos, tanto exteriores como interiores, sobre los lados de un triángulo cualquiera, son los vértices de un triángulo equilátero.

En efecto: La proposición anterior nos ha mostrado que

$$\overline{\mathbf{AD}} = \overline{\mathbf{EB}} = \overline{\mathbf{FC}}$$

y como tenemos que

$$\widehat{\mathbf{MCL}} = \widehat{\mathbf{ACD}} = \widehat{\mathbf{C}} + \mathbf{60^o}$$

se verifica

$$\frac{\overline{\mathbf{MC}}}{\overline{\mathbf{AC}}} = \frac{\overline{\mathbf{CL}}}{\overline{\mathbf{CD}}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}$$

puesto que:

$$\frac{\frac{\overline{\mathbf{AC}}}{\mathbf{2}}}{\overline{\mathbf{MC}}} = \mathbf{\cos 30^o} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$$

En consecuencia, los triángulos $\overset{\triangle}{\mathbf{ADC}}$ y $\overset{\triangle}{\mathbf{MLC}}$ son semejantes, puesto que tienen un ángulo igual, comprendido entre dos lados proporcionales.

Lo mismo ocurre con los triángulos $\overset{\triangle}{\mathbf{ACF}}$ y $\overset{\triangle}{\mathbf{MAN}}$, y con los $\overset{\triangle}{\mathbf{CFB}}$ y $\overset{\triangle}{\mathbf{NBL}}$.

Por tanto se tiene

$$\frac{\overline{\mathbf{ML}}}{\overline{\mathbf{AD}}} = \frac{\overline{\mathbf{MN}}}{\overline{\mathbf{FC}}} = \frac{\overline{\mathbf{NL}}}{\overline{\mathbf{FC}}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}\,,$$

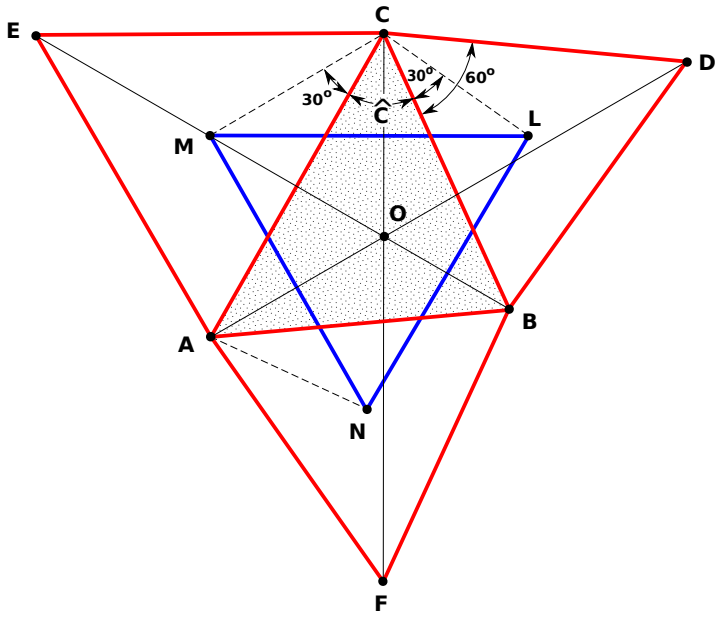
y como

$$\overline{\mathbf{AD}} = \overline{\mathbf{FC}}$$

resulta

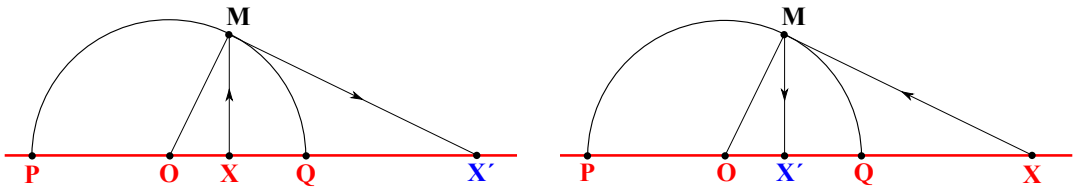
$$\overline{\mathbf{ML}} = \overline{\mathbf{MN}} = \overline{\mathbf{NL}}\,,$$

como queríamos demostrar.



1.3 Cuaternas armónicas e inversión

Otra manera de plantear la búsqueda de puntos armónicamente separados, **X** y **X′**, por los puntos **P** y **Q**, sería la siguiente: Sobre el segmento $\overline{\mathbf{PQ}}$, como diámetro, se dibuja una semicircunferencia; si el punto dado, **X**, es interior al segmento, se traza una perpendicular, $\overline{\mathbf{XM}}$, con lo que el punto **X′** estará sobre la tangente en **M**. Si el punto **X** fuese exterior, entonces se traza la tangente desde **X**, y el punto **X′** estará sobre la perpendicular, a $\overline{\mathbf{PQ}}$, desde el punto **M** de contacto.



El **Teorema del Cateto**, nos permite, así mismo escribir:

$$\overline{\mathbf{OM}}^2 = \overline{\mathbf{OP}}^2 = \overline{\mathbf{OX}} \cdot \overline{\mathbf{OX'}}$$

Esta sencilla igualdad, deducida de la construcción anterior, tendremos ocasión de volverla e encontrar, en la **Lección 2**, que es punto de partida en el establecimiento de la correspondencia que llamaremos **inversión**, de centro **O** y potencia $\mathbf{K} = \overline{\mathbf{OM}}^2$.

Lección 2.- LA INVERSIÓN EN EL PLANO

2.1 La inversión en el plano
2.2 Ejemplos

2.1 La inversión en el plano

Dado un plano y sobre él un punto fijo, **O**, podemos establecer una correspondencia entre el resto de los puntos del plano dado de la siguiente manera: A todo punto, **A**, le hacemos corresponder otro, $\mathbf{A'}$, situado sobre la recta $\overline{\mathbf{OA}}$, de forma que se verifique.

$$\overline{\mathbf{OA}} \cdot \overline{\mathbf{OA'}} = \mathbf{k}$$

siendo **k** una constante no nula. De **A** y $\mathbf{A'}$ diremos que son **puntos homólogos**. A una tal correspondencia le llamaremos **inversión de centro O** y **potencia de inversión k** (y en ocasiones **módulo de la inversión k**).

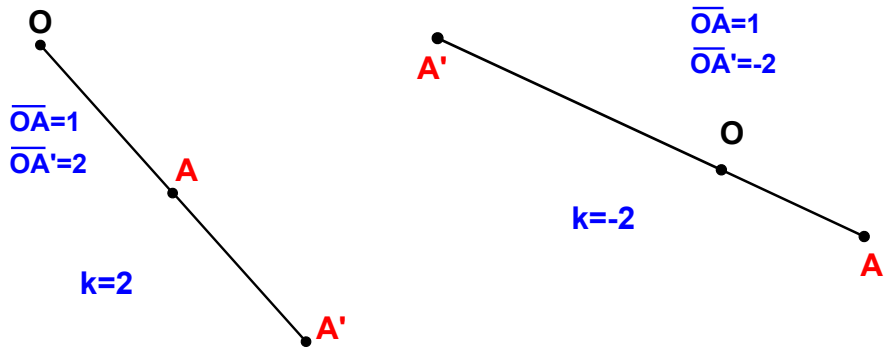
Así, toda inversión quedará definida dando el centro y la potencia, o bien el centro y un par de puntos homólogos, ya que éstos, además de estar alineados con el centro deberán verificar que el producto de distancias al mismo, con el signo que corresponda, es la potencia de inversión.

Ejemplo 1. Dado el centro, **O**, si la potencia vale **k=2**, el homólogo del punto **A**, es decir el $\mathbf{A'}$ verificará que:

$$\overline{\mathbf{OA}} \cdot \overline{\mathbf{OA'}} = \mathbf{2}$$

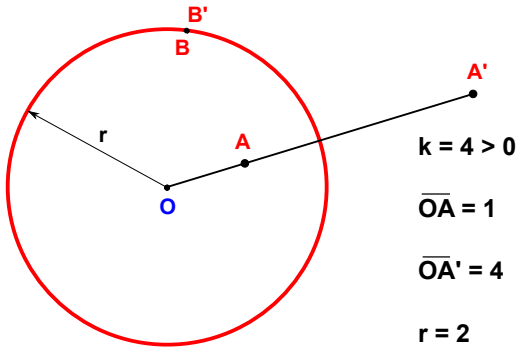
y si $\mathbf{k} = -\mathbf{2}$, la relación será

$$\overline{\mathbf{OA}} \cdot \overline{\mathbf{OA'}} = -\mathbf{2}$$

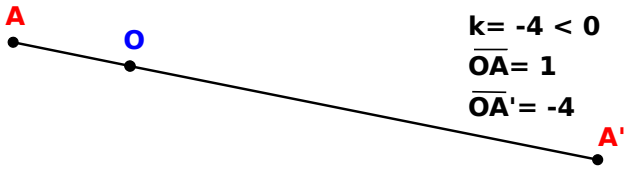


Si la potencia de inversión es positiva **(k>o)**, los pares de puntos homólogos estarán a un mismo lado del centro, y todos los puntos de la circunferencia de radio $\mathbf{r} = \sqrt{\mathbf{k}}$, serán **dobles**, es decir homólogos de sí

mismos en la inversión, por ser $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}$.



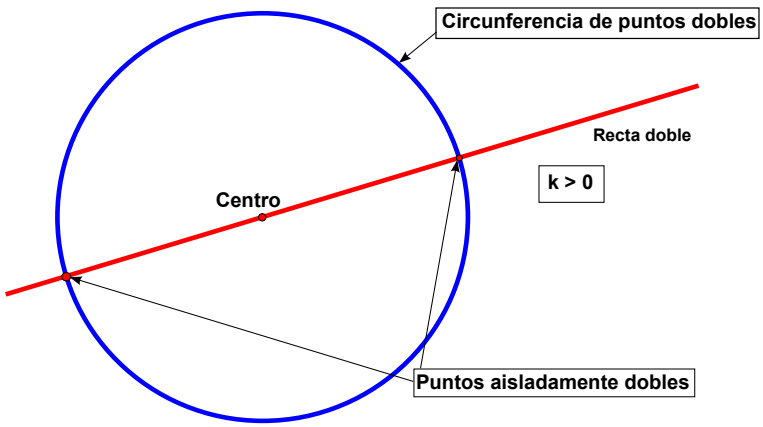
Por otra parte, si la potencia de inversión es negativa **(k<o)**, los pares de puntos homólogos estarán a distinto lado del centro, y no existirán puntos dobles.



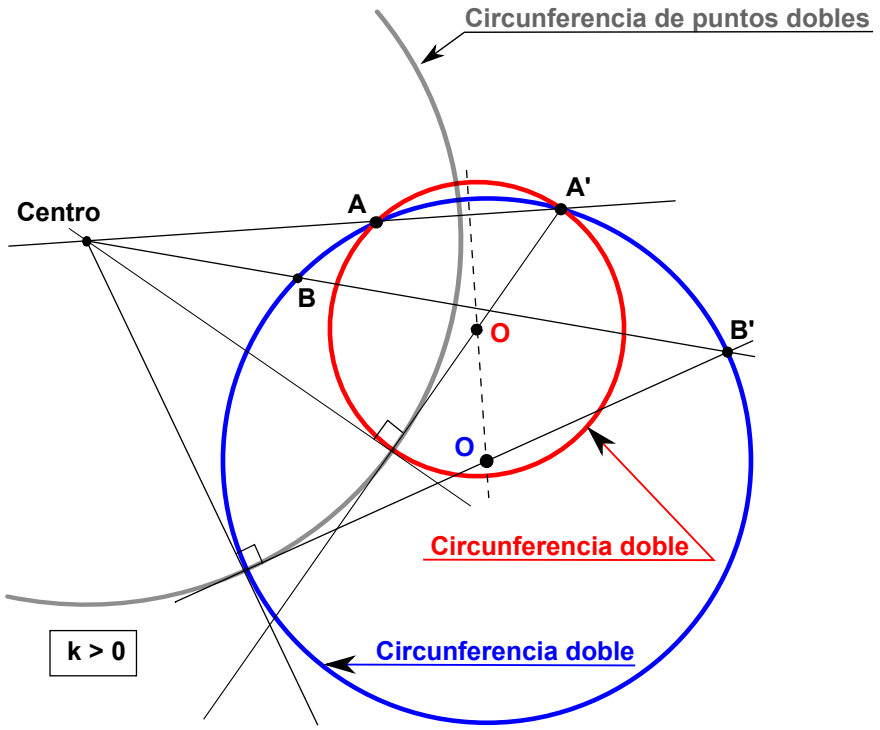
Por otra parte, la inversión es una **transformación involutiva**, significando esto que, si el punto **A** tiene por homólogo el $\mathbf{A}'$, entonces el $\mathbf{A}'$, considerado como de la primera figura, tiene por homólogo el **A**.

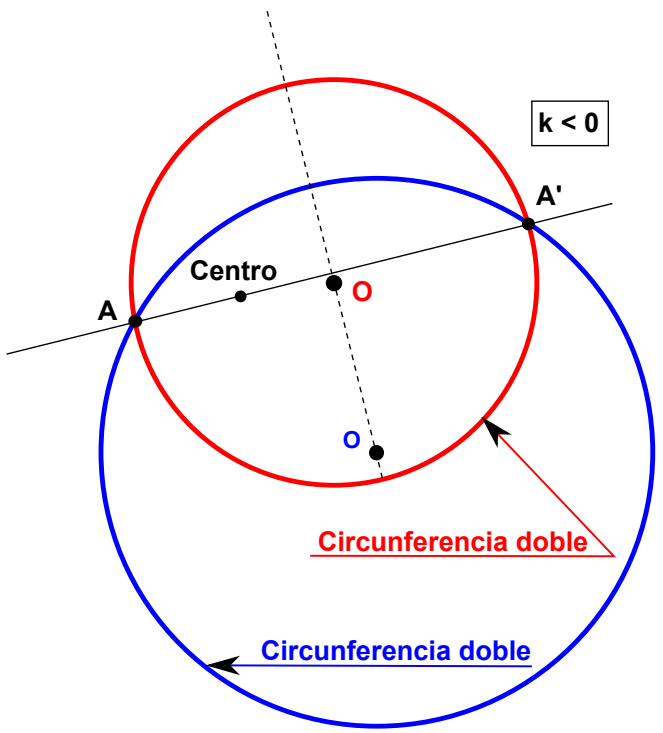
Tal como hemos visto más arriba, los puntos de la circunferencia de radio $\mathbf{r} = \sqrt{\mathbf{k}}$ cuando **k>o**, son dobles, y son los únicos; sin embargo, se puede hablar de rectas y circunferencias homólogas de sí mismas sin ser dobles aisladamente sus puntos. En particular, la inversa de toda recta que pasa por el centro es ella misma, pues todo punto de la recta tiene por homólogo otro punto de ella.

Ejemplo 2. Las rectas que pasan por el centro de inversión son dobles, y cuando la potencia es positiva son dobles los puntos de intersección de dichas rectas con la circunferencia de puntos dobles.

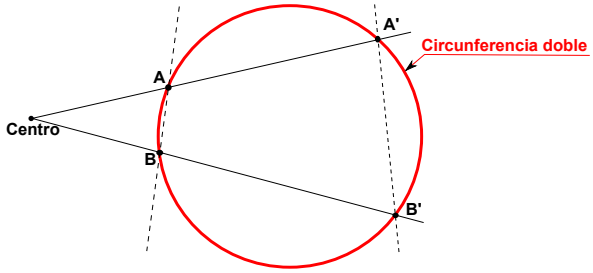


Ejemplo 3. Cualquiera que sea la potencia de la inversión, toda circunferencia que pasa por dos puntos homólogos, **A** y **A′**, es doble.

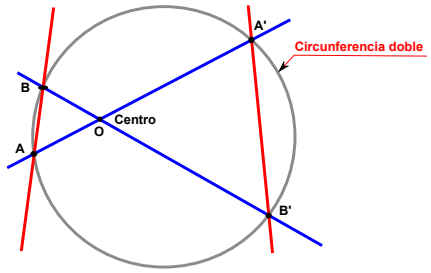




Ejemplo 4. El ejemplo anterior nos sugiere la siguiente propiedad: **Dos pares de puntos homólogos no alineados pertenecen a un circunferencia doble,**



así como la siguiente: **La recta que une dos puntos, A y B, no alineados con el centro, O, y la que une sus correspondientes homólogos, A′ y B′, son antiparalelas respecto de las rectas $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$.**

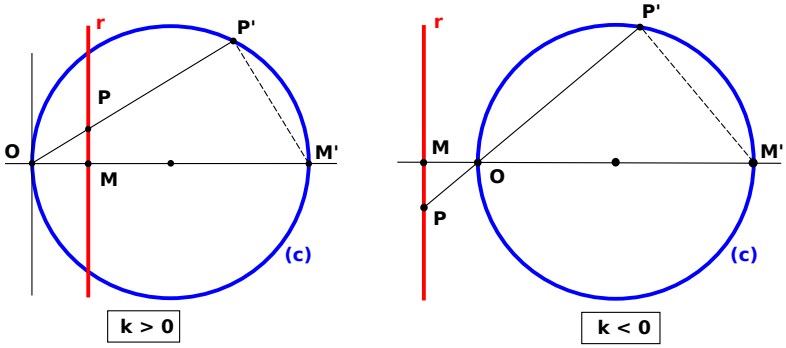


El ejemplo anterior nos permite establecer la siguiente regla: **Definida una inversión por el centro, O, y un par de puntos homólogos, A y A′, para hallar el homólogo, B′, de otro punto, B, basta con hallar la intersección de la recta $\overline{OB}$ con la circunferencia que pasa por los puntos A, A′ y B**.

La siguiente propiedad nos muestra muy claramente que, la correspondencia entre dos pares de puntos no alineados, **A**, **A′** y **B**, **B′**, no implica que sean homólogas las rectas $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$:

PROPOSICIÓN 1. La figura inversa de una recta, r, que no pasa por el centro de inversión, es una circunferencia, (c), que pasa por él. Y recíprocamente: **La figura inversa de una circunferencia, (c), que pasa por el centro de inversión es una recta que no pasa por él.**

En efecto: Sea **M** el pie de la perpendicular a la recta **r**, por el punto **O**, y **M′** su homólogo. Consideremos otro punto cualquiera, **P**, de la recta **r**, y sea **P′** su homólogo.

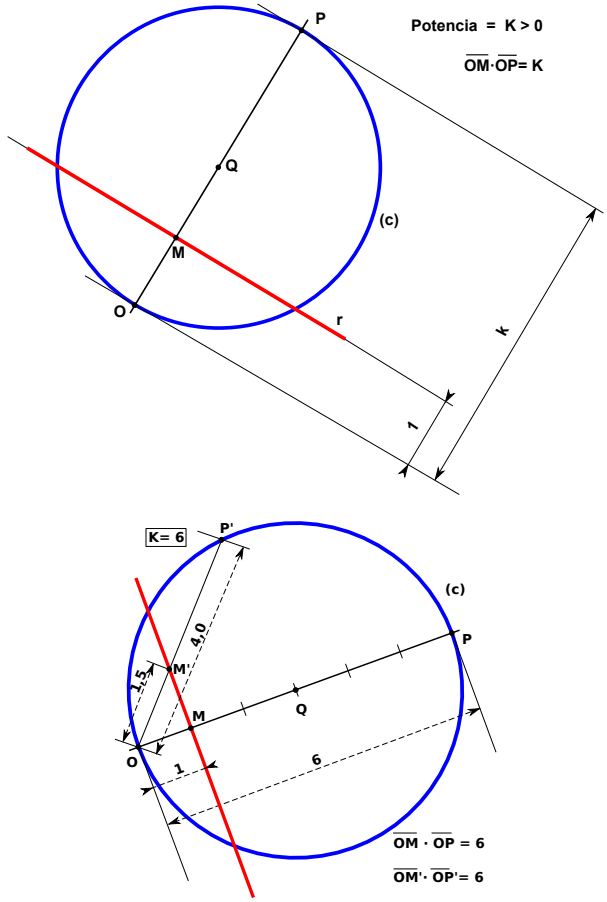


De acuerdo con lo que establecimos en el Ejemplo 4, las rectas $\overline{\mathbf{PM}}$ y $\overline{\mathbf{P'M'}}$ son antiparalelas respecto de las rectas $\overline{\mathbf{OP}}$ y $\overline{\mathbf{OM}}$, por ser recto el ángulo $\widehat{\mathbf{OMP}}$, también lo será el $\widehat{\mathbf{M'P'O}}$, lo que muestra que el punto $\mathbf{P'}$ está en la circunferencia de diámetro $\overline{\mathbf{OM'}}$.

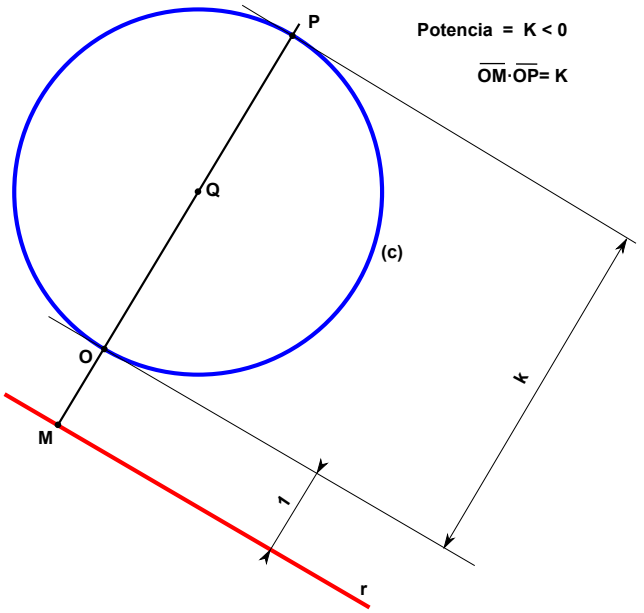
Y recíprocamente: Todo punto, $\mathbf{P'}$, de la circunferencia $(\mathbf{c})$, unido con el $\mathbf{M'}$ determina un ángulo recto $\widehat{\mathbf{OP'M'}}$. El antiparalelismo de las rectas $\overline{\mathbf{PM}}$ y $\overline{\mathbf{P'M'}}$, respecto de las rectas $\overline{\mathbf{OP}}$ y $\overline{\mathbf{OM}}$, prueba que el ángulo $\widehat{\mathbf{OMP}}$ es recto, luego que el punto $\mathbf{P}$ está en la perpendicular a la recta $\overline{\mathbf{OM}}$.

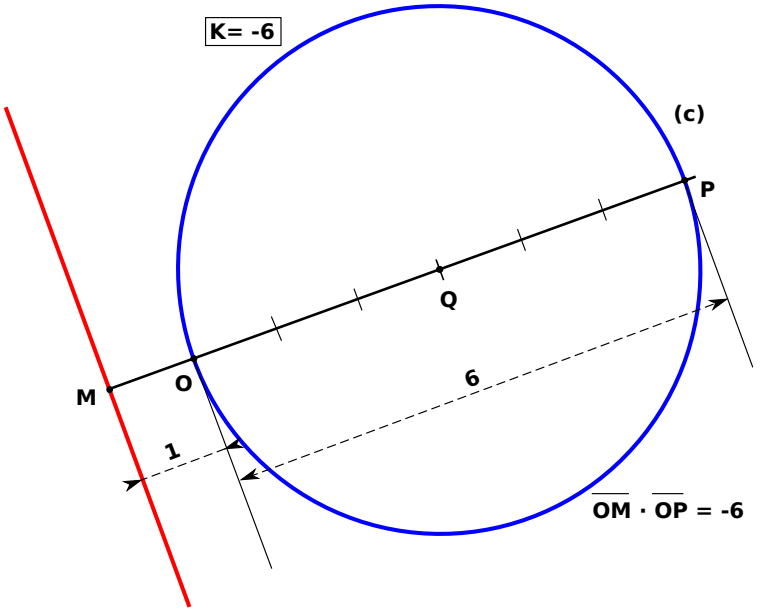
Apuntemos por último que, por ser el diámetro de $(\mathbf{c})$, que pasa por $\mathbf{O}$, perpendicular a $\mathbf{r}$, resulta que: **La tangente a la circunferencia en el centro de inversión es paralela a la recta homóloga de dicha circunferencia.**

Ejemplo 5. Trazar la circunferencia, $(\mathbf{c})$, inversa de la recta $\mathbf{r}$, en la inversión de centro $\mathbf{O}$, no situado sobre $\mathbf{r}$, y potencia $\mathbf{K}$.
Obtenemos $(\mathbf{c})$ de la siguiente manera: Por $\mathbf{O}$ trazamos la perpendicular a $\mathbf{r}$, y determinamos el punto $\mathbf{P}$ tal que $\overline{\mathbf{OP}} = \mathbf{K}$. Se determina luego el punto $\mathbf{Q}$, punto medio del segmento $\overline{\mathbf{OP}}$. La circunferencia de centro $\mathbf{Q}$, y radio $\overline{\mathbf{PQ}}$ es la solución, $(\mathbf{c})$



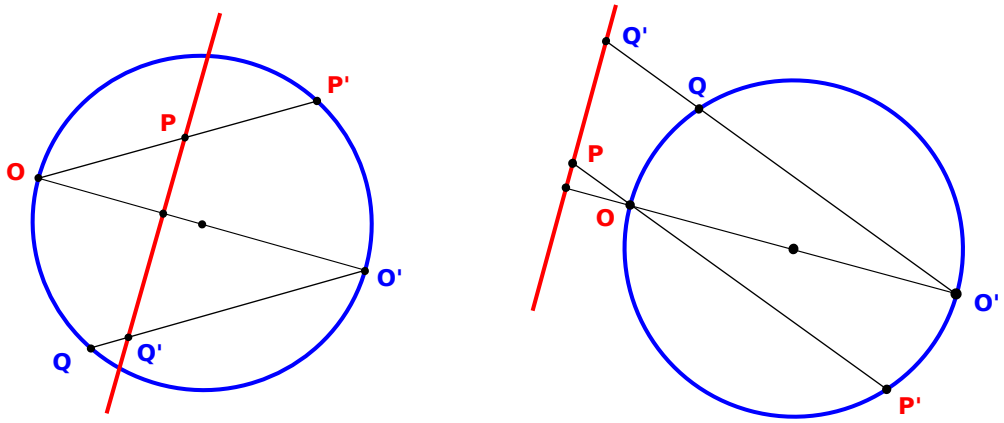
Si la potencia es negativa, el proceso es completamente análogo al del caso en que sea positiva:





A la vista de cómo se procede para determinar la circunferencia inversa de una recta, resulta evidente como se procedería para determinar la recta inversa de una circunferencia que pasa por el centro.

Ejemplo 6. Dada una circunferencia y una recta no tangentes, podemos considerarlas inversas una de otra en dos inversiones, cuyos centros, **O** y **O′** son los extremos del diámetro perpendicular a la recta.



Recapitulando; hasta ahora hemos establecido que:

- **La inversa de toda recta que pasa por el centro de inversión es ella misma.**
- **La inversa de toda recta que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia que pasa por dicho centro.**
- **La inversa de toda circunferencia que pasa por el centro de inversión es una recta que no pasa por dicho centro.**

PROPOSICIÓN 2. En todo triángulo, la circunferencia inscrita determina, sobre su perímetro, seis segmentos iguales dos a dos.
Si p representa el semi-perímetro, los tres segmentos distintos tienen por valores respectivos: $\mathbf{p-a}$, $\mathbf{p-b}$, $\mathbf{p-c}$.

En efecto: Consideremos, por ejemplo, $\overline{\mathbf{AL}}$. Podemos escribir

$$\overline{\mathbf{AL}}+\overline{\mathbf{AN}}=\overline{\mathbf{AB}}+\overline{\mathbf{BC}}+\overline{\mathbf{CA}}-(\overline{\mathbf{LB}}+\overline{\mathbf{BM}}+\overline{\mathbf{MC}}+\overline{\mathbf{CN}})$$

es decir

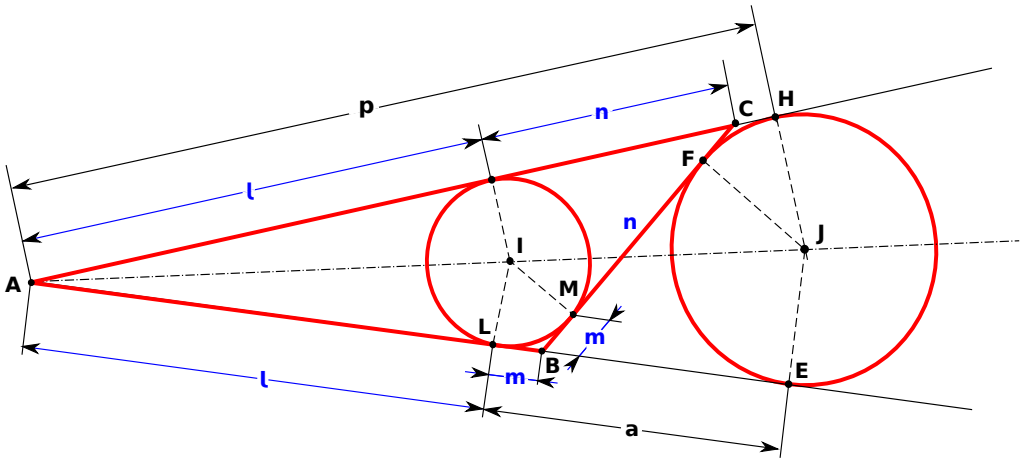
$$\mathbf{2}\cdot l=\mathbf{2}\cdot\mathbf{p}-(\mathbf{2}\cdot\mathbf{m}+\mathbf{2}\cdot\mathbf{n})$$

de donde resulta

$$l=\mathbf{p}-\mathbf{a}\ .$$

En la misma forma se establece:

$$\mathbf{m}=\mathbf{p}-\mathbf{b}\quad ;\quad \mathbf{n}=\mathbf{p}-\mathbf{c}\ .$$



Observamos que:

(I) $\overline{\mathbf{AE}} = \overline{\mathbf{AH}} = \mathbf{p}$

(II) $\overline{\mathbf{LE}} = \overline{\mathbf{NH}} = \mathbf{a}$

(III) $\overline{\mathbf{BM}} = \overline{\mathbf{FC}}$, puesto que $\overline{\mathbf{LE}} = \overline{\mathbf{BM}} + \overline{\mathbf{BF}}$ y $\overline{\mathbf{NH}} = \overline{\mathbf{CF}} + \overline{\mathbf{CM}}$

(IV) $\overline{\mathbf{FM}} = \mathbf{a} - \mathbf{2} \cdot \mathbf{m}$, es decir $\overline{\mathbf{FM}} = \mathbf{b} - \mathbf{c}$

Ejemplo 7. Determinar los segmentos comprendidos por los puntos de contacto de las circunferencias inscrita y exinscrita, sobre los lados del triángulo.

Basta ver que los tres puntos de contacto $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T_1'}$ y $\mathbf{T_1''}$, de la circunferencia inscrita en un triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{ABC}}$, dividen a sus lados en seis segmentos, cuya suma es el perímetro $\mathbf{2} \cdot \mathbf{p}$. Dado que son iguales los pares de segmentos concurrentes en cada vértice, tres de ellos sumarán el semi-perímetro $\mathbf{p}$.

Así, tenemos que

$$\mathbf{p} = \overline{\mathbf{BT_1''}} + \overline{\mathbf{AT_1''}} + \overline{\mathbf{CT_1}} = \mathbf{c} + \overline{\mathbf{CT_1}}$$

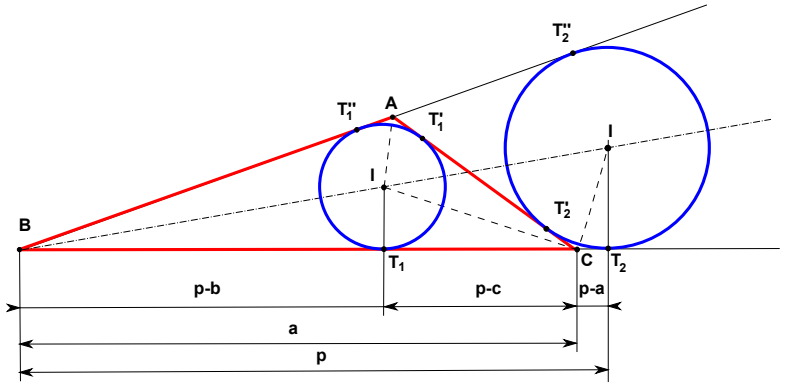
de donde

$$\overline{\mathbf{CT_1}} = \overline{\mathbf{CT_1'}} = \mathbf{p} - \mathbf{c}$$

y análogamente

$$\overline{\mathbf{AT_1''}} = \overline{\mathbf{AT'}} = \mathbf{p} - \mathbf{a}$$

$$\overline{\mathbf{BT_1}} = \overline{\mathbf{BT''}} = \mathbf{p} - \mathbf{b}$$



Considerando, ahora, la circunferencia exinscrita tangente al lado $\overline{\mathbf{AC}}$ en $\mathbf{T_2'}$, siendo $\mathbf{T_2}$ y $\mathbf{T_2''}$ los puntos de contacto con las rectas $\overline{\mathbf{AB}}$ y $\overline{\mathbf{BC}}$, se tendrá así mismo.

$$\overline{\mathbf{BT_2''}} = \overline{\mathbf{BT_2}}$$

es decir

$$\overline{\mathbf{BA}} + \overline{\mathbf{AT_2'}} = \overline{\mathbf{BC}} + \overline{\mathbf{CT_2'}}$$

y como la suma de ambos miembros es el perímetro, cada uno de ellos vale $\mathbf{p}$:

$$\overline{\mathbf{BT_2}} = \overline{\mathbf{BT_2''}} = \mathbf{p}$$

de donde

$$\overline{\mathbf{CT_2'}} = \overline{\mathbf{CT_2}} = \mathbf{p} - \mathbf{a}$$

y en forma análoga los demás.

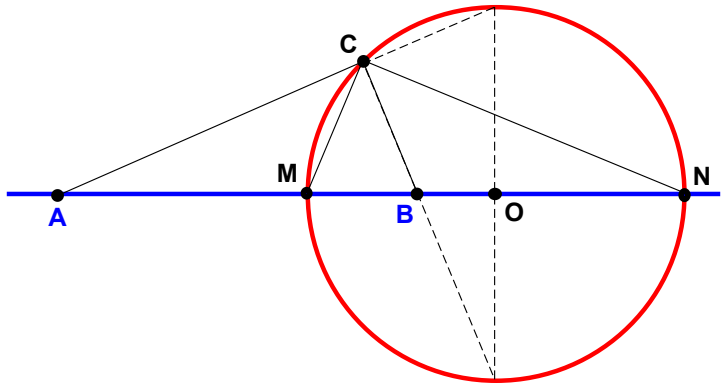
Observando en la figura, vemos que

$$\overline{\mathbf{T_1''T_2''}} = \overline{\mathbf{T_1T_2}} = \mathbf{p} - (\mathbf{p} - \mathbf{b}) = \mathbf{b}$$

lo que nos permite afirmar que: La distancia entre los puntos de contacto de la circunferencia inscrita y de una exinscrita con los lados del ángulo que comprende a ambas es igual al lado opuesto a dicho ángulo.

Ejemplo 8. Determinar el lugar geométrico de los puntos cuyas distancias a dos puntos dados, **A** y **B**, están en la relación constante $\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}$.
Sobre la recta determinada por los puntos **A** y **B** fijamos los puntos **M** y **N** para los que se verifica:

$$\frac{\overline{\mathbf{MA}}}{\overline{\mathbf{MB}}} = \frac{\overline{\mathbf{NA}}}{\overline{\mathbf{NB}}} = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}$$



Evidentemente, los puntos **M** y **N** pertenecen al lugar geométrico que nos interesa. Para cualquier otro punto, **C**, que pertenezca al lugar se tendrá:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{m}{n} ,$$

luego

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$$

Ahora bien, de acuerdo con la PROPOSICIÓN 4, del apartado 1.2 de la lección anterior, la bisectriz del ángulo $\overset{\triangle}{ACB}$, y la del ángulo suplementario $\widehat{BCD}$, cortarán a la recta determinada por los puntos **A** y **B**, en dos puntos cuya relación de distancias a los **A** y **B** será:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{m}{n} ,$$

es decir, las rectas $\overline{CM}$ y $\overline{CN}$ son precisamente esas bisectrices.

Dado que las bisectrices de dos ángulos suplementarios son perpendiculares, resultará que el ángulo $\widehat{MCN}$ es recto y, en consecuencia, el punto **C** pertenece a la circunferencia de diámetro $\overline{MN}$. Puesto que **C** es cualquier punto del lugar geométrico buscado, resultará ser éste la circunferencia de diámetro $\overline{MN}$ determinada.

PROPOSICIÓN 3. La figura inversa de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia.

En efecto: Consideremos una circunferencia, (**c**), con centro en el punto **C**, y que no pasa por el centro de inversión, **O**.

Tomemos un punto cualquiera, **M**, sobre la circunferencia, y sea M' el inverso del **M**.

El Punto M' estará situado sobre la recta $\overline{OM}$, y tendremos que

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$$

siendo **k** la potencia de inversión.

Se trata, ahora, de obtener el lugar geométrico del punto M' cuando el punto **M** se desplaza sobre la circunferencia (**c**).

Designemos por I' el inverso del punto **C**.

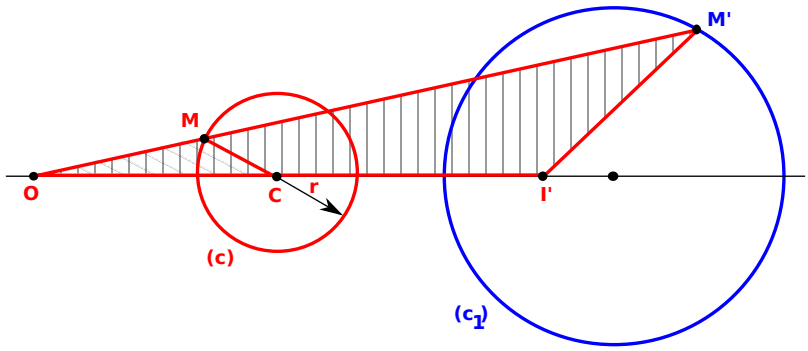
Los triángulos $\overset{\triangle}{\mathbf{OMC}}$ y $\overset{\triangle}{\mathbf{OI'M'}}$ son semejantes, luego se tendrá que:

$$\frac{\overline{\mathbf{OC}}}{\overline{\mathbf{MC}}} = \frac{\overline{\mathbf{OM'}}}{\overline{\mathbf{I'M'}}} \ ,$$

o bien, siendo **r** el radio de la circunferencia $(\mathbf{c})$,

$$\frac{\overline{\mathbf{MO'}}}{\overline{\mathbf{M'I'}}} = \frac{\overline{\mathbf{OC}}}{\overline{\mathbf{MC}}} = \frac{\overline{\mathbf{OC}}}{\mathbf{r}} = \textbf{constante}$$

Nos muestra esto que la razón de distancias del punto $\mathbf{M'}$ a los dos puntos fijos $\mathbf{O}$, $\mathbf{I'}$ es constante.



En consecuencia (ver ejemplo anterior) el lugar del punto $\mathbf{M'}$ es una circunferencia $(\mathbf{c_1})$ que tiene su centro sobre la recta $\overline{\mathbf{OI'}}$.

Observemos que si la circunferencia $(\mathbf{c})$, que no pasa por el centro de inversión, **O**, fuese tal que la tangente a la misma, desde dicho centro, contactase en el punto **M**, y éste resultase ser doble, es decir $\mathbf{M} = \mathbf{M'}$, o lo que es lo mismo.

$$\overline{\mathbf{OM}} \cdot \overline{\mathbf{OM'}} = \overline{\mathbf{OM}}^{\mathbf{2}} = \mathbf{k}$$

resultará que cualquier secante que pase por **O** encontrará a la circunferencia en dos puntos **N**, $\mathbf{N'}$, para los que se verificará

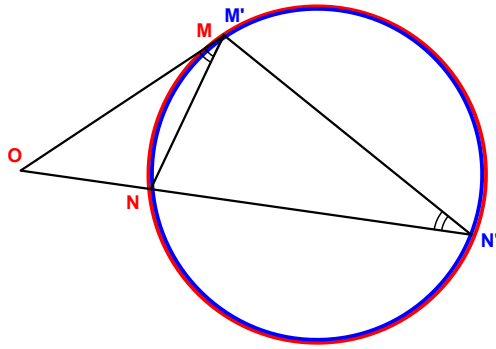
$$\overline{\mathbf{ON}} \cdot \overline{\mathbf{ON'}} = \mathbf{k} \ ,$$

y en consecuencia la figura inversa de la circunferencia $(\mathbf{c})$ será ella misma. La conclusión es inmediata viendo que las rectas $\overline{\mathbf{MN}}$ y $\overline{\mathbf{M'N'}}$ son antiparalelas respecto de las $\overline{\mathbf{OM}}$ y $\overline{\mathbf{ON'}}$, verificándose por tanto

$$\widehat{\mathbf{OMN}} = \widehat{\mathbf{ON'M'}}$$

lo que nos permite afirmar que los triángulos $\overset{\triangle}{\mathbf{OMN}}$ y $\overset{\triangle}{\mathbf{ON'M'}}$ son semejantes, y dado que $\mathbf{M} = \mathbf{M'}$, resulta la igualdad:

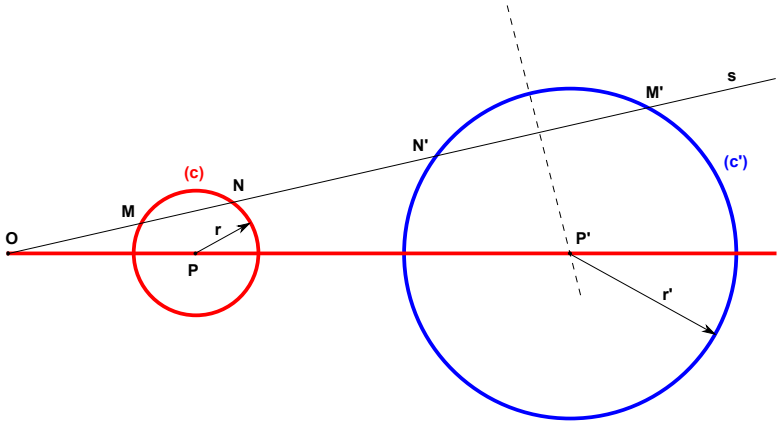
$$\overline{\mathbf{OM}}^{\mathbf{2}} = \overline{\mathbf{ON}} \cdot \overline{\mathbf{ON'}} = \mathbf{k} \ .$$



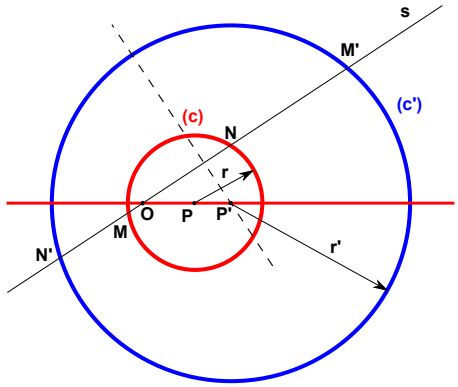
En la **Lección 19** tendremos ocasión de comprobar que este caso particular responde a que la potencia de inversión, de la circunferencia que estamos estudiando, coincide con lo que llamamos **potencia del punto O respecto de la circunferencia** $(\mathbf{c})$**.**

Ejemplo 9. Dada la circunferencia $(\mathbf{c})$, de centro $\mathbf{P}$ y radio $\mathbf{r}$, determinar su inversa, $(\mathbf{c}')$, en la inversión de centro $\mathbf{O}$, y potencia $\mathbf{k}$.

El procedimiento consiste en trazar una recta, cualquiera, que corte a $(\mathbf{c})$ en los puntos $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$, de los cuales se buscan sus homólogos, $\mathbf{M}'$ y $\mathbf{N}'$; determinados éstos, se dibuja la mediatriz del segmento $\overline{\mathbf{M}'\mathbf{N}'}$, que cortará a la recta $\overline{\mathbf{OP}}$ en el punto $\mathbf{P}'$, centro de la inversa buscada, cuyo radio, $\mathbf{r}'$, será: $\mathbf{r} = \overline{\mathbf{P}'\mathbf{M}'} = \overline{\mathbf{P}'\mathbf{N}'}$.



En el caso de que el centro de inversión fuese interior a la circunferencia, el proceso es completamente análogo al caso en que fuese exterior.

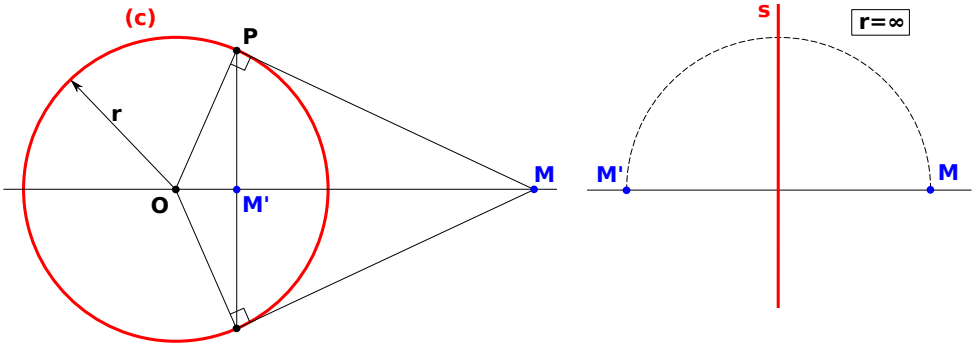


Interpretación de la inversión como **simetría con respecto a una circunferencia.** Veamos en que consiste:

Consideremos un circunferencia, $(\mathbf{c})$, con centro en el punto **O**, y radio **r**, y sea **M** un punto arbitrario del plano.
Si el punto **M** no coincide con el **O**, siempre es posible determinar, de manera unívoca, un nuevo $\mathbf{M'}$, situado en la semi-recta $\overline{\mathbf{OM}}$, que cumpla la condición

$$\overline{\mathbf{OM'}} \cdot \overline{\mathbf{OM}} = \mathbf{r^2}$$

Al punto $\mathbf{M'}$ se le puede llamar **imagen del punto M** en la **inversión** con respecto a la circunferencia $(\mathbf{c})$, o mas sencillamente **inversión del punto M**. (Convendremos, además, en llamar al punto $\mathbf{M'}$ inverso del punto **M** con respecto a una recta, **s**, si $\mathbf{M'}$ es simétrico del punto **M** con respecto a esta recta).

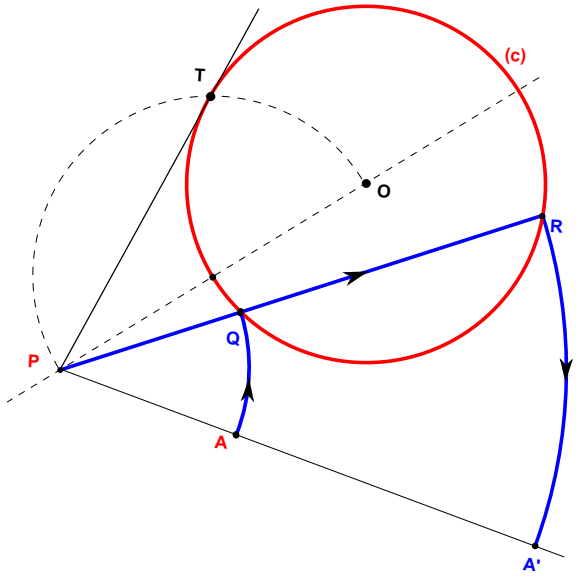


De esta interpretación haremos uso en el apartado siguiente.
(Observamos que la **condición**, que figura más arriba, no es más que una aplicación del **Teorema del Cateto**, en el triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{OPM}}$, en el que $\overline{\mathbf{OP}} = \mathbf{r}$).

2.2 Ejemplos

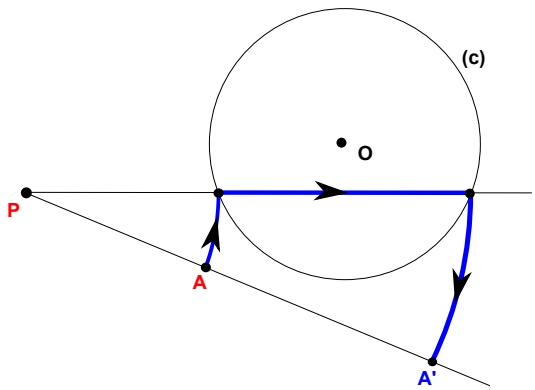
Cuando se trata de resolver un problema por inversión, tomando como polo un punto de la figura dada, su potencia la determinamos nosotros (salvo que nos la imponga el enunciado, lo cual no es lo normal). Si en el planteamiento aparece, al menos, una circunferencia, resulta muy cómodo considerar que la tal potencia coincide con la "potencia del punto respecto de la circunferencia" (véase su definición en la **Lección 19**), con lo cual ésta se transformará en sí misma. Otra alternativa sería la de introducir una circunferencia auxiliar, que fuese la que nos determine la potencia de la inversión, en las mismas condiciones que antes, considerando la inversión como simetría respecto a una circunferencia, como vimos al final del apartado anterior.
Los ejemplos que siguen pueden ser una buena guía para la comprensión de lo que estamos comentando.

Ejemplo 1. Dado un punto **P**, una circunferencia (**c**), y otro punto **A**, exteriores a (**c**), tanto **P** como **A**, se trata de determinar el homólogo del punto **A** en la inversión de centro **P** y potencia la del punto **P** respecto de la circunferencia (**c**).



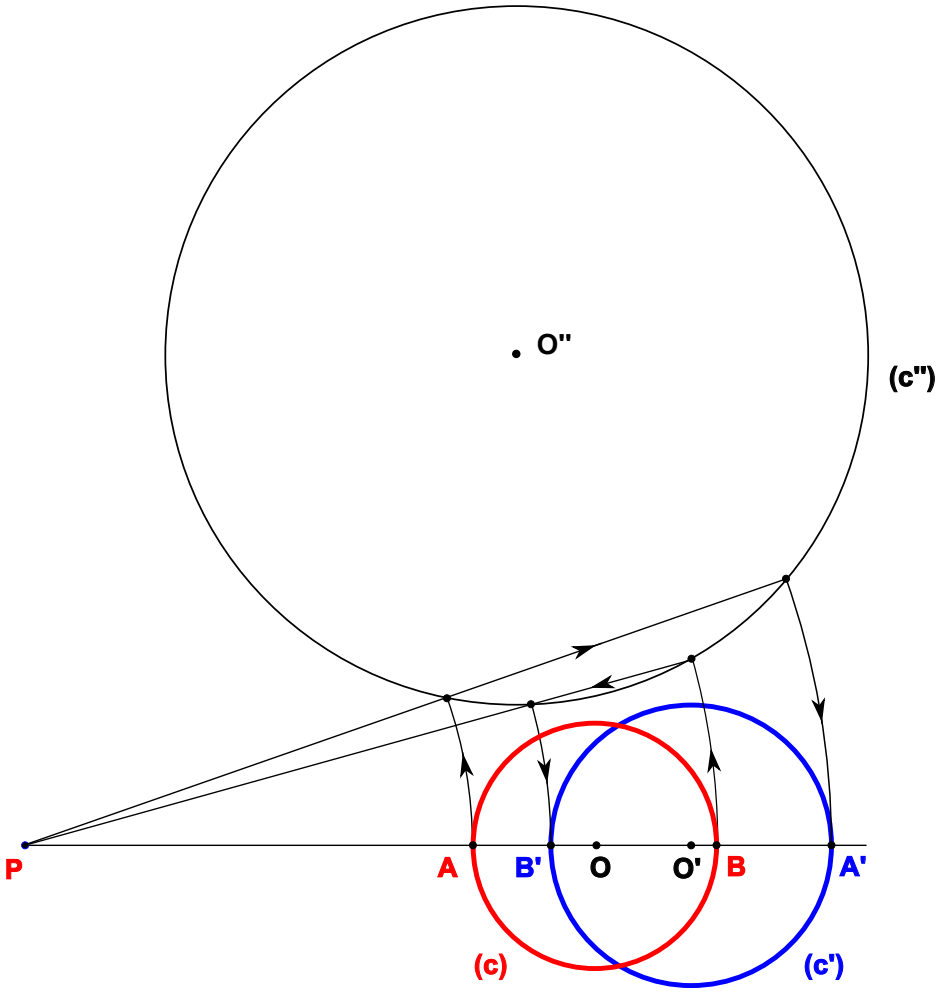
El proceso resulta tan sencillo como trazar con centro en **P** y radio $\overline{\mathbf{PA}}$ un arco que corte a **(c)**, en el punto **Q**, prolongar el segmento $\overline{\mathbf{PQ}}$ hasta que corte a (**c**) en el punto **R**, y por último trazar, con centro en **P** y radio el segmento $\overline{\mathbf{PR}}$, un arco que corte a la recta $\overline{\mathbf{PA}}$, en $\mathbf{A}'$. $\mathbf{A}'$ **es el homólogo del punto dado A**.

Ejemplo 2. Con independencia de las figuras que aparezcan en un determinado problema, si lo que tenemos es un punto **P**, que queremos que actúe como centro de la inversión, y pretendemos determinar el homólogo de otro punto **A**, lo primero que tenemos que fijar es la potencia de la inversión, que podemos establecer trazando una circunferencia auxiliar cualquiera (**c**), con la que repetir lo establecido en el ejemplo anterior. La potencia de la inversión que nos determina, resulta, evidentemente, la potencia del punto **P** respecto de (**c**). Variar la circunferencia (**c**) a otra, lo que hará es cambiarnos la potencia de la inversión (Observemos que situación y radio de (**c**) queda sometido a nuestro mejor entender)



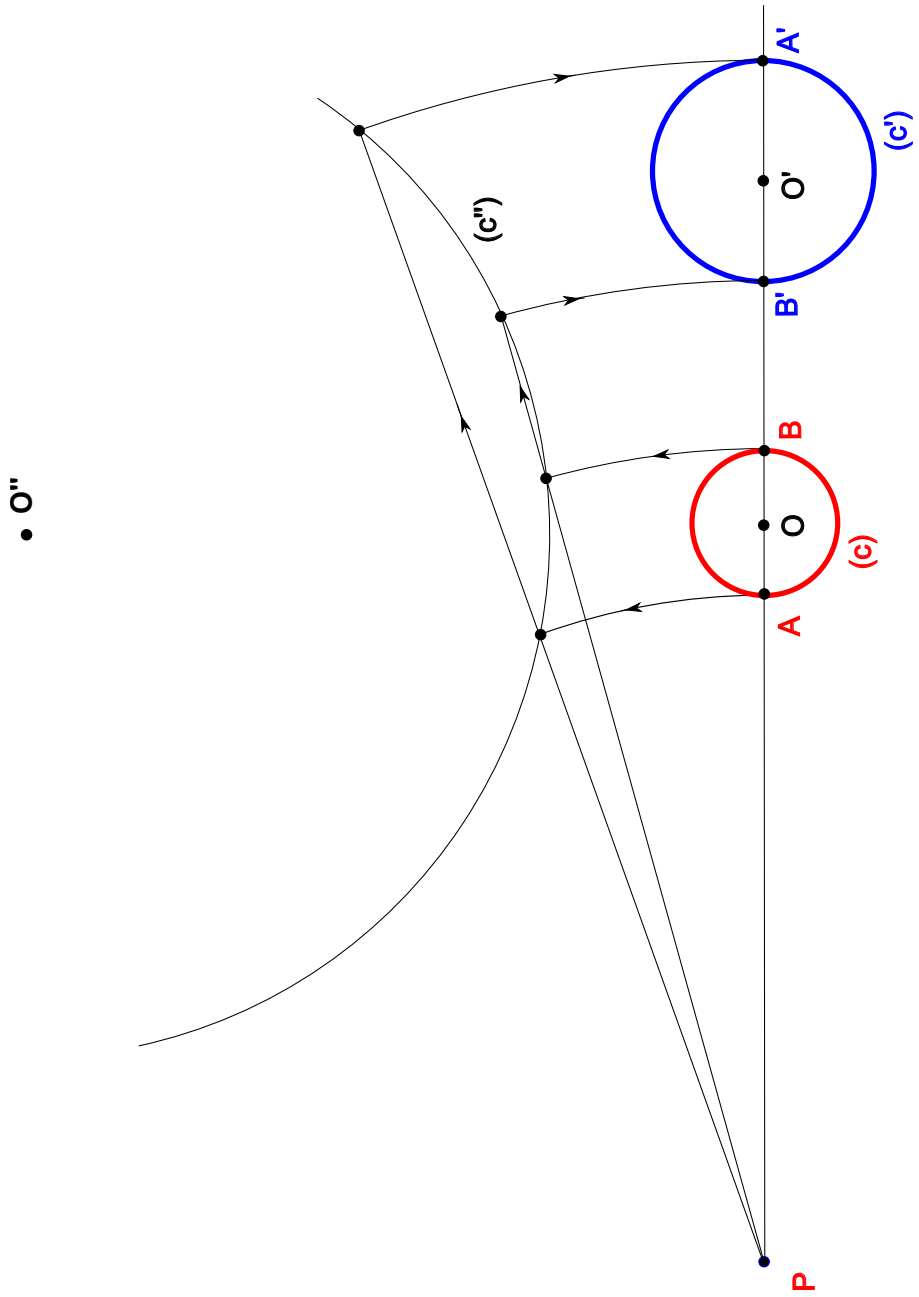
Ejemplo 3. Dada una circunferencia $(\mathbf{c})$, y un punto exterior **P**, determinar su inversa $(\mathbf{c}')$, tomando como centro **P**, y potencia de inversión la dada por una circunferencia auxiliar $(\mathbf{c}'')$.

Siguiendo el procedimiento de los ejemplos anteriores, lo que hacemos, una vez fijada $(\mathbf{c}'')$ es buscar los homólogos de los puntos **A**, **B**, que nos determinarán $(\mathbf{c}')$.

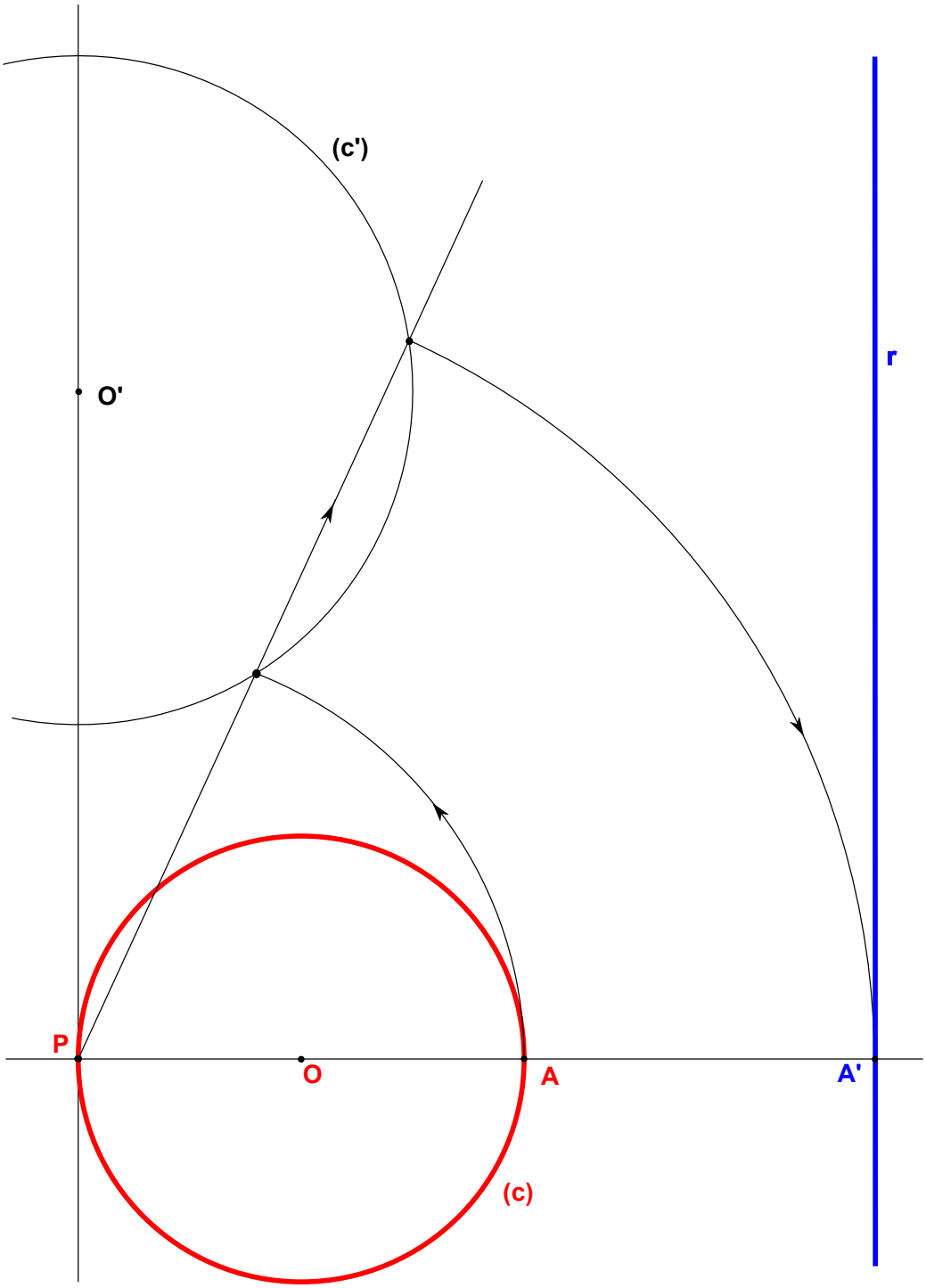


Evidentemente considerar otra circunferencia auxiliar nos daría otro resultado, pues lo que habríamos hecho es cambiar la potencia de la inversión.

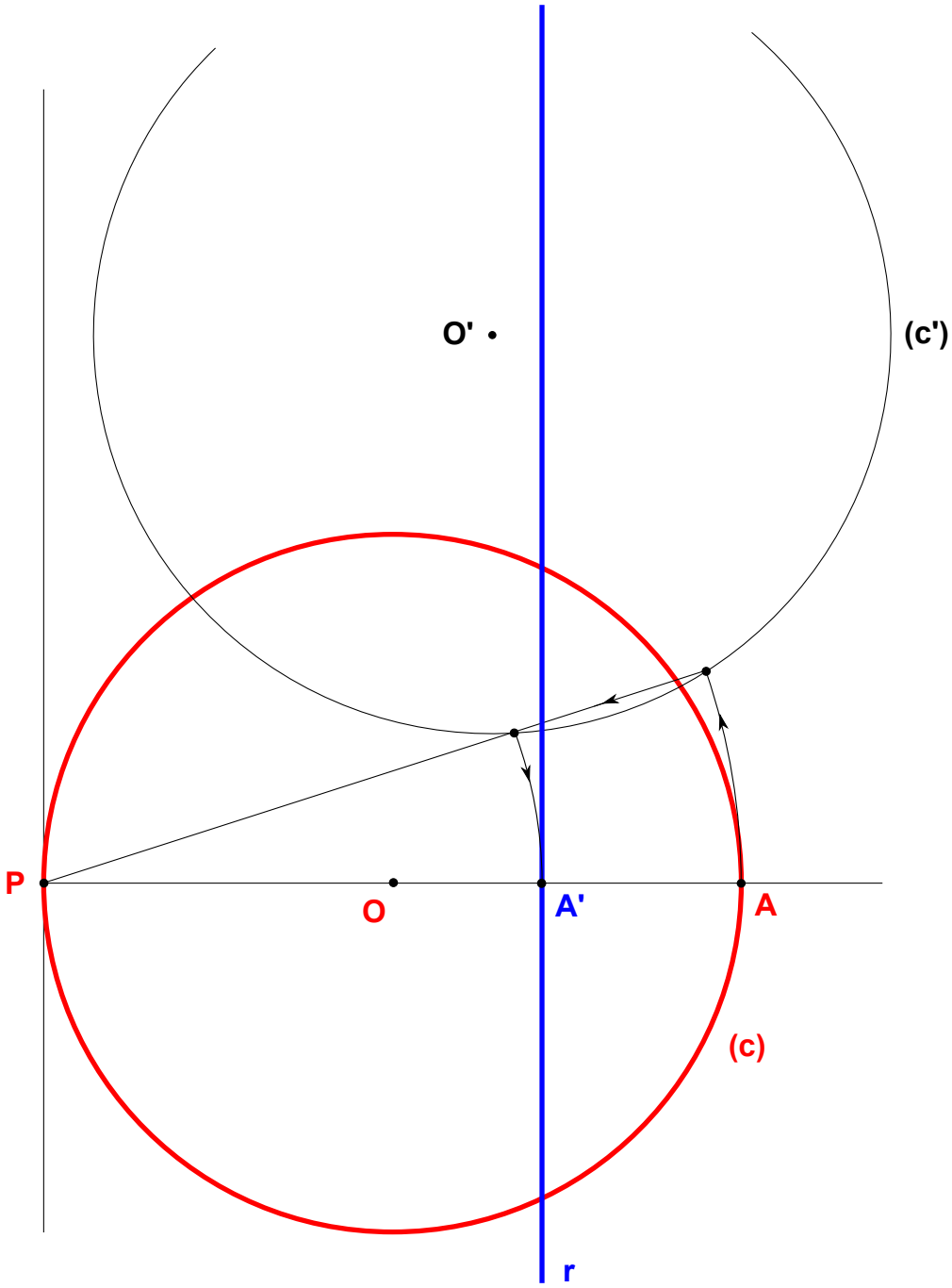
La siguiente construcción responde al mismo enunciado, nada más que con otros datos.



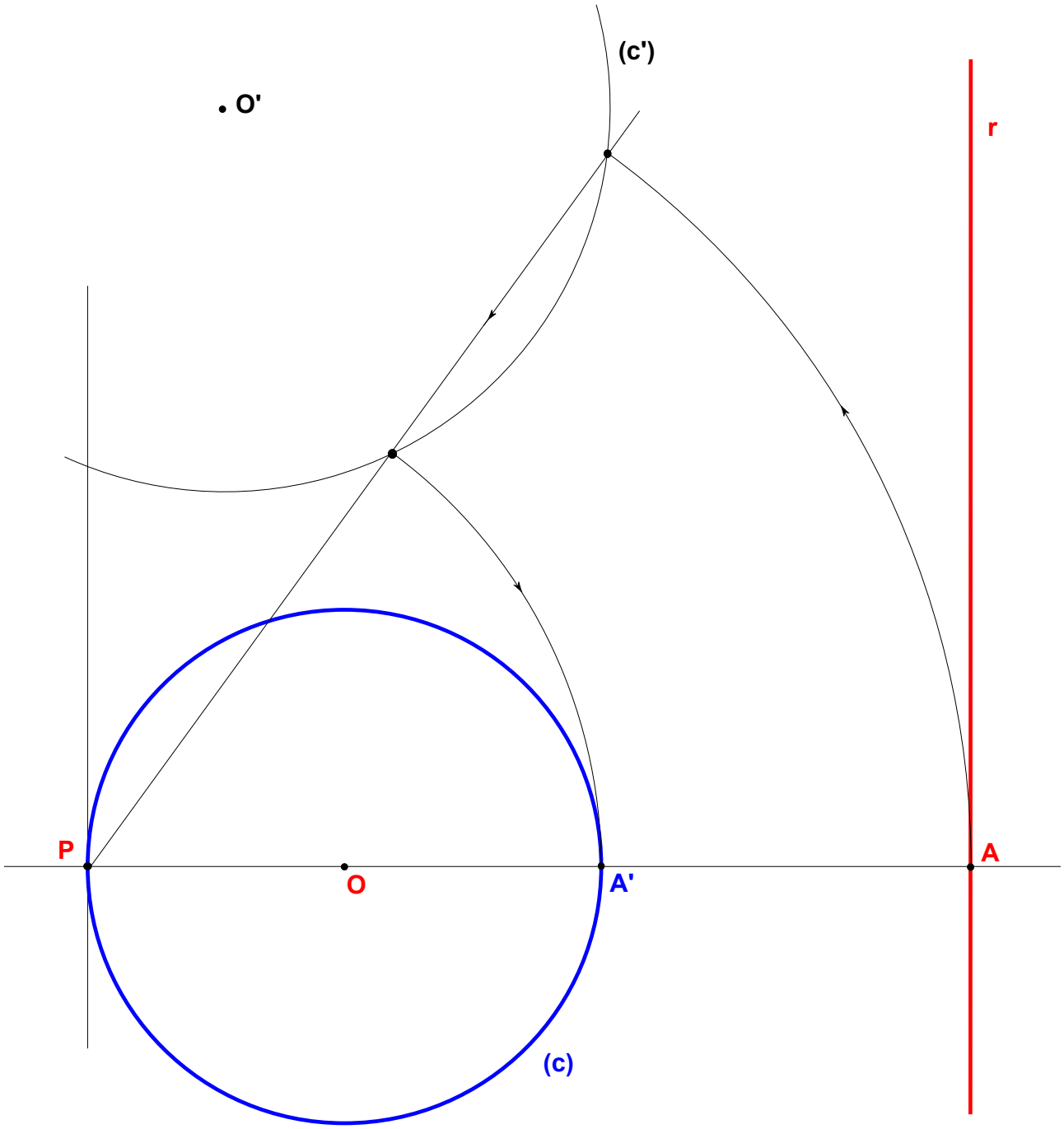
Ejemplo 4. Trazar la inversa de una circunferencia $(\mathbf{c})$, por la inversión de centro el punto **P** y potencia la determinada por la circunferencia auxiliar $(\mathbf{c}')$. (La inversa buscada será la recta **r**)



La siguiente construcción responde al mismo enunciado, nada más que con otros datos.



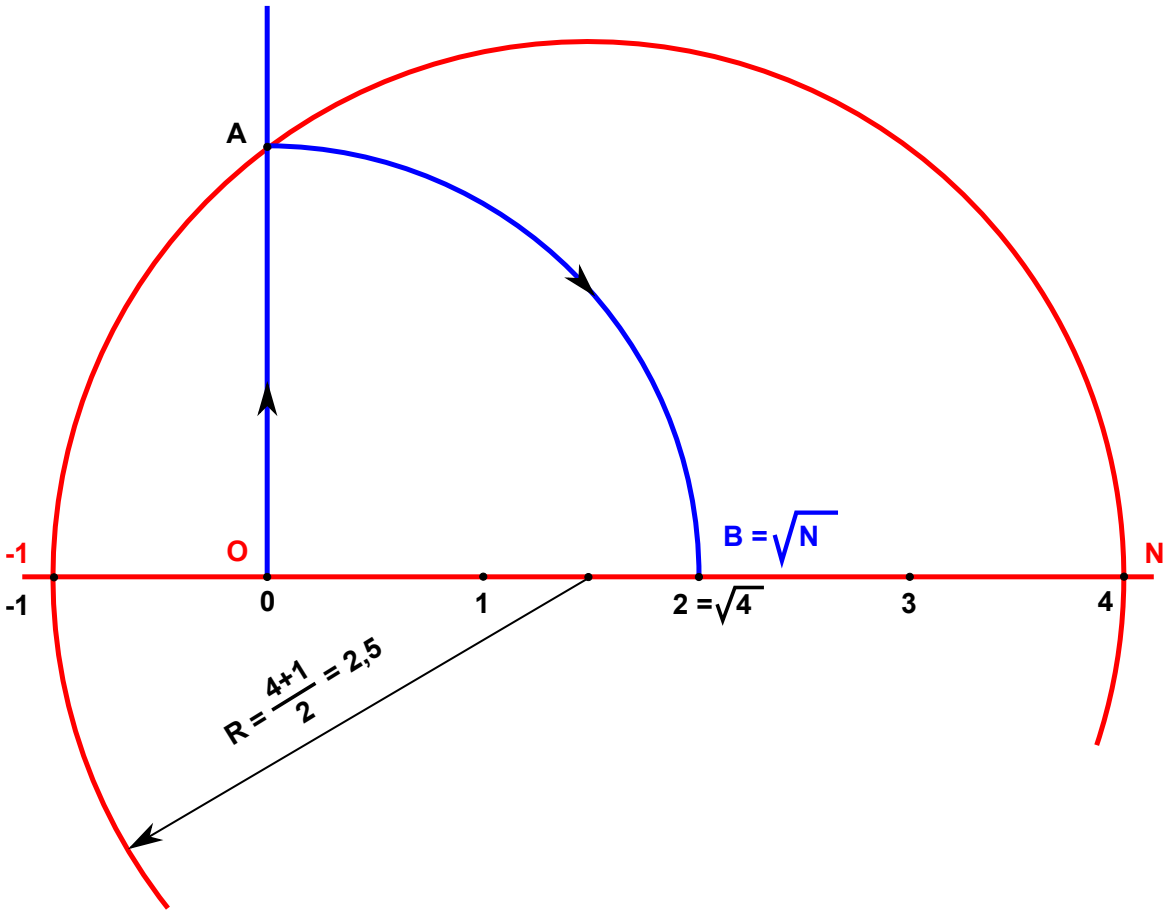
Ejemplo 5. Trazar la inversa de una recta **r**, por la inversión de centro el punto **P** y potencia la determinada por la circunferencia auxiliar $(\mathbf{c}')$. (La inversa buscada será la circunferencia $(\mathbf{c})$.)



Obsérvese la estrecha relación con el problema planteado en el ejemplo anterior.

En los ejemplos anteriores hemos estado manejando la "circunferencia auxiliar" como la que nos define la potencia de la inversión. Tal vez se nos puede ocurrir preguntarnos lo siguiente: Dada la potencia de inversión como un dato, ¿cómo podemos determinar la circunferencia auxiliar que nos proporcione dicha potencia? La respuesta es sencilla, pero precisa de dos pasos:

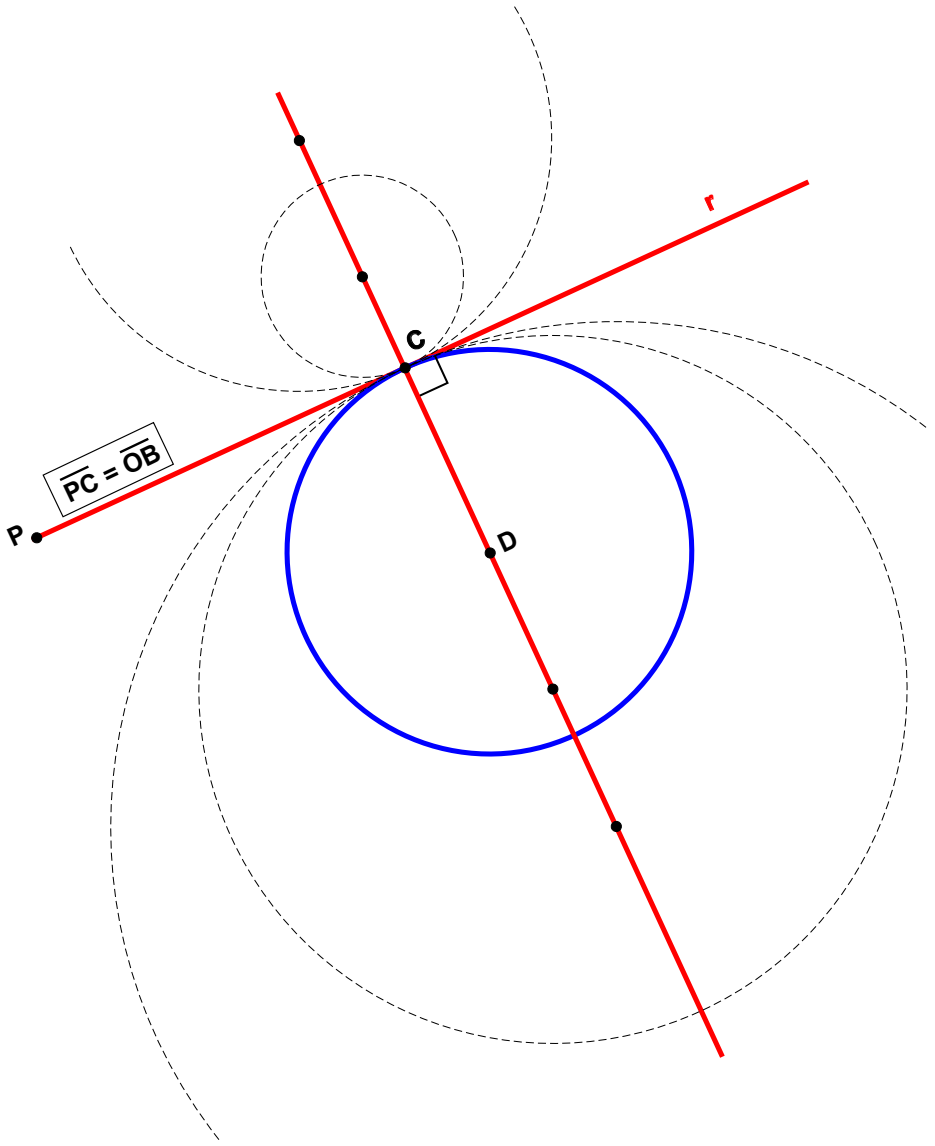
1º.- Si la potencia de la inversión vale **N**, extraeremos su raíz cuadrada como sigue. Sobre un eje graduado marcaremos los valores $+\mathbf{N}$ y $-\mathbf{1}$, trazando a continuación la circunferencia de radio $\frac{\mathbf{N+1}}{\mathbf{2}}$, y centro en ese eje; luego levantamos la perpendicular al mismo en el punto **O**, que cortará a la circunferencia en el punto **A**, punto que abatiremos sobre el eje, con el radio $\overline{\mathbf{OA}}$. El punto abatido nos dará $\mathbf{B} = \sqrt{\mathbf{N}}$.



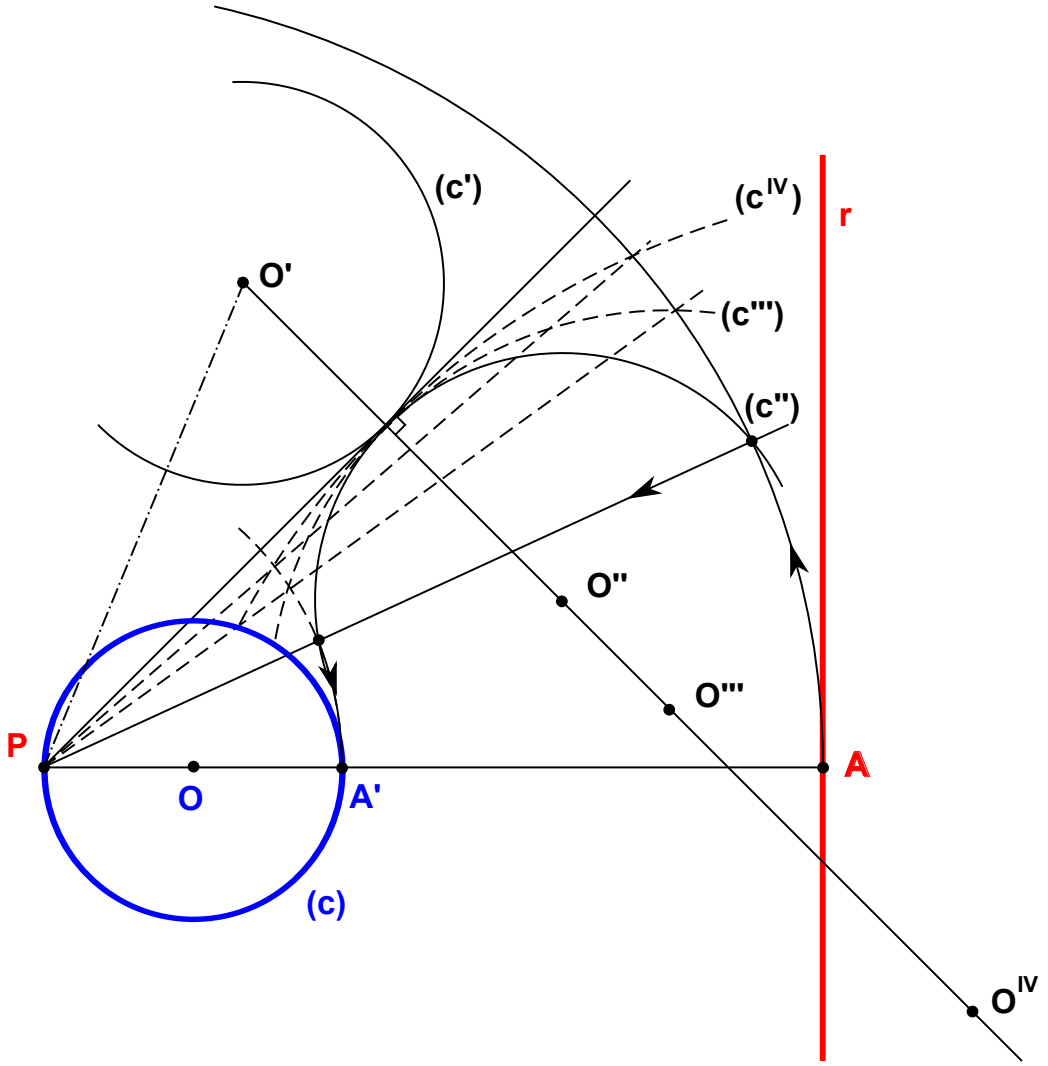
En esta representación hemos supuesto: $\mathbf{N = 4}$ ($\sqrt{\mathbf{4}} = \mathbf{2}$)

2º.- Una vez hayamos determinado el punto **B**, y sobre una recta, **r**, que pasa por el centro de la inversión **P**, marcamos el punto **C**, $\overline{\mathbf{PC}} = \overline{\mathbf{OB}}$, y levantamos su perpendicular. Si desde cualquier punto de esa perpendicular, **D**, trazamos la circunferencia de radio $\overline{\mathbf{DC}}$, ésta será la "circunferencia auxiliar" buscada.

Observemos que dada la arbitrariedad de **r** y **D**, el número de circunferencias auxiliares es infinito, lo que nos permitirá elegir la más conveniente para resolver el problema en el que estemos trabajando.



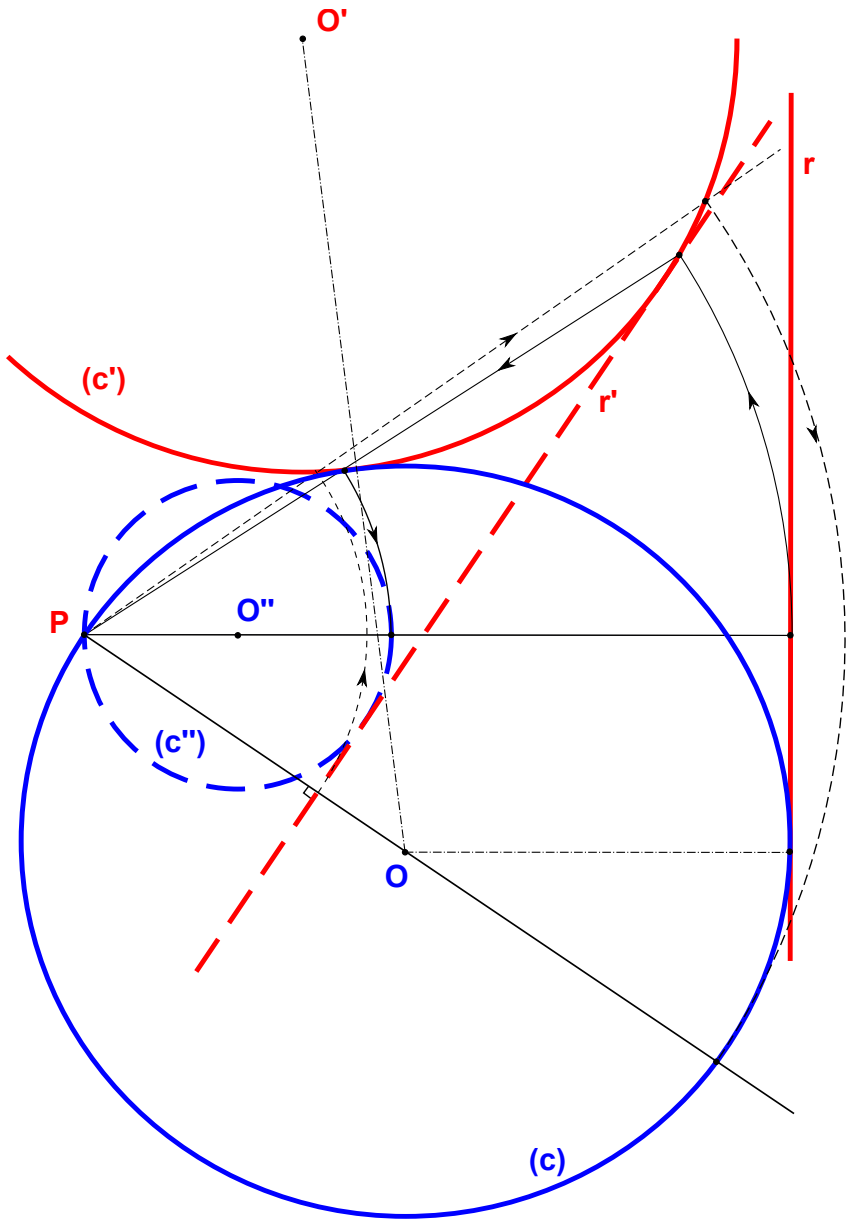
Ejemplo 6. Trazar la inversa de una recta **r**, por la inversión de centro el punto **P** y potencia la determinada por la circunferencia auxiliar $(\mathbf{c}')$. (La inversa buscada será la circunferencia $(\mathbf{c})$).



Observemos que la circunferencia auxiliar $(\mathbf{c}')$ no nos permite la construcción de la inversa de **r** tal como hacíamos en el ejemplo anterior, pues el arco no corta a $(\mathbf{c}')$, lo que nos obliga a determinar otra circunferencia auxiliar que si cumpla esa condición; cualquiera de las circunferencias $(\mathbf{c}'')$,$(\mathbf{c}''')$, $(\mathbf{c}^{\mathbf{IV}})$,... cumple con lo establecido.

Ejemplo 7. Trazar una circunferencia $(\mathbf{c})$ tangente a una recta dada $\mathbf{r}$, a una circunferencia también dada $(\mathbf{c}')$, y que pase para por un $\mathbf{P}$, no situado en $\mathbf{r}$ ni en $(\mathbf{c}')$.

Tomamos como circunferencia auxiliar (que nos determina la potencia de la inversión) la circunferencia dada, con lo cual en la inversión, de centro $\mathbf{P}$, queda invariable, transformándose $\mathbf{r}$ en $(\mathbf{c}'')$. Trazamos luego la tangente a las circunferencias $(\mathbf{c}')$ y $(\mathbf{c}'')$, es decir la recta $\mathbf{r}'$.



La inversión, de centro $\mathbf{P}$ y potencia la establecida nos transforma $\mathbf{r}'$ en la circunferencia $(\mathbf{c})$, solución del problema.

Ejemplo 8. Dadas dos circunferencias, $(\mathbf{c_1})$ y $(\mathbf{c_2})$, y un punto **P**, exterior a ambas, trazar la circunferencia $(\mathbf{c})$ tangente a ambas y que pase por el punto dado.

Podemos transformar la figura por inversión, tomando como centro el punto **P**, y por potencia la potencia de **P** respecto de $(\mathbf{c_1})$, con lo que esta circunferencia se transforma en sí misma, y la $(\mathbf{c_2})$ en la $(\mathbf{c_2'})$.

La circunferencia que nos interesa, $(\mathbf{c})$, se habrá transformado en una recta tangente a las circunferencias $(\mathbf{c_1})$ y $(\mathbf{c_2'})$; sea la **t**.

Trazada una tangente común a $(\mathbf{c_1})$ y $(\mathbf{c_2'})$, si $\mathbf{M_1'}$ y $\mathbf{M_2'}$, designan los puntos de contacto de esa tangente, la circunferencia buscada, $(\mathbf{c})$, deberá pasar por el punto **P** y por los inversos $\mathbf{M_1}$ y $\mathbf{M_2}$, de los puntos $\mathbf{M_1'}$ y $\mathbf{M_2'}$, como se muestra en la siguiente **Figura 1**.

En la siguiente figura (Figura 2), se sigue un procedimiento más rutinario, que evidentemente conduce al mismo resultado. En éste nos hemos visto forzados a considerar una circunferencia auxiliar, $(\mathbf{c_3})$, con la misma potencia que la $(\mathbf{c_1})$ respecto del punto **P**.

Tal como está planteado el problema, al existir cuatro tangentes posibles, existirán cuatro soluciones, de las que sólo hemos representado una.

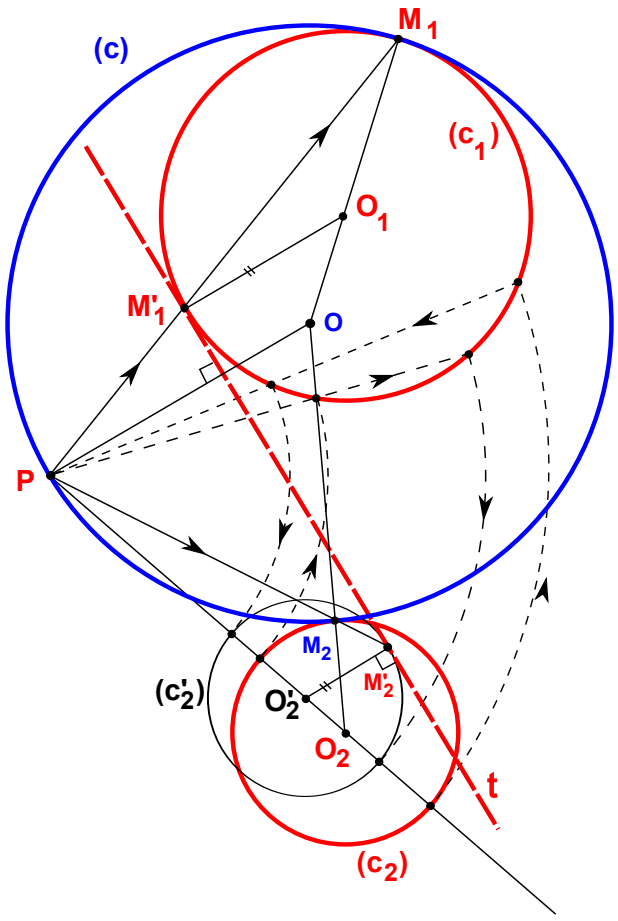


Figura 1.

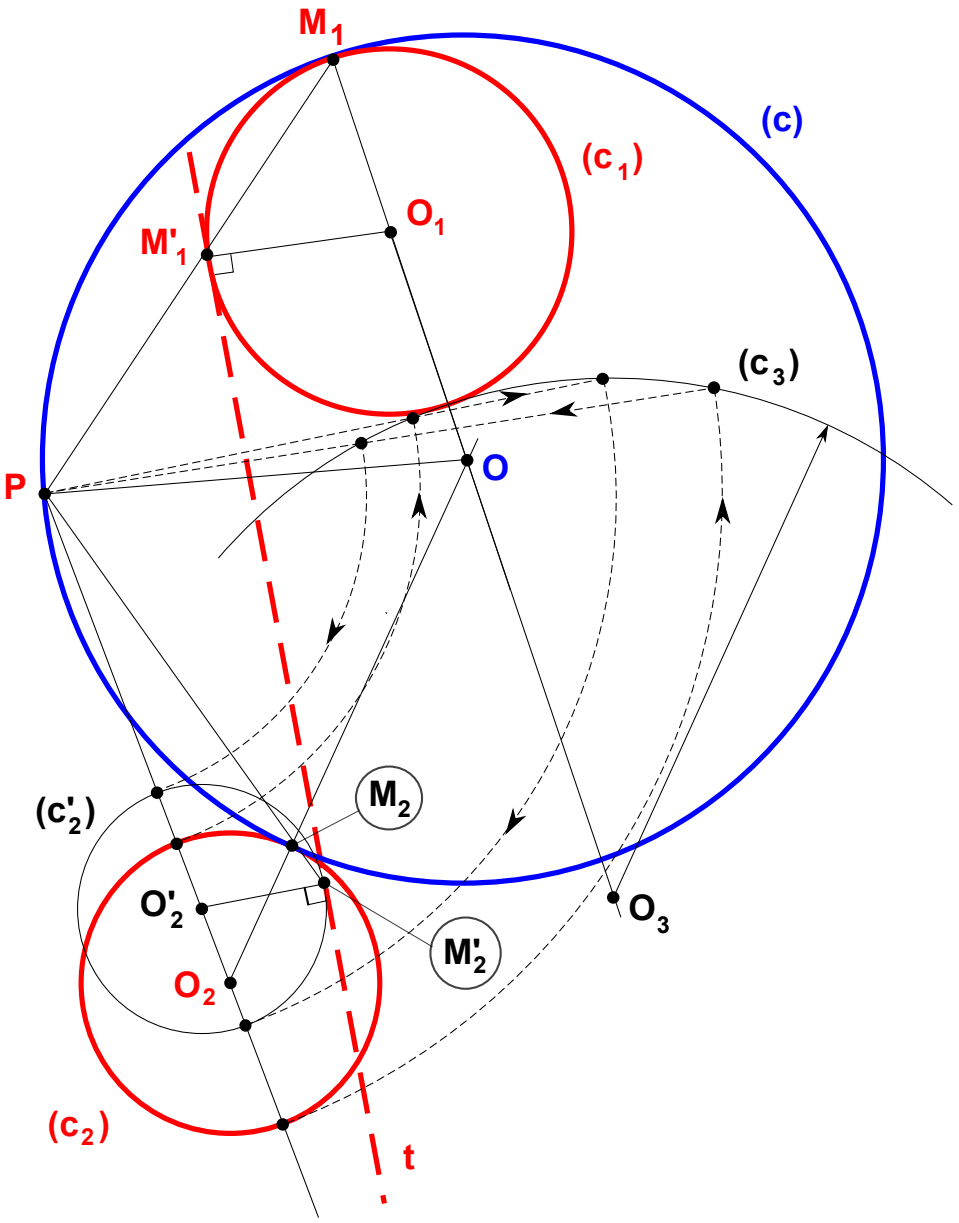
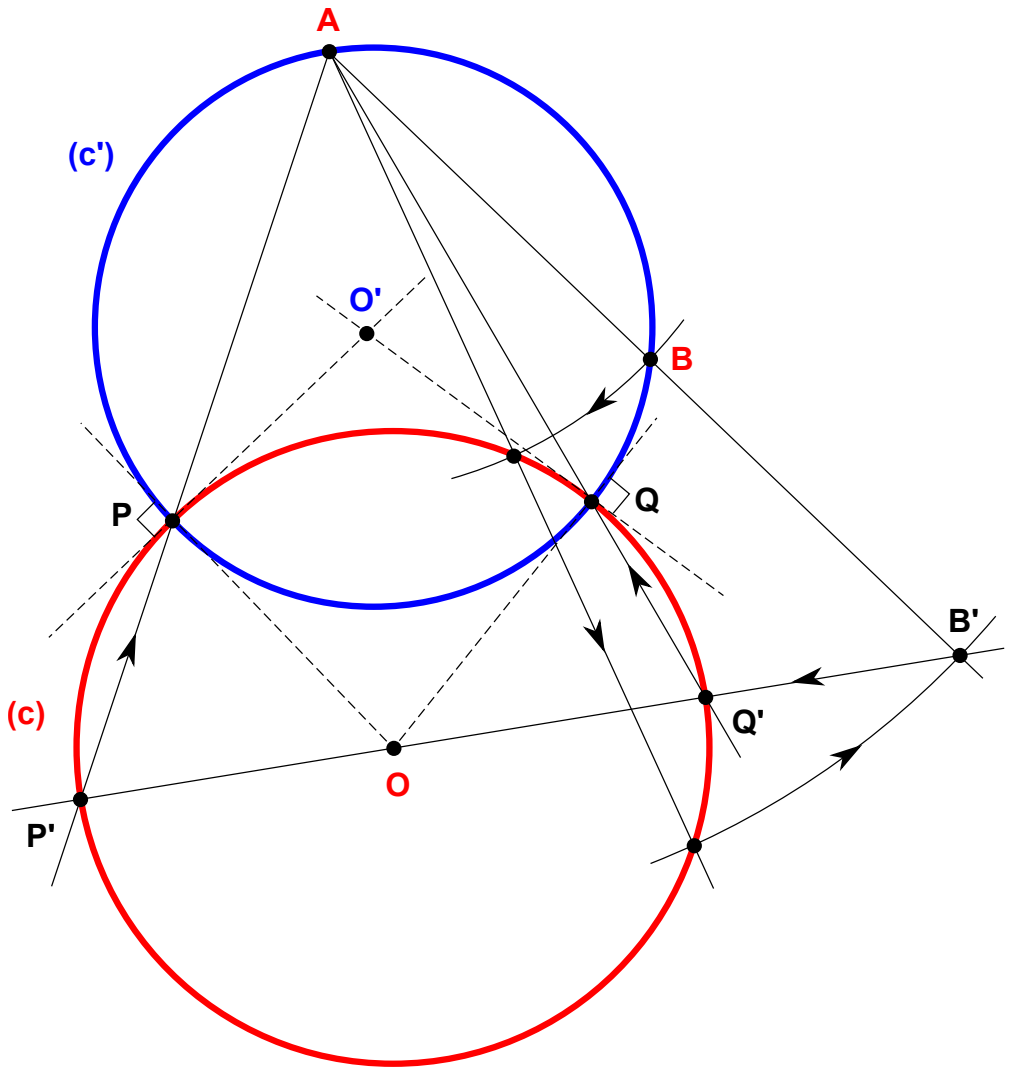


Figura 2.

Ejemplo 9. Trazar una circunferencia, $(\mathbf{c}')$, que pasa por dos puntos **A**, **B**, y sea ortogonal a una circunferencia dada $(\mathbf{c})$.

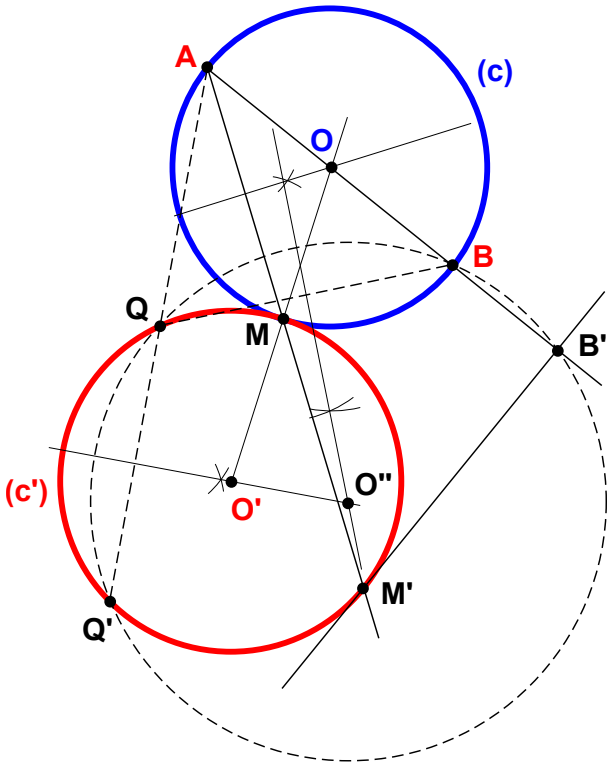


Consideramos una inversión de centro **A** y potencia la del punto **A** respecto de la circunferencia $(\mathbf{c})$.

El punto **B** se transforma en el $\mathbf{B}'$, y la inversa de la circunferencia pedida debe ser la recta $\overline{\mathbf{OB}'}$ (por la ortogonalidad).

La circunferencia solución estará determinada por los puntos **A**, **P**, **Q**, estos dos últimos respectivamente los inversos de los $\mathbf{P}'$ y $\mathbf{Q}'$.

Ejemplo 10. Trazar una circunferencia, $(\mathbf{c})$, que pase por dos puntos **A**, **B** y es tangente a una circunferencia dada $(\mathbf{c}')$.



Aplicando una inversión de centro el punto **A** y potencia la potencia del punto **A** respecto de la circunferencia $(\mathbf{c}')$, lo que significa que $(\mathbf{c}')$ se transforma en sí misma; el punto **B** se transformará en el $\mathbf{B}'$, que construiremos como sigue: Se traza la recta (cualquiera) que pase por **A** y corte a $(\mathbf{c}')$ en los puntos **Q** y $\mathbf{Q}'$, trazando luego la circunferencia que pasa por **Q**, $\mathbf{Q}'$ y **B**, que cortará a la recta $\overline{\mathbf{AB}}$ en el punto buscado $\mathbf{B}'$, inverso del **B**.
(Observemos que $\overline{\mathbf{AB}} \cdot \overline{\mathbf{AB}'} = \overline{\mathbf{AQ}} \cdot \overline{\mathbf{AQ}'} =$ potencia de **A** respecto $(\mathbf{c}')$)
La circunferencia buscada, $(\mathbf{c})$, que debe pasar por **A**, **B** y ser tangente a $(\mathbf{c}')$, se transformará, por la inversión, en una recta que pasa por $\mathbf{B}'$ y es tangente a la circunferencia $(\mathbf{c}')$, en el punto $\mathbf{M}'$. La circunferencia buscada, $(\mathbf{c})$, será pues la inversa de la recta $\overline{\mathbf{B}'\mathbf{M}'}$. Bastará, por tanto, trazar ahora la recta $\overline{\mathbf{AM}'}$, que cortará a $(\mathbf{c}')$en el punto **M** (inverso del punto $\mathbf{M}'$) quedando determinada la circunferencia que nos interesa por los puntos **A**, **B** y **M**.
Observemos que dado que desde el punto $\mathbf{B}'$ se pueden trazar dos tangentes a la circunferencia $(\mathbf{c}')$, habrá en general dos soluciones.
Así mismo conviene observar que si el punto $\mathbf{B}'$ resultase interior a la circunferencia $(\mathbf{c}')$, no existiría solución alguna.

CAPÍTULO II

Lección 3.- RAZÓN SIMPLE DE TRES PUNTOS

3.1 Coordenadas cartesianas en la recta

3.2 Cambio de coordenadas cartesianas

3.3 Razón simple de tres puntos

3.4 La razón simple como invariante en la proyección paralela

3.5 Abscisas baricéntricas

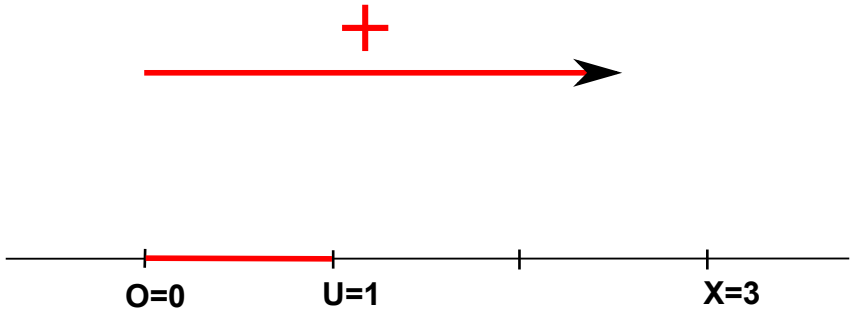
3.6 Cambio de coordenadas baricéntricas.

3.1 Coordenadas cartesianas en la recta

No vamos a repetir, por conocido, el proceso que permite establecer una biyección entre la "recta real", **r**, y el "cuerpo de los números reales", $\mathbb{R}$. Recordemos únicamente que elegidos dos puntos **O** y **U**, llamados **origen** y **unidad**, se llama **abscisa cartesiana**, de un punto **X** de la recta, a la medida del segmento $\overline{\mathbf{OX}}$ con la unidad $\overline{\mathbf{OU}}$, afectada del signo + ó – según que el punto **X** pertenezca a la semi-recta de origen **O** que contiene la **U**, o no pertenezca.

La biyección depende, evidentemente, de los puntos **O** y **U**, que constituyen el **sistema de referencia** de las abscisas elegidas en **r**. Así mismo, el sistema de referencia (**O**, **U**) asocia a la recta **r** un sentido positivo, que es aquel en que **O** precede a **U**.

Ejemplo 1. En la recta dada, el valor de la abscisa cartesiana del punto **X** vale **3**, y el sentido positivo es el indicado por la flecha:



3.2 Cambio de coordenadas cartesianas

Si **P** y **Q** son dos puntos de **r**, la pareja $(\mathbf{P},\ \mathbf{Q})$ determina un segmento orientado $\overline{\mathbf{PQ}}$, al cual corresponde una medida con la unidad $\overline{\mathbf{OU}}$, positiva si **P** precede a **Q**, y negativa en caso contrario. Designaremos esta medida por $\overline{\mathbf{PQ}}$, sobrentendiéndose que se refiere al sistema $(\mathbf{O},\ \mathbf{U})$; en caso de posible duda escribiríamos:

$$\frac{\overline{\mathbf{PQ}}}{\overline{\mathbf{OU}}}$$

De la propia definición se deduce, de manera inmediata, la igualdad, $\overline{\mathbf{PQ}}+\overline{\mathbf{QP}}=\mathbf{0}$

PROPOSICIÓN 1. Si P , Q y R son tres puntos de la recta r , se verifica que:

$$\overline{\mathbf{PQ}}+\overline{\mathbf{QR}}+\overline{\mathbf{RP}}=\mathbf{0}\quad\textbf{(Fórmula de Chasles)}$$

En efecto: Cualesquiera que sean los puntos, uno de ellos pertenece al segmento determinado por los otros dos. Si es **R** el que pertenece al segmento $\overline{\mathbf{PQ}}$, entonces dicho segmento resultará de yuxtaponer los $\overline{\mathbf{PR}}$ y $\overline{\mathbf{RQ}}$. Además, las medidas $\overline{\mathbf{PQ}}$, $\overline{\mathbf{PR}}$ y $\overline{\mathbf{RQ}}$ serán del mismo signo, cualquiera que sea el sistema de referencia, con lo que tendremos:

$$\overline{\mathbf{PQ}}=\overline{\mathbf{PR}}+\overline{\mathbf{RQ}}$$

y en virtud de la anterior igualdad ($\overline{\mathbf{PQ}}+\overline{\mathbf{QP}}=\mathbf{0}$) resultará la fórmula de Chasles.

Se procede en forma análoga si **P** pertenece al segmento $\overline{\mathbf{QR}}$, o si **Q** pertenece al segmento $\overline{\mathbf{RP}}$.

Lo establecido permite escribir inmediatamente la siguiente relación:

$$\overline{\mathbf{QR}}=\overline{\mathbf{PR}}-\overline{\mathbf{PQ}}$$

Es inmediata, por otra parte, la generalización de la fórmula de Chasles al caso de $\mathbf{n}>\mathbf{3}$ puntos:

$$\overline{\mathbf{P_1P_2}}+\overline{\mathbf{P_2P_3}}+\cdots\cdots\cdots+\overline{\mathbf{P_{n-1}P_n}}+\overline{\mathbf{P_nP_1}}=\mathbf{0}$$

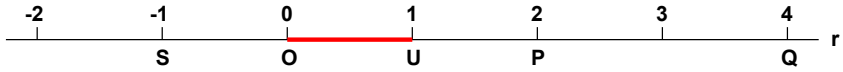
Si en la recta **r**, los puntos **P** y **Q** tienen como abscisas en el sistema de referencia $(\mathbf{O},\ \mathbf{U})$, respectivamente **p** y **q**, la anterior relación $(\overline{\mathbf{QR}}=\overline{\mathbf{PR}}-\overline{\mathbf{PQ}})$, permite escribir:

$$\overline{\mathbf{PQ}}=\overline{\mathbf{OQ}}-\overline{\mathbf{OP}}=\mathbf{q}-\mathbf{p}$$

Así, definimos como **distancia** entre los puntos **P** y **Q** que designaremos: $\mathbf{d}(\mathbf{P},\ \mathbf{Q})$ al módulo de $\overline{\mathbf{PR}}$, es decir:

$$\mathbf{d}(\mathbf{P},\ \mathbf{Q})=|\mathbf{q}-\mathbf{p}|=|\mathbf{p}-\mathbf{q}|$$

Ejemplo 1. Dado el sistema de referencia $(\mathbf{O},\ \mathbf{U})$ sobre la recta $\mathbf{r}$, se tiene:

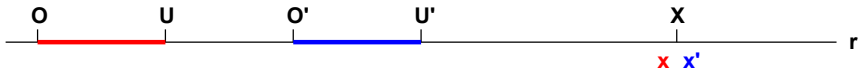


$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{p}=\mathbf{2}\\ \mathbf{q}=\mathbf{4}\\ \mathbf{s}=-\mathbf{1}\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\mathbf{d(P,Q)}=|\mathbf{2}-\mathbf{4}|=\mathbf{2}\\ \mathbf{d(Q,P)}=|\mathbf{4}-\mathbf{2}|=\mathbf{2}\\ \mathbf{d(P,S)}=|\mathbf{2}-(-\mathbf{1})|=\mathbf{3}\\ \mathbf{d(S,P)}=|-\mathbf{1}-\mathbf{2}|=\mathbf{3}\end{array}$$

Para establecer el cambio de coordenadas cartesianas procederemos como sigue:

Sean $(\mathbf{O},\ \mathbf{U})$ y $(\mathbf{O'},\ \mathbf{U'})$ los sistemas de referencia que llamaremos, respectivamente, **antiguo** y **nuevo**, siendo **a** la abscisa del punto $\mathbf{O'}$ y $\mathbf{m}=\overline{\mathbf{O'U'}}$ la medida del segmento orientado $\overline{\mathbf{O'U'}}$, en el sistema antiguo. Evidentemente, **m** será positivo o negativo según $(\mathbf{O},\ \mathbf{U})$ y $(\mathbf{O'},\ \mathbf{U'})$, asignen a la recta **r** orientaciones iguales u opuestas.

Llamaremos **x** y $\mathbf{x'}$ a las abscisas del punto **X**, respectivamente en el sistema antiguo y nuevo:



Podemos escribir

$$\frac{\overline{\mathbf{O'X}}}{\overline{\mathbf{O'U'}}}=\mathbf{x'}\Longrightarrow\frac{\overline{\mathbf{OU}}}{\overline{\mathbf{OU}}}\cdot\frac{\overline{\mathbf{O'X}}}{\overline{\mathbf{O'U'}}}=\mathbf{x'}\Longrightarrow\frac{\overline{\mathbf{O'X}}}{\overline{\mathbf{OU}}}\cdot\frac{\overline{\mathbf{OU}}}{\overline{\mathbf{O'U'}}}=\mathbf{x'}\Longrightarrow\frac{\overline{\mathbf{O'X}}}{\overline{\mathbf{OU}}}=\frac{\overline{\mathbf{O'U'}}}{\overline{\mathbf{OU}}}\cdot\mathbf{x'}=\mathbf{m}\cdot\mathbf{x'}$$

La medida del segmento $\overline{\mathbf{O'X}}$ en el sistema antiguo será, por tanto

$$\overline{\mathbf{O'X}}=\mathbf{m}\cdot\mathbf{x'}\qquad\left(\mathbf{m}=\frac{\overline{\mathbf{O'U'}}}{\overline{\mathbf{OU}}}\right)$$

Así, sustituyendo en la fórmula de Chasles, con medidas en el sistema antiguo, tendremos

$$\overline{\mathbf{OX}}=\overline{\mathbf{OO'}}+\overline{\mathbf{O'X}}$$

resultando, al dividir por $\overline{\mathbf{OU}}$, la fórmula de cambio buscado

$$\mathbf{x}=\mathbf{a}+\mathbf{m}\cdot\mathbf{x'}$$

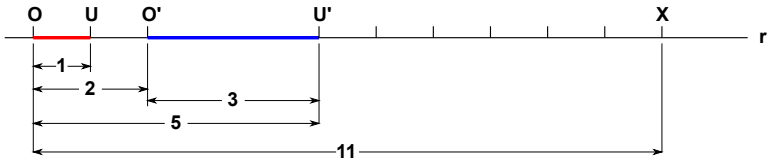
equivalente a la

$$\mathbf{x'}=\frac{\mathbf{x}-\mathbf{a}}{\mathbf{m}}$$

Ejemplo 2. Dado el sistema de referencia $(\mathbf{O},\ \mathbf{U})$ sobre la recta $\mathbf{r}$, consideremos los puntos $\mathbf{O'}$ y $\mathbf{U'}$, de abscisas respectivas 2 y 5, es decir tales que

$$\overline{\mathbf{OU}}=\mathbf{1}\,,\quad\overline{\mathbf{OO'}}=\mathbf{2}\,,\quad\overline{\mathbf{OU'}}=\mathbf{5}\,,\quad\overline{\mathbf{O'U'}}=\mathbf{5}-\mathbf{2}=\mathbf{3}$$

Sean, ahora, los puntos $\mathbf{O'}$ y $\mathbf{U'}$, respectivamente origen y unidad de un nuevo sistema de referencia, $(\mathbf{O'},\ \mathbf{U'})$, que llamaremos NUEVO, dando el nombre de VIEJO al original $(\mathbf{O},\ \mathbf{U})$.



Si **X** es un punto genérico de la recta, de abscisa **x** en el sistema VIEJO y $\mathbf{x'}$ en el sistema NUEVO, la fórmula de cambio de coordenadas será:

$$\mathbf{x'} = \frac{\mathbf{x-2}}{\mathbf{3}}$$

Así, si para el punto **X** se tiene $\mathbf{x = 11}$, su abscisa en el sistema NUEVO valdrá

$$\mathbf{x'} = \frac{\mathbf{11-2}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{3}} = \mathbf{3}$$

Ejemplo 3. Dando continuidad al ejemplo anterior, si $(\mathbf{O'},\ \mathbf{U'})$ fuera el sistema VIEJO y $(\mathbf{O},\ \mathbf{U})$ el sistema NUEVO, se tendría.

$$\overline{\mathbf{O'U'}} = \mathbf{1}\ ,\ \ \overline{\mathbf{O'O}} = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\ ,\ \ \overline{\mathbf{O'U}} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\ ,\ \ \overline{\mathbf{OU}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\ ,\ \ \mathbf{x'} = \mathbf{3}$$

y la abscisa de **X** respecto al actual sistema NUEVO será:

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x'} - \left(-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}} = \frac{\mathbf{3} + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}} = \frac{\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{3}}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}} = \mathbf{11}$$

3.3 Razón simple de tres puntos

Sean **Q**, **P**, **X** tres puntos de la recta **r**, y **q**, **p**, **x** sus correspondientes abscisas en el sistema $(\mathbf{O},\ \mathbf{U})$.

Llamaremos **razón simple** de la terna ordenada **Q**, **P**, **X**, y la denotaremos $\boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{QPX})$ al número real $\boldsymbol{\lambda} = \dfrac{\overline{\mathbf{QX}}}{\overline{\mathbf{PX}}}$, es decir:

$$\boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{QPX}) = \frac{\overline{\mathbf{QX}}}{\overline{\mathbf{PX}}}$$

De acuerdo con lo establecido en el punto anterior, la expresión de la razón simple, en función de las abscisas de los puntos **Q**, **P**, **X**, será;

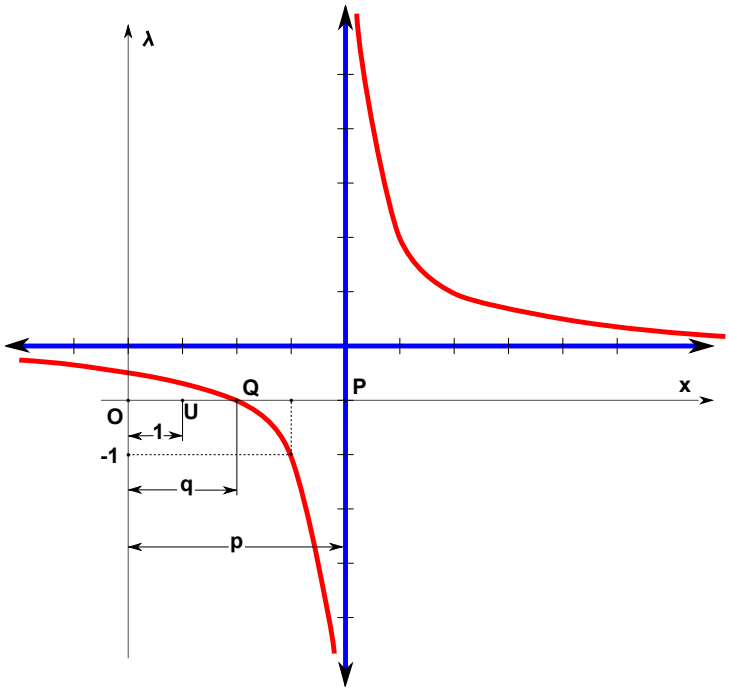
$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\mathbf{x-q}}{\mathbf{x-p}}$$

Observamos que si $\mathbf{Q \neq P}$, para todo punto **X** es $\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{1}$, siendo $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ para $\mathbf{X = Q}$ Así resulta que, la razón simple:

- Es negativa en el intervalo $]\mathbf{Q},\ \mathbf{P}[$, es decir, para $\mathbf{q < x < p}$, y positiva fuera del $[\mathbf{Q},\ \mathbf{P}]$.
- Se anula para $\mathbf{x = q}$, $\mathbf{X \equiv Q}$ (punto ORIGEN).

- Vale $-\mathbf{1}$ en el punto medio del intervalo $[\mathbf{Q},\ \mathbf{P}]$.
- Tiende a infinito para $\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{P}$ (punto LIMITE).
- Tiende a uno para $\mathbf{x} \longrightarrow \pm\boldsymbol{\infty}$ (Diremos que la razón simple $\dfrac{\overline{\mathbf{QX}}}{\overline{\mathbf{PX}}} = \mathbf{1}$ cuando $\mathbf{X}$ es el punto impropio de la recta).

La representación gráfica de la variación de la razón simple será la siguiente:



Despejando $\mathbf{x}$ en la expresión de la razón simple.

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{q}}{\mathbf{x}-\mathbf{p}}$$

obtenemos

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{q}-\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{p}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{\lambda}}$$

Así, podemos afirmar que: **Si en una recta r elegimos dos puntos distintos Q y P, la razón simple $\boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{QPX})$ establece una biyección entre los puntos de r, excluido el P, y los números reales, excluido el 1.**

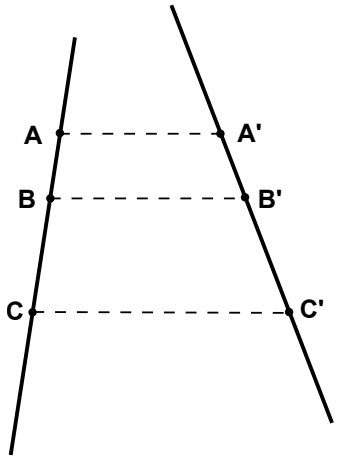
En efecto: Una tal biyección nos queda determinada por las dos formulas anteriores, y por la consideración de que la abscisa cartesiana $\mathbf{x}$ establece una biyección entre $\mathbf{r}$ y el cuerpo de los reales.

3.4. La razón simple como invariante en la proyección paralela

Del Teorema de Thales, que dice: **Si dos rectas se cortan por un sistema de paralelas, los segmentos determinados por los puntos de intersección sobre una de ellas son proporcionales a los determinados por los puntos correspondientes en la otra,** se desprende la propiedad siguiente:

PROPOSICIÓN 1. La razón simple es un invariante en toda proyección paralela.

Significa esto que al proyectar paralelamente una terna **A**, **B**, **C**, según otra $\mathbf{A'}$, $\mathbf{B'}$, $\mathbf{C'}$ se conserva el valor de la razón simple: $(\mathbf{A'B'C'}) = (\mathbf{ABC})$ puesto que $\frac{\overline{\mathbf{A'C'}}}{\overline{\mathbf{B'C'}}} = \frac{\overline{\mathbf{AC}}}{\overline{\mathbf{BC}}}$



Como consecuencia del mismo Teorema podemos afirmar también la siguiente:

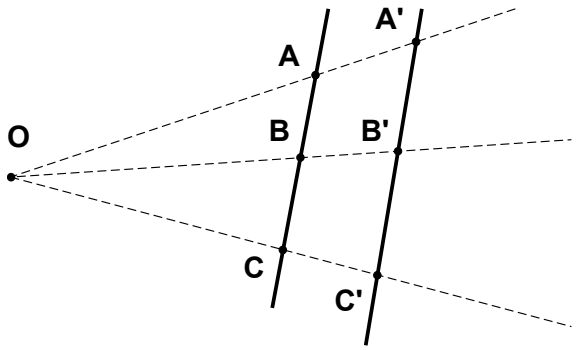
PROPOSICIÓN 2. La razón simple es invariante en toda proyección central sobre rectas paralelas.

Es decir,

$$(\mathbf{A'B'C'}) = (\mathbf{ABC})$$

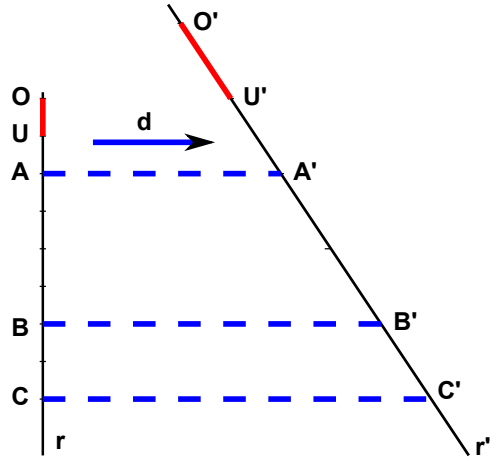
puesto que:

$$\frac{\overline{\mathbf{A'C'}}}{\overline{\mathbf{B'C'}}} = \frac{\overline{\mathbf{AC}}}{\overline{\mathbf{BC}}}$$



Ejemplo 1. Consideremos las rectas **r**, **r′**. sobre **r** fijamos los puntos **A**, **B**, **C** de abscisas respectivas **2, 6, 8**, siendo el sistema de referencia el (**O**, **U**). Proyectamos luego dichos puntos, paralelamente, en la dirección **d**, sobre la recta **r′**, en la que se ha definido un sistema de referencias $(\mathbf{O}', \mathbf{U}')$

Se trata de comprobar, como hemos afirmado, la igualdad de las razones simples **(ABC)** y $(\mathbf{A}'\mathbf{B}'\mathbf{C}')$



Sobre la recta **r** se tiene:

$$(\overline{\mathbf{AC}} = \mathbf{6}\ ,\ \overline{\mathbf{BC}} = \mathbf{2}) \Longrightarrow (\mathbf{ABC}) = \frac{\overline{\mathbf{AC}}}{\overline{\mathbf{BC}}} = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{2}} = \mathbf{3}$$

y sobre la recta r' tenemos:

$$(\overline{\mathbf{A'C'}} = \mathbf{3}\ ,\ \overline{\mathbf{B'C'}} = \mathbf{1}) \Longrightarrow (\mathbf{A'B'C'}) = \frac{\overline{\mathbf{A'C'}}}{\overline{\mathbf{B'C'}}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{1}} = \mathbf{3}$$

es decir

$$(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{A'B'C'})$$

En cambio, se verifica la propiedad siguiente:

PROPOSICIÓN 3. Al proyectar una serie A, B, C,... desde un punto propio O, sobre otra $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}', \cdots$ no paralela, varía la razón simple.

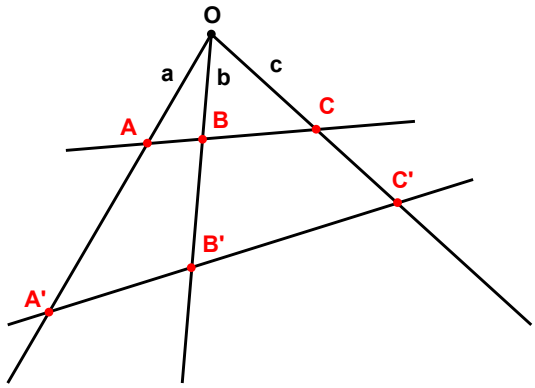
En efecto: Expresando la razón simple en función de los ángulos ordinarios convexos $\widehat{\mathbf{ac}}$ y $\widehat{\mathbf{bc}}$, formados por los rayos proyectantes $\overline{\mathbf{OA}}$, $\overline{\mathbf{OB}}$ y $\overline{\mathbf{OC}}$, se tiene, en virtud del teorema de los senos,

$$\overline{\mathbf{AC}} = \overline{\mathbf{OA}} \cdot \frac{\operatorname{sen} \widehat{\mathbf{ac}}}{\operatorname{sen}(\widehat{\mathbf{OCA}})}$$

$$\overline{\mathbf{BC}} = \overline{\mathbf{OB}} \cdot \frac{\operatorname{sen} \widehat{\mathbf{bc}}}{\operatorname{sen}(\widehat{\mathbf{OCA}})}$$

y dividiendo resulta:

$$(\mathbf{ABC}) = \frac{\overline{\mathbf{AC}}}{\overline{\mathbf{BC}}} = \frac{\operatorname{sen} \widehat{\mathbf{ac}}}{\operatorname{sen} \widehat{\mathbf{bc}}} \cdot \frac{\overline{\mathbf{OA}}}{\overline{\mathbf{OB}}}$$



De los dos factores del último miembro, el primero es fijo si lo son los tres rayos **a**, **b** y **c**, mientras que el segundo depende de la recta que seccione el haz.

Para otra sección, se tendrá:

$$(\mathbf{A'B'C'}) = \frac{\overline{\mathbf{A'C'}}}{\overline{\mathbf{B'C'}}} = \frac{\mathbf{sen}\,\widehat{\mathbf{ac}}}{\mathbf{sen}\,\widehat{\mathbf{bc}}} \cdot \frac{\overline{\mathbf{OA'}}}{\overline{\mathbf{OB'}}}$$

resultando que sólo se verificará

$$\frac{\overline{\mathbf{OA}}}{\overline{\mathbf{OB}}} = \frac{\overline{\mathbf{OA'}}}{\overline{\mathbf{OB'}}}$$

si las secciones son paralelas.

Llamaremos **razón simple de la terna de rayos a, b, c** y designaremos por $(\mathbf{abc})$ a la razón $\dfrac{\mathbf{sen}\,\widehat{\mathbf{ac}}}{\mathbf{sen}\,\widehat{\mathbf{bc}}}$; así

$$(\mathbf{abc}) = \frac{\mathbf{sen}\,\widehat{\mathbf{ac}}}{\mathbf{sen}\,\widehat{\mathbf{bc}}}$$

con el convenio de atribuir signos iguales o distintos a los ángulos según sean del mismo o de opuesto sentido, tomando siempre los ángulos $\widehat{\mathbf{ac}}$ y $\widehat{\mathbf{bc}}$ convexos.

3.5. Abscisas baricéntricas

Las consideraciones del apartado anterior nos hacen ver la posibilidad de caracterizar los puntos **X** de una recta **r**, excluido uno **P**, mediante el valor de la razón simple: $\boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{QPX})$, siendo **Q** un punto de **r** tal que $\mathbf{Q} \neq \mathbf{P}$.

Observemos, por otra parte, que al tomar **X** suficientemente próximo a **P** el valor absoluto de $\boldsymbol{\lambda}$ crece tanto como se quiera, lo que justifica el convenio de hacer corresponder a **P** la razón simple $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\infty}$. Así mismo, si hacemos tender **X** a infinito, la razón simple $\boldsymbol{\lambda}$ tiende a **1**.

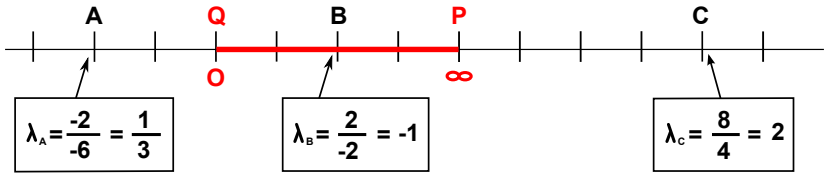
Así, si en la recta **r** fijamos dos puntos distintos **Q** y **P**, la razón simple $\boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{QPX})$ establece una biyección, sin excepciones, entre la recta **r** ampliada con un punto, que llamaremos **punto impropio**, dando lugar a **la recta proyectiva** y el cuerpo de los números reales, ampliado con el símbolo $\boldsymbol{\infty}$, con el que se operará como en CALCULO.

En consecuencia, fijar sobre **r** los puntos **Q** y **P** ($\mathbf{Q} \neq \mathbf{P}$), y la tal biyección, es establecer un **sistema de referencia**, al que llamaremos de **abscisas baricéntricas** de la recta proyectiva.

Asigna este sistema: A los puntos fundamentales **Q** y **P** respectivamente, las coordenadas **O** y **∞**, y al punto impropio la abscisa **1**.

La introducción de las abscisas baricéntricas nos ha conducido, parece que de un modo natural, a la ampliación de la recta euclídea con el punto impropio para formar la recta proyectiva.

Ejemplo 1. Fijados sobre la recta **r** los puntos fundamentales **Q** y **P**, que determinan un sistema de referencia de abscisas baricéntricas, los puntos **A**, **B** y **C** tendrán por abscisas los valores que se indican sobre la propia recta:



puesto que:

$$\boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{QPX}) = \frac{\overline{\mathbf{QX}}}{\overline{\mathbf{PX}}}$$

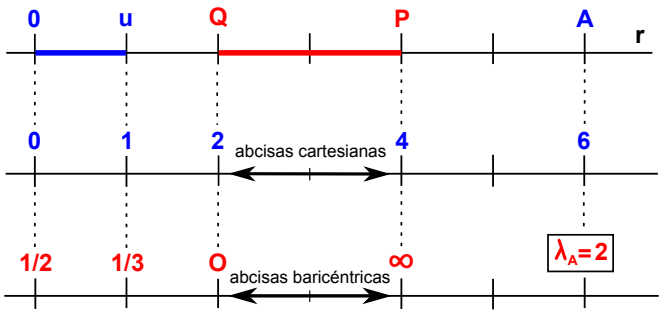
Ejemplo 2. Si en el sistema cartesiano $(\mathbf{O},\ \mathbf{U})$ los puntos **Q**, **P** y **A** tienen por coordenadas respectivas.

$$\mathbf{X_Q = 2} \quad , \quad \mathbf{X_P = 4} \quad , \quad \mathbf{X_A = 6}$$

la abscisa baricéntrica del punto **A**, respecto del sistema baricéntrico que tiene por puntos fundamentales **Q** y **P** será

$$\lambda_{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{X_A - X_Q}}{\mathbf{X_A - X_P}} = \frac{\mathbf{6-2}}{\mathbf{6-4}} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{2}} = \mathbf{2}$$

La representación sobre la recta **r** será la siguiente:



Ejemplo 3. Si en el sistema de abscisas baricéntricas, de puntos fundamentales **Q** y **P**, los puntos **O**, **U** y **A** tienen por coordenadas baricéntricas respectivas,

$$\boldsymbol{\lambda_O} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \quad , \quad \boldsymbol{\lambda_U} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \quad , \quad \boldsymbol{\lambda_A} = \mathbf{2}$$

se trata de determinar la abscisa del punto **A**, respecto del sistema cartesiano $(\mathbf{O},\mathbf{U})$.

En la fórmula que nos da la abscisa baricéntrica $\boldsymbol{\lambda}_x$ de un punto **X** respecto de los puntos fundamentales **Q** y **P**:

$$\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{q}}{\mathbf{x}-\mathbf{p}}$$

x, **q**, **p** son, respectivamente, las abscisas cartesianas de los puntos **X**, **Q**, **P**.

Dado que los puntos fundamentales **O** y **U**, respecto del sistema que representan, tienen por coordenadas respectivas **0** y **1**, podemos escribir el sistema de ecuaciones,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \dfrac{\mathbf{0}-\mathbf{q}}{\mathbf{0}-\mathbf{p}} \\[2ex] \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} = \dfrac{\mathbf{1}-\mathbf{q}}{\mathbf{1}-\mathbf{p}} \end{array}\right\}$$

en el que operando, se transforma en el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{2}\cdot\mathbf{q}-\mathbf{p}=\mathbf{0} \\ \mathbf{3}\cdot\mathbf{q}-\mathbf{p}=\mathbf{2} \end{array}\right\}$$

cuyas soluciones son

$$\mathbf{q}=\mathbf{2} \quad , \quad \mathbf{p}=\mathbf{4}$$

Aplicando de nuevo la fórmula anterior, pero ahora para el punto **X=A** $(\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{A}}=\mathbf{2})$, resulta:

$$\mathbf{2} = \frac{\mathbf{X_A}-\mathbf{2}}{\mathbf{X_A}-\mathbf{4}}$$

y operando tenemos

$$\mathbf{2}\cdot\mathbf{X_A}-\mathbf{8}=\mathbf{X_A}-\mathbf{2}$$

es decir:

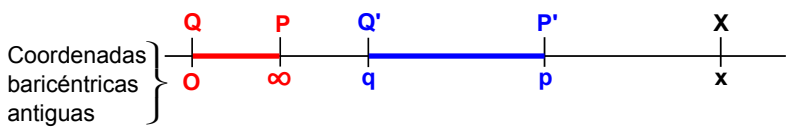
$$\mathbf{X_A}=\mathbf{6}$$

que es la abscisa cartesiana del punto **A**.

3.6. Cambio de coordenadas baricéntricas

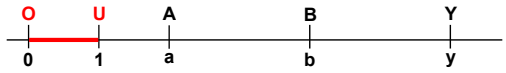
Sean $(\mathbf{Q},\ \mathbf{P})$ y $(\mathbf{Q}',\ \mathbf{P}')$ las parejas de puntos fundamentales de los sistemas baricéntricos, respectivamente **antiguo** y **nuevo**, siendo **q**, **p**, **x** las coordenadas baricéntricas antiguas de los puntos $\mathbf{Q}'$, $\mathbf{P}'$, **X**; es decir:

$$\mathbf{q}=(\mathbf{QPQ'}) \quad , \quad \mathbf{p}=(\mathbf{QPP'}) \quad , \quad \mathbf{x}=(\mathbf{QPX})$$



Si consideramos, ahora, el **sistema cartesiano** de origen $\mathbf{O \equiv Q}$ y unidad $\mathbf{U \equiv P}$, tendremos que;
Si es: $\boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{ABY})$ y son **a**, **b**, **y**, respectivamente las coordenadas cartesianas de los puntos **A**, **B**, **Y** se verifica:

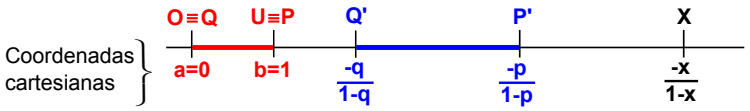
$$\mathbf{y = \frac{a - \lambda \cdot b}{1 - \lambda}}$$



resultando que las abscisas cartesianas, en el sistema cartesiano así establecido, serán, por ser en nuestro caso **a=0** y $\mathbf{b = 1}$:

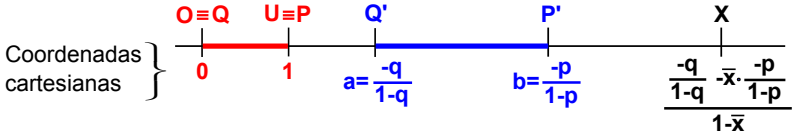
$$\mathbf{\frac{0 - q \cdot 1}{1 - q}} \quad , \quad \mathbf{\frac{0 - p \cdot 1}{1 - p}} \quad , \quad \mathbf{\frac{0 - x \cdot 1}{1 - x}}$$

que podemos representar como sigue:



Por otra parte, aplicando la misma fórmula, podremos calcular la abscisa del punto **X** utilizando los coordenadas cartesianas de $\mathbf{Q'}$ $\mathbf{P'}$ y la nueva coordenada baricéntrica $\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{Q'P'X})$, que será, por ser ahora $\mathbf{a = \frac{-q}{1-q}}$, $\mathbf{b = \frac{-p}{1-p}}$:

$$\mathbf{\frac{\frac{-q}{1-q} - \bar{x} \cdot \frac{-p}{1-p}}{1 - \bar{x}}}$$



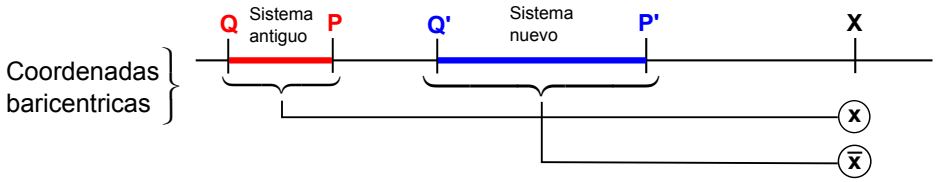
Igualando los dos valores obtenidos, como abscisa cartesiana del punto **X**, se tendrá

$$\mathbf{\frac{-x}{1-x} = \frac{\frac{-q}{1-q} - \bar{x} \cdot \frac{-p}{1-p}}{1 - \bar{x}}}$$

y despejando en esta igualdad la **x** obtenemos la fórmula del cambio buscada:

$$\boxed{\mathbf{x = \frac{q \cdot (p-1) - p \cdot (q-1) \cdot \bar{x}}{(p-1) - (q-1) \cdot \bar{x}}}}$$

en la que **x** y $\bar{\mathbf{x}}$ son, respectivamente, las abscisas baricéntricas del punto **X** en el sistema **antiguo** (de puntos fundamentales **Q y P**) y en el **nuevo** (de puntos fundamentales $\mathbf{Q'}$ y $\mathbf{P'}$)



Ejemplo 1. Fijados sobre la recta **r** dos puntos, **Q** y **P**, puntos fundamentales de un sistema baricéntrico, que llamaremos ANTIGUO, determinamos un nuevo sistema constituido por los puntos $\mathbf{Q'}$ y $\mathbf{P'}$, dando sus abscisas

$$\mathbf{q} = (\mathbf{QPQ'}) = \mathbf{2} \quad , \quad \mathbf{p} = (\mathbf{QPP'}) = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$$

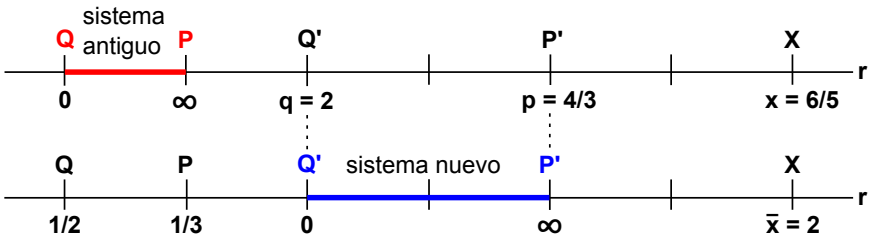
La fórmula de cambio de coordenadas será:

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{q}\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{1}) - \mathbf{p}\cdot(\mathbf{q}-\mathbf{1})\cdot\bar{\mathbf{x}}}{(\mathbf{p}-\mathbf{1}) - (\mathbf{q}-\mathbf{1})\cdot\bar{\mathbf{x}}}$$

es decir

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{2}\cdot\left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}-\mathbf{1}\right) - \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\cdot(\mathbf{2}-\mathbf{1})\cdot\bar{\mathbf{x}}}{\left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}-\mathbf{1}\right) - (\mathbf{2}-\mathbf{1})\cdot\bar{\mathbf{x}}} = \frac{\mathbf{2}-\mathbf{4}\cdot\bar{\mathbf{x}}}{\mathbf{1}-\mathbf{3}\cdot\bar{\mathbf{x}}}$$

siendo: **x** la abscisa antigua y $\bar{\mathbf{x}}$ la abscisa nueva.



Así, si en la fórmula de este cambio de coordenadas despejásemos $\bar{\mathbf{x}}$, tendríamos

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{2}}{\mathbf{3}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{4}}$$

con lo que:

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}} \qquad \longrightarrow \qquad \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{2}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{0}\ (\textbf{Punto Q}) \longrightarrow \bar{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

$$\mathbf{x} = \infty\ (\textbf{Punto P}) \longrightarrow \bar{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

Lección 4.- RAZÓN DOBLE DE CUATRO PUNTOS

4.1 Razón doble de cuatro puntos
4.2 La razón doble como invariante en la proyección no paralela
4.3 Abscisas proyectivas
4.4 Generalidad de las abscisas proyectivas
4.5 Expresión de la razón doble mediante sus abscisas cartesianas

4.1 Razón doble de cuatro puntos

Sean **P**, **Q**, **R**, **X** cuatro puntos de la recta **r**.

Llamaremos **razón doble** de la cuaterna ordenada **P**, **Q**, **R**, **X** y la denotaremos $(\mathbf{PQRX})$, al número real siguiente:

$$(\mathbf{PQRX}) = \frac{(\mathbf{PQR})}{(\mathbf{PQX})} = \frac{\overline{\mathbf{PR}}}{\overline{\mathbf{QR}}} : \frac{\overline{\mathbf{PX}}}{\overline{\mathbf{QX}}}$$

Ejemplo 1. Dados los cuatro puntos **A**, **B**, **C**, **D**, situados sobre la recta **r**:

su razón doble vale:

$$(\mathbf{ABCD}) = \frac{\overline{\mathbf{AC}}}{\overline{\mathbf{BC}}} : \frac{\overline{\mathbf{AD}}}{\overline{\mathbf{BD}}} = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{4}} : \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{8}} = \frac{\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{4}}}{\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{8}}} = \frac{\mathbf{48}}{\mathbf{40}} = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}}$$

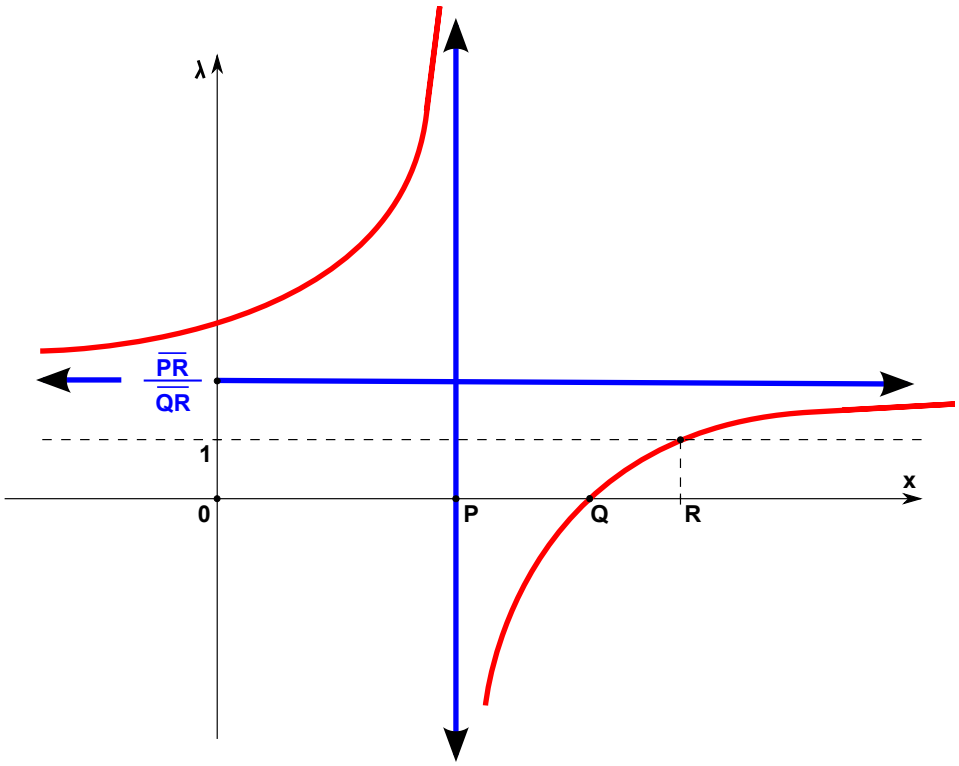
La representación gráfica de la variación de la razón doble la estableceremos de la manera siguiente: Dada la razón doble.

$$\boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{PQRX}) = \frac{(\mathbf{PQR})}{(\mathbf{PQX})} = \frac{\overline{\mathbf{PR}}}{\overline{\mathbf{QR}}} : \frac{\overline{\mathbf{PX}}}{\overline{\mathbf{QX}}} = \frac{\overline{\mathbf{PR}}}{\overline{\mathbf{QR}}} \cdot \frac{\overline{\mathbf{QX}}}{\overline{\mathbf{PX}}}$$

tendremos que:

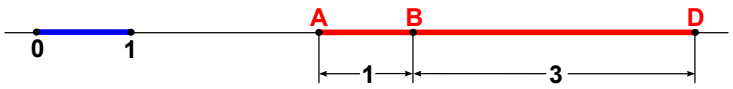
$$\begin{aligned}
&\mathbf{X = P} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{\lambda = \infty} \quad \textbf{(PUNTO LÍMITE)} \\
&\mathbf{X = Q} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{\lambda = 0} \quad \textbf{(PUNTO CERO)} \\
&\mathbf{X = R} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{\lambda = 1} \quad \textbf{(PUNTO UNIDAD)}
\end{aligned}$$

Supuesto que: $\dfrac{\overline{\mathbf{PR}}}{\overline{\mathbf{QR}}} > \mathbf{0}$ y $\dfrac{\overline{\mathbf{PR}}}{\overline{\mathbf{QR}}} > \mathbf{1}$, la representación será la siguiente:



Ejemplo 2. De los cuatro puntos alineados **A**, **B**, **C**, **D**, se conoce la posición relativa de tres de ellos, **A**, **B** y **D**. Del cuarto punto, **C**, sólo se sabe que se encuentra situado entre **B** y **D**.

Se trata de hallar la posición del punto **C**, sabiendo que $(\mathbf{ABCD}) = \mathbf{2}$, y que las posiciones de los **A**, **B** y **D** son las que se indican en la figura siguiente:



Como $\overline{\mathbf{AD}} = \mathbf{4}$ y $\overline{\mathbf{BD}} = \mathbf{3}$, tendremos

$$(\mathbf{ABCD}) = \frac{(\mathbf{ABC})}{(\mathbf{ABD})} = \frac{\dfrac{\overline{\mathbf{AC}}}{\overline{\mathbf{BC}}}}{\dfrac{\overline{\mathbf{AD}}}{\overline{\mathbf{BD}}}} = \frac{\dfrac{\overline{\mathbf{AC}}}{\overline{\mathbf{BC}}}}{\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}} = \mathbf{2}$$

de donde

$$\frac{\overline{\mathbf{AC}}}{\overline{\mathbf{BC}}} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}$$

Dado que el punto **C** se encuentra entre los **B** y **D** podemos escribir

$$\overline{\mathbf{AC}} = \overline{\mathbf{AB}} + \overline{\mathbf{BC}} = \mathbf{1} + \overline{\mathbf{BC}}\,.$$

Sustituyendo en la anterior igualdad tendremos

$$\frac{1+\overline{BC}}{\overline{BC}}=\frac{8}{3}$$

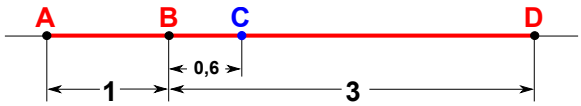
de donde

$$1+\overline{BC}=\frac{8}{3}\cdot\overline{BC}$$

es decir

$$\overline{BC}=\frac{3}{5}=0,6$$

En definitiva, el punto **C** distará $0,6$ del **B**, y la posición de los cuatro puntos será la indicada a continuación:



Ejemplo 3. Dados los puntos **A**, **B**, **C**, **D**,**C′**, **D′**, situados sobre una misma recta, de la relación

$$(ABCD)=(ABC'D')$$

se deduce que

$$(ABCC')=(ABDD')$$

En efecto: La primera relación puede escribirse

$$\frac{(ABC)}{(ABD)}=\frac{(ABC')}{(ABD')}$$

es decir

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}:\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}}:\frac{\overline{AD'}}{\overline{BD'}}$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}:\frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}:\frac{\overline{AD'}}{\overline{BD'}}$$

que es la expresión de la segunda relación

$$\frac{(ABC)}{(ABC')}=\frac{(ABD)}{(ABD')}$$

es decir

$$(ABCC')=(ABDD')$$

Como consecuencia inmediata de la definición resultan las siguientes proposiciones:

PROPOSICIÓN 1. El valor de la razón doble no cambia al permutar entre sí los pares de puntos P, Q y R, X; es decir:

$$(\mathbf{PQRX}) = (\mathbf{RXPQ})$$

En efecto: Se verifica que

$$(\mathbf{RXPQ}) = \frac{(\mathbf{RXP})}{(\mathbf{RXQ})} = \frac{\overline{\mathbf{RP}}}{\overline{\mathbf{XP}}} : \frac{\overline{\mathbf{RQ}}}{\overline{\mathbf{XQ}}} = \frac{\overline{\mathbf{PR}}}{\overline{\mathbf{QR}}} : \frac{\overline{\mathbf{PX}}}{\overline{\mathbf{QX}}} = (\mathbf{PQRX})$$

PROPOSICIÓN 2. El valor de la razón doble no cambia al permutar entre sí los puntos del primer par, y los del segundo par; es decir:

$$(\mathbf{PQRX}) = (\mathbf{QPXR})$$

En efecto: Se verifica que

$$(\mathbf{QPXR}) = \frac{(\mathbf{QPX})}{(\mathbf{QPR})} = \frac{\overline{\mathbf{QX}}}{\overline{\mathbf{PX}}} : \frac{\overline{\mathbf{QR}}}{\overline{\mathbf{PR}}} = \frac{\overline{\mathbf{PR}}}{\overline{\mathbf{QR}}} : \frac{\overline{\mathbf{PX}}}{\overline{\mathbf{QX}}} = (\mathbf{PQRX})$$

PROPOSICIÓN 3. El valor de la razón doble de la cuaterna ordenada que resulta de otra, al permutar los puntos tercero y cuarto, es el inverso del de partida; es decir:

$$(\mathbf{PQRX}) = \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{PQXR})}$$

En efecto: Se verifica que

$$(\mathbf{PQXR}) = \frac{(\mathbf{PQX})}{(\mathbf{PQR})} = \frac{\mathbf{1}}{\frac{(\mathbf{PQR})}{(\mathbf{PQX})}} = \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{PQRX})}$$

PROPOSICIÓN 4. El valor de la razón doble de la cuaterna ordenada que resulta de una al permutar los puntos segundo y tercero, sumado con el de partida, da la unidad; es decir:

$$(\mathbf{PRQX}) + (\mathbf{PQRX}) = \mathbf{1}$$

En efecto: Se verifica que

$$(\mathbf{PRQX}) = \frac{(\mathbf{PRQ})}{(\mathbf{PRX})} = \frac{\overline{\mathbf{PQ}}}{\overline{\mathbf{RQ}}} : \frac{\overline{\mathbf{PX}}}{\overline{\mathbf{RX}}} = \frac{\overline{\mathbf{PQ}} \cdot \overline{\mathbf{RX}}}{\overline{\mathbf{RQ}} \cdot \overline{\mathbf{PX}}}$$

Aplicando la **fórmula de Chasles**, a los factores del numerador, podremos escribir.

$$\overline{PQ} = \overline{PR} + \overline{RQ} \quad \text{y} \quad \overline{RX} = \overline{RQ} + \overline{QX}$$

expresiones que sustituidas en dicho numerador, y transformadas, aplicando nuevamente la **fórmula de Chasles** nos dan:

$$\begin{aligned} \overline{PQ} \cdot \overline{RX} &= (\overline{PR} + \overline{RQ}) \cdot (\overline{RQ} + \overline{QX}) \\ &= \overline{PR} \cdot \overline{RQ} + \overline{PR} \cdot \overline{QX} + \overline{RQ}^2 + \overline{RQ} \cdot \overline{QX} \\ &= \overline{RQ} \cdot (\overline{PR} + \overline{RQ} + \overline{QX}) + \overline{PR} \cdot \overline{QX} \\ &= \overline{RQ} \cdot \overline{PX} + \overline{PR} \cdot \overline{QX} \end{aligned}$$

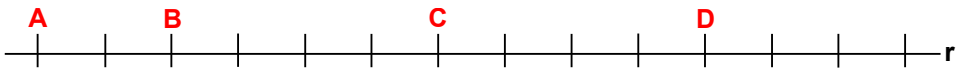
Sustituyendo ahora en el numerador, objeto de la transformación, tendremos

$$\begin{aligned} (PRQX) &= \frac{\overline{RQ} \cdot \overline{PX} + \overline{PR} \cdot \overline{QX}}{\overline{RQ} \cdot \overline{PX}} = 1 + \frac{\overline{PR} \cdot \overline{QX}}{\overline{RQ} \cdot \overline{PX}} = 1 - \frac{\overline{PR}}{\overline{QR}} \cdot \frac{\overline{QX}}{\overline{PX}} \\ &= 1 - \frac{\overline{PR}}{\overline{QR}} : \frac{\overline{PX}}{\overline{QX}} = 1 - (PQRX) \end{aligned}$$

y en definitiva, lo que queríamos demostrar

$$(PRQX) + (PQRX) = 1$$

Ejemplo 4. Dados los cuatro puntos **A**, **B**, **C**, **D** situados sobre la recta **r**, tal como se indica en la figura



se verifica que

$$(ABCD) = \frac{6}{5} \qquad \text{(como vimos en el anterior ejemplo 1)}$$

$$(CDAB) = \frac{\overline{CA}}{\overline{DA}} : \frac{\overline{CB}}{\overline{DB}} = \frac{-6}{-10} : \frac{-4}{-8} = \frac{48}{40} = \frac{6}{5}$$

$$(ABDC) = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} : \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{10}{8} : \frac{6}{4} = \frac{40}{48} = \frac{1}{\frac{6}{5}}$$

y como

$$(ACBD) = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{2}{-4} : \frac{10}{4} = -\frac{8}{40} = -\frac{1}{5}$$

será

$$(ACBD) + (ABCD) = \frac{-1}{5} + \frac{6}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Aplicando las proposiciones anteriores, se deducen, de manera inmediata, los siguientes valores de la razón doble de cuatro puntos, ya que en virtud de las dos primeras es, siempre, posible llevar un punto cualquiera de la cuaterna a la primera posición:

$$(\mathbf{PQRX}) = \boldsymbol{\lambda} \quad , \quad (\mathbf{PRXQ}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{\lambda}}$$

$$(\mathbf{PQXR}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}} \quad , \quad (\mathbf{PXQR}) = \mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{\boldsymbol{\lambda}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}}$$

$$(\mathbf{PRQX}) = \mathbf{1}-\boldsymbol{\lambda} \quad , \quad (\mathbf{PXRQ}) = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{\lambda}}$$

Ejemplo 5. Si se verifica que $(\mathbf{PQRX}) = \mathbf{3}$, tendremos:

$$(\mathbf{PQXR}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \quad , \quad (\mathbf{PXQR}) = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

$$(\mathbf{PRQX}) = -\mathbf{2} \quad , \quad (\mathbf{PXRQ}) = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$

$$(\mathbf{PRXQ}) = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

Los seis valores son distintos; sin embargo, no tienen por qué serlo necesariamente.

Ejemplo 6. Si se verifica que $(\mathbf{PQRX}) = -\mathbf{1}$, tendremos:

$$(\mathbf{PQXR}) = -\mathbf{1} \quad , \quad (\mathbf{PXQR}) = \mathbf{2}$$

$$(\mathbf{PRQX}) = \mathbf{2} \quad , \quad (\mathbf{PXRQ}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

$$(\mathbf{PRXQ}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

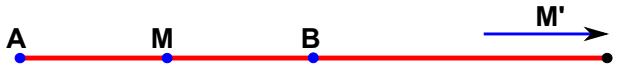
Si el valor de la razón doble de la cuaterna ordenada de puntos **P**, **Q**, **R**, **X**, de la recta **r**, es **-1**; es decir, si

$$(\mathbf{PQRX}) = -\mathbf{1}$$

diremos de la misma que es una **cuaterna armónica**, y que el par de puntos **R**, **X**, **separa armónicamente** al par **P,Q**.

Puesto que según hemos establecido: **(PQRX) = (RXPQ)**, si la cuaterna **(PQRX)** es armónica también lo será la **(RXPQ)**, lo que permitirá afirmar que también el par de puntos **P, Q** separa armónicamente al par **R, X**. Diremos también que los puntos **R**, **X** son **conjugados armónicos** respecto del par **P, Q**; y asimismo son **conjugados armónicos** los **P**, **Q** respecto del par **R**, **X**.

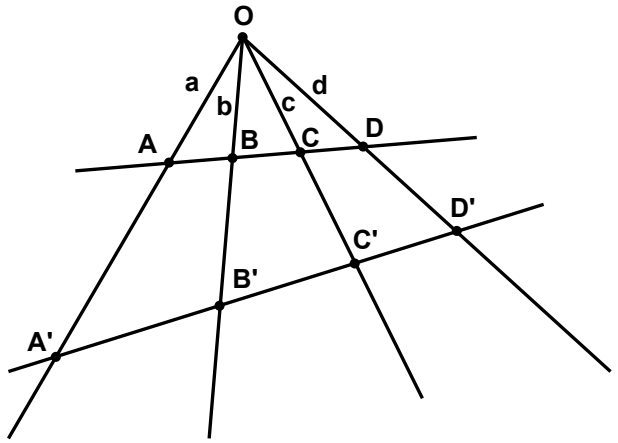
Ejemplo 7. La cuaterna armónica más sencilla, en la recta, es la constituida por los extremos de un segmento, $\overline{\mathbf{AB}}$, el punto medio del mismo y el punto impropio de la recta $\overline{\mathbf{AB}}$



$$(\mathbf{ABMM'}) = -\mathbf{1}$$

4.2 La razón doble como invariante métrico en la proyección no paralela

En el apartado 3.4, de la lección anterior, establecimos la razón simple como invariante en la proyección paralela, que no lo era cuando se trataba de una proyección no paralela.
Repitiendo y ampliando lo que allí decíamos tenemos que podemos expresar la razón simple en función de los ángulos ordinarios convexos $\widehat{\mathbf{ac}}$ y $\widehat{\mathbf{bc}}$, formados por los rayos proyectados $\overline{\mathbf{OA}}$, $\overline{\mathbf{OB}}$ y $\overline{\mathbf{OC}}$; se tiene en virtud del teorema de los senos:



$$\overline{\mathbf{AC}} = \overline{\mathbf{OA}} \cdot \frac{\operatorname{sen} \widehat{\mathbf{ac}}}{\operatorname{sen} \widehat{\mathbf{OCA}}} \quad , \quad \overline{\mathbf{BC}} = \overline{\mathbf{OB}} \cdot \frac{\operatorname{sen} \widehat{\mathbf{bc}}}{\operatorname{sen} \widehat{\mathbf{OCA}}}$$

y dividiendo resulta:

$$(\mathbf{ABC}) = \frac{\overline{\mathbf{AC}}}{\overline{\mathbf{BC}}} = \frac{\operatorname{sen} \widehat{\mathbf{ac}}}{\operatorname{sen} \widehat{\mathbf{bc}}} \cdot \frac{\overline{\mathbf{OA}}}{\overline{\mathbf{OB}}}$$

Procediendo de la misma manera podemos escribir

$$(\mathbf{ABD}) = \frac{\overline{\mathbf{AD}}}{\overline{\mathbf{BD}}} = \frac{\operatorname{sen} \widehat{\mathbf{ad}}}{\operatorname{sen} \widehat{\mathbf{bd}}} \cdot \frac{\overline{\mathbf{OA}}}{\overline{\mathbf{OB}}}$$

Así, por simple división, obtenemos la razón doble de la cuaterna de puntos **A**, **B**, **C**, **D**:

$$(\mathbf{ABCD}) = \frac{\overline{\mathbf{AC}}}{\overline{\mathbf{BC}}} : \frac{\overline{\mathbf{AD}}}{\overline{\mathbf{BD}}} = \frac{\mathbf{sen}\ \widehat{\mathbf{ac}}}{\mathbf{sen}\ \widehat{\mathbf{bc}}} : \frac{\mathbf{sen}\ \widehat{\mathbf{ad}}}{\mathbf{sen}\ \widehat{\mathbf{bd}}}$$

que no depende, evidentemente, de la recta que corta el haz de vértice **O**, lo que nos permite escribir.

$$(\mathbf{ABCD}) = (\mathbf{A'B'C'D'})$$

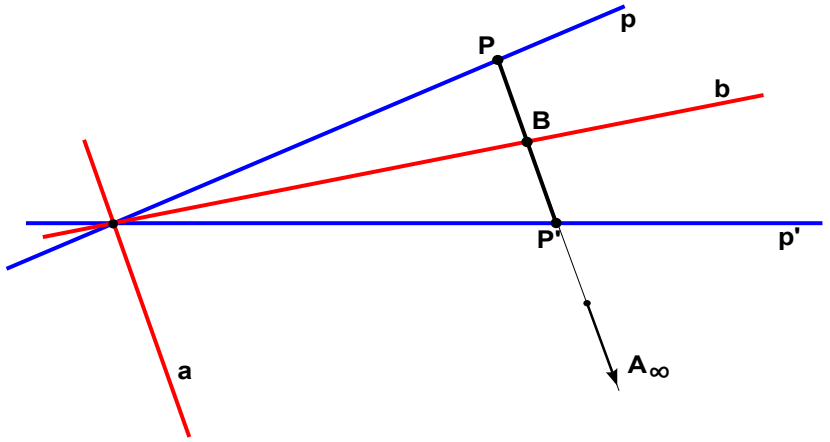
Así mismo, llamaremos **razón doble de la cuaterna de rayos a, b, c, d**, y designaremos por (**abcd**) al cociente siguiente:

$$(\mathbf{abcd}) = \frac{\mathbf{sen}\ \widehat{\mathbf{ac}}}{\mathbf{sen}\ \widehat{\mathbf{bc}}} : \frac{\mathbf{sen}\ \widehat{\mathbf{ad}}}{\mathbf{sen}\ \widehat{\mathbf{bd}}}$$

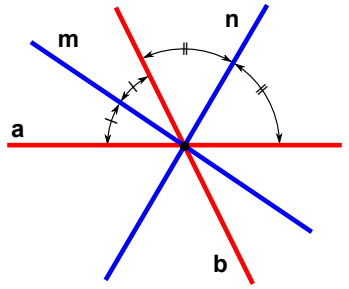
con el convenio de atribuir signos iguales o distintos a los ángulos según sean del mismo o de opuesto sentido, tomando siempre los ángulos $\widehat{\mathbf{ac}}$, $\widehat{\mathbf{bc}}$, $\widehat{\mathbf{ad}}$ **y** $\widehat{\mathbf{bd}}$ convexos.

Podemos por tanto afirmar que: **La razón doble de una cuaterna de (puntos/rayos) es igual a la razón doble de la cuaterna de (rayos/puntos) obtenida (proyectando/cortando) la anterior (desde un punto/por una recta) no (alineado/concurrente) con ellos.**

Ejemplo 1. Un procedimiento fácil para hallar el conjugado armónico de un rayo **b**, respecto de otros dos **p** y **p′**, de un haz plano de rectas, es el indicado en la figura siguiente en la que **B** es el punto medio del segmento $\overline{\mathbf{PP'}}$, dado que la cuaterna de rayos: **p**, **p′**, **b**, **a**, resulta ser la proyección de la cuaterna de puntos **P**, **P′**, **B**, $\mathbf{A_\infty}$, siendo $\overline{\mathbf{PB}} = \overline{\mathbf{BP'}}$



Ejemplo 2. La cuaterna armónica más sencilla en un haz plano de rectas es la formada por dos rayos, **a** y **b**, y las bisectrices, **m** y **n**, de los ángulos que determinan.

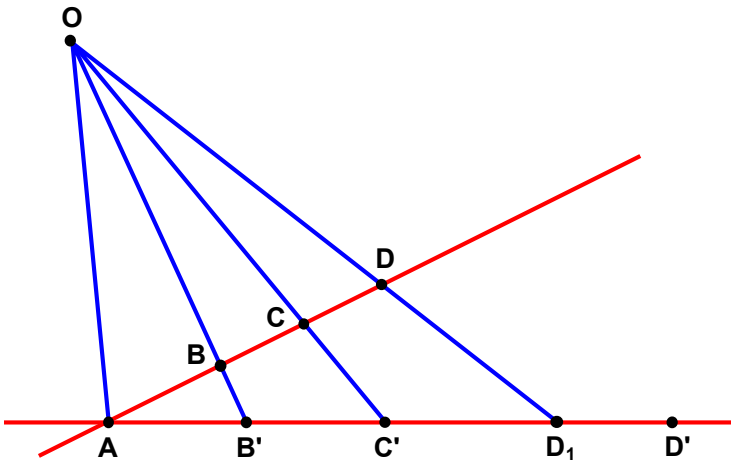


Ejemplo 3. Consideremos dos series rectilíneas de cuatro puntos con la misma razón doble

$$(\mathbf{ABCD}) = (\mathbf{A'B'C'D'})$$

con dos puntos homólogos confundidos: $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A'}$

En estas condiciones, vamos a ver que las rectas que unen los otros puntos homólogos ($\mathbf{B}$ con $\mathbf{B'}$, $\mathbf{C}$ con $\mathbf{C'}$ y $\mathbf{D}$ con $\mathbf{D'}$) son rectas concurrentes.



Designemos por $\mathbf{O}$ el punto de intersección de las rectas $\overline{\mathbf{BB'}}$ y $\overline{\mathbf{CC'}}$. Si trazamos la recta $\overline{\mathbf{OD}}$, que encuentra a la $\overline{\mathbf{AB'}}$ en el punto $\mathbf{D_1}$, lo que tendremos que establecer es que el punto $\mathbf{D_1}$ coincide con el $\mathbf{D'}$. Cortando el haz rectas de vértice $\mathbf{O}$, que pasa por los puntos $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ por las secantes $\overline{\mathbf{AB}}$ y $\overline{\mathbf{AB'}}$, tendremos

$$(\mathbf{ABCD}) = (\mathbf{AB'C'D_1})$$

y puesto que

$$(\mathbf{ABCD}) = (\mathbf{AB'C'D'})$$

resultará

$$(\mathbf{AB'C'D'}) = (\mathbf{AB'C'D_1})$$

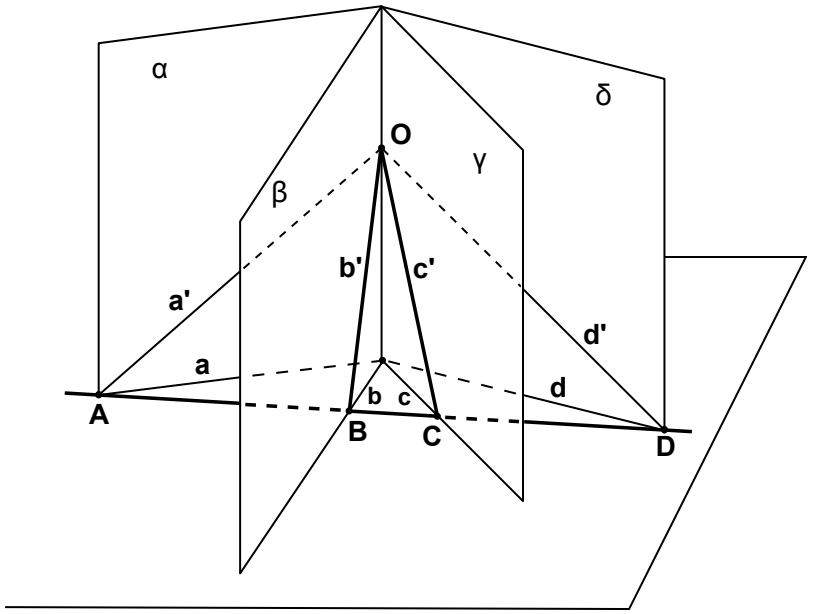
igualdad que muestra que los puntos $\mathbf{D_1}$ y $\mathbf{D'}$ son el mismo.

En consecuencia, las rectas $\overline{\mathbf{BB'}}$, $\overline{\mathbf{CC'}}$ y $\overline{\mathbf{DD'}}$ son concurrentes.

En forma análoga, definimos como **razón doble** $(\boldsymbol{\alpha\beta\gamma\delta})$ de cuatro planos de un haz, la de una sección recta $(\mathbf{abcd})$ del mismo.

Así tendremos

$$(\boldsymbol{\alpha\beta\gamma\delta}) = \frac{\mathbf{sen}\ \widehat{\mathbf{ac}}}{\mathbf{sen}\ \widehat{\mathbf{bc}}} : \frac{\mathbf{sen}\ \widehat{\mathbf{ad}}}{\mathbf{sen}\ \widehat{\mathbf{bd}}}$$



Comparando esta sección con otra oblicua, $\mathbf{a'b'c'd'}$, ambas se cortan en una cuaterna de puntos **ABCD** situada en la intersección de sus planos; por tanto

$$(\boldsymbol{\alpha\beta\gamma\delta}) = (\mathbf{abcd}) = (\mathbf{ABCD}) = (\mathbf{a'b'c'd'})$$

En consecuencia, podemos afirmar que: **la razón doble de un haz de cuatro planos es igual a la de (puntos/rayos) que resulta de cortarlo por (una recta/un plano) cualquiera no (concurrente/incidente) con la arista.**

En los razonamientos anteriores hemos supuesto propios los puntos **A**, **B**, **C**, **D** de la sección, así como la recta que la produce, lo que nos permitía escribir.

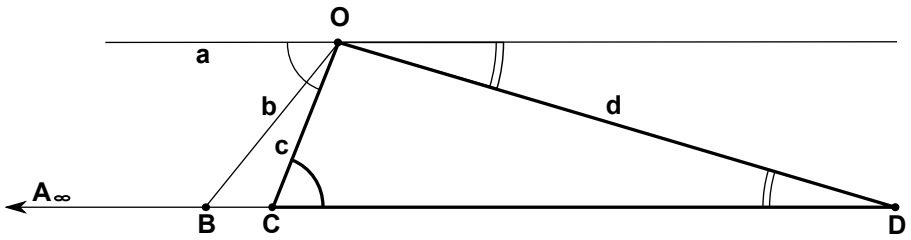
$$(\mathbf{ABCD}) = \frac{\overline{\mathbf{AC}}}{\overline{\mathbf{BC}}} : \frac{\overline{\mathbf{AD}}}{\overline{\mathbf{BD}}} = \frac{\mathbf{sen}\ \widehat{\mathbf{ac}}}{\mathbf{sen}\ \widehat{\mathbf{bc}}} : \frac{\mathbf{sen}\ \widehat{\mathbf{ad}}}{\mathbf{sen}\ \widehat{\mathbf{bd}}}$$

Si uno de los puntos, sea el **A**, fuese impropio, tendríamos

$$(\mathbf{ABCD}) = \frac{(\infty\mathbf{BC})}{(\infty\mathbf{BD})} = \frac{\overline{\infty\mathbf{C}}}{\overline{\mathbf{BC}}} : \frac{\overline{\infty\mathbf{D}}}{\overline{\mathbf{BD}}} = \frac{\overline{\mathbf{BD}}}{\overline{\mathbf{BC}}} = \frac{\overline{\mathbf{DB}}}{\overline{\mathbf{CB}}} = (\mathbf{DCB})$$

Luego, tal como obtuvimos al inicio de este apartado

$$(\mathbf{DCB}) = \frac{\mathbf{sen}\ \widehat{\mathbf{db}}}{\mathbf{sen}\ \widehat{\mathbf{cb}}} \cdot \frac{\overline{\mathbf{OD}}}{\overline{\mathbf{OC}}}$$



El paralelismo entre las rectas **a** y $\overline{\mathbf{BD}}$, permite escribir por el **Teorema de los senos**

$$\frac{\overline{\mathbf{OD}}}{\overline{\mathbf{OC}}} = \frac{\mathbf{sen}\ \widehat{\mathbf{OCD}}}{\mathbf{sen}\ \widehat{\mathbf{ODC}}}$$

y como

$$\widehat{\mathbf{OCD}} = \widehat{\mathbf{ac}} \quad , \quad \widehat{\mathbf{ODC}} = \widehat{\mathbf{ad}}$$

será

$$\frac{\overline{\mathbf{OD}}}{\overline{\mathbf{OC}}} = \frac{\mathbf{sen}\ \widehat{\mathbf{ac}}}{\mathbf{sen}\ \widehat{\mathbf{ad}}}$$

luego

$$(\mathbf{ABCD}) = (\mathbf{DCB}) = \frac{\mathbf{sen}\ \widehat{\mathbf{db}}}{\mathbf{sen}\ \widehat{\mathbf{cb}}} \cdot \frac{\mathbf{sen}\ \widehat{\mathbf{ac}}}{\mathbf{sen}\ \widehat{\mathbf{ad}}} = \frac{\mathbf{sen}\ \widehat{\mathbf{ac}}}{\mathbf{sen}\ \widehat{\mathbf{bc}}} : \frac{\mathbf{sen}\ \widehat{\mathbf{ad}}}{\mathbf{sen}\ \widehat{\mathbf{bd}}}$$

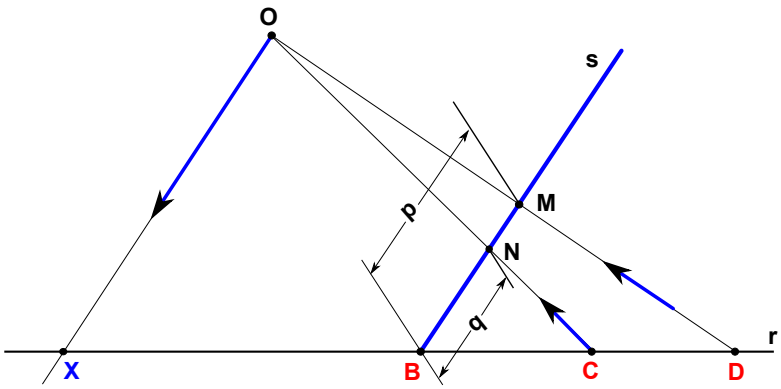
lo que muestra que subsiste la relación de arriba.

Digamos por último que, si aceptamos como **razón doble de cuatro puntos impropios** la razón doble de cuatro rayos proyectantes desde un punto cualquiera del plano, definición independiente del punto elegido, se conservará la validez de la relación anterior, aún en el caso de que se corte el haz **a b c d** por la recta impropia.

Ejemplo 4. Como aplicación de lo establecido vamos a determinar gráficamente, sobre una recta **r**, el punto **X** que forma con tres puntos **B**, **C**, **D**, situados sobre ella, una razón doble dada:

$$(\mathbf{XBCD}) = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}$$

Tracemos una recta **s** por **B**, y llevemos sobre ella $\overline{\mathbf{BM}} = \mathbf{p}$ y $\overline{\mathbf{BN}} = \mathbf{q}$ del mismo o distinto lado de según que **p** y **q** sean de igual o distinto signo. La paralela a la recta **s**, por el punto **O**, intersección de **CN** y **DM**, cortará a la recta **r** en el punto **X** buscado.



En efecto: Proyectando la cuaterna **X**, **B**, **C**, **D** desde el punto **O** sobre la recta **s** resulta:

$$(\mathbf{XBCD}) = (\boldsymbol{\infty}\mathbf{BNM}) = \frac{(\boldsymbol{\infty}\mathbf{BN})}{(\boldsymbol{\infty}\mathbf{BM})} = \frac{\overline{\mathbf{BM}}}{\overline{\mathbf{BN}}} = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}$$

Observemos que, si el valor de la razón doble se da con el punto **X** en otra posición en la cuaterna, bastaría permutarlo convenientemente para llevarlo a la primera posición. Valdría la construcción anterior, simplemente cambiando la nomenclatura:

$$(\mathrm{PQR}\mathbf{X}) = (\mathrm{R}\mathbf{X}\mathrm{PQ}) = (\mathrm{QP}\mathbf{X}\mathrm{R}) = (\mathbf{X}\mathrm{RQP})$$

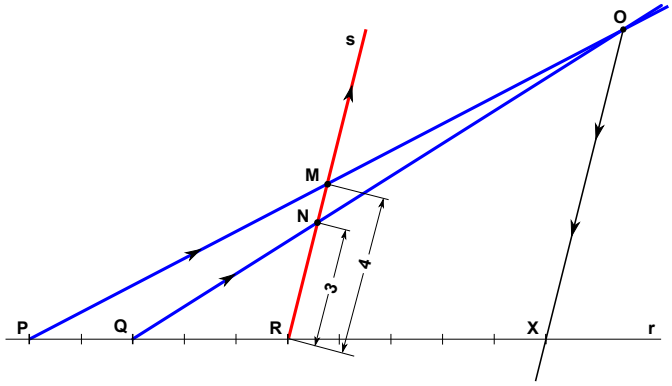
Ejemplo 5. Determinar gráficamente, sobre la recta **r**, el punto **X**, que forma con los tres puntos **P**, **Q**, **R** situados sobre ella, la razón doble: $(\mathbf{PQXR}) = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$

Antes de proceder vamos a llevar el punto **X** a la primera posición de la cuaterna

$$(\mathbf{PQXR}) = \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{PQRX})} = \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{XRQP})}$$

de donde resultará

$$(\mathbf{XRQP}) = \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{PQXR})} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$$



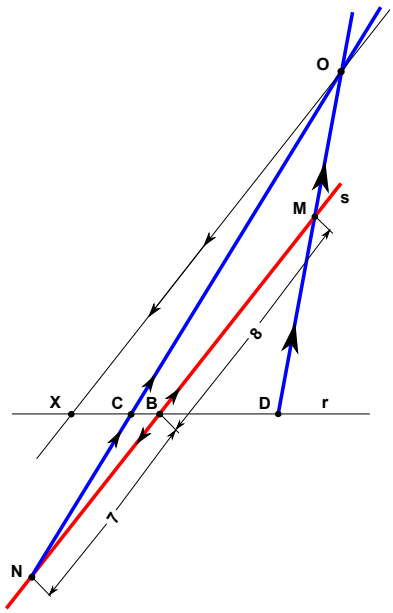
La comprobación analítica es inmediata, puesto que si:

$$\overline{\mathbf{PR}} = \mathbf{5} \quad , \quad \overline{\mathbf{QR}} = \mathbf{3} \quad , \quad \overline{\mathbf{PX}} = \mathbf{10} \quad , \quad \overline{\mathbf{QX}} = \mathbf{8}$$

tendremos que:

$$(\mathbf{PQXR}) = \frac{(\mathbf{PQX})}{(\mathbf{PQR})} = \frac{\dfrac{\overline{\mathbf{PX}}}{\overline{\mathbf{QX}}}}{\dfrac{\overline{\mathbf{PR}}}{\overline{\mathbf{QR}}}} = \frac{\dfrac{\mathbf{10}}{\mathbf{8}}}{\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$$

Ejemplo 6. Determinar gráficamente, sobre la recta **r**, el punto **X** que forma con los tres puntos **B**, **C**, **D**, situados sobre ella, la razón doble $(\mathbf{XBCD}) = -\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{7}}$.



La comprobación analítica es inmediata, puesto que si:

$$\overline{\mathbf{CB}} = \mathbf{1} \quad , \quad \overline{\mathbf{BD}} = \mathbf{4} \quad , \quad \overline{\mathbf{XC}} = \mathbf{2}$$

tendremos que:

$$(\mathbf{XBCD}) = \frac{(\mathbf{XBC})}{(\mathbf{XBD})} = \frac{\dfrac{\overline{\mathbf{XC}}}{\overline{\mathbf{BC}}}}{\dfrac{\overline{\mathbf{XD}}}{\overline{\mathbf{BD}}}} = \frac{\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{-1}}}{\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{4}}} = -\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{7}}$$

4.3 Abscisas proyectivas

Si **P**, **Q** y **R** son tres puntos distintos de una recta **r**, y es **X** un punto cualquiera de la misma, la razón doble

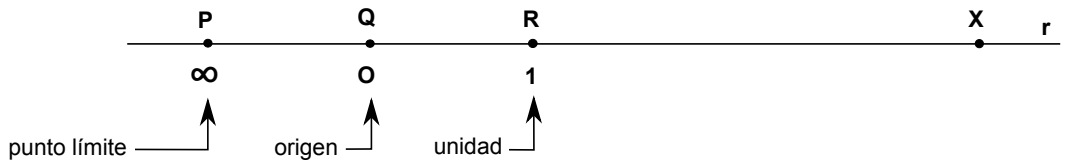
$$(\mathbf{PQRX}) = \frac{(\mathbf{PQR})}{(\mathbf{PQX})} = (\mathbf{PQR}) \cdot (\mathbf{QPX})$$

Establece una biyección entre la recta ampliada con el punto impropio (recta proyectiva) y el cuerpo de los números reales ampliado con el símbolo **∞**.

> Resulta esta biyección de la establecida por la razón simple **(QPX)**, y de expresarse la razón doble como producto de ésta por el factor constante **(PQR).**

En consecuencia, fijar sobre **r** los puntos **P**, **Q**, **R** (distintos) y la tal biyección, es establecer un sistema de referencia, al que llamaremos de **abscisas proyectivas** de la recta proyectiva. De la terna **P**, **Q**, **R** diremos que constituye la **figura de referencia**.

De la expresión: $(\mathbf{PQRX}) = \dfrac{(\mathbf{PQR})}{(\mathbf{PQX})} = \dfrac{\overline{\mathbf{PR}}}{\overline{\mathbf{QR}}} : \dfrac{\overline{\mathbf{PX}}}{\overline{\mathbf{QX}}}$, se deduce fácilmente que las abscisas proyectivas de los puntos **P**, **Q** y **R** son, respectivamente, **∞**, **0** y **1**, razón por la que se les suele llamar puntos **límite**, **origen** y **unidad** del sistema considerado.

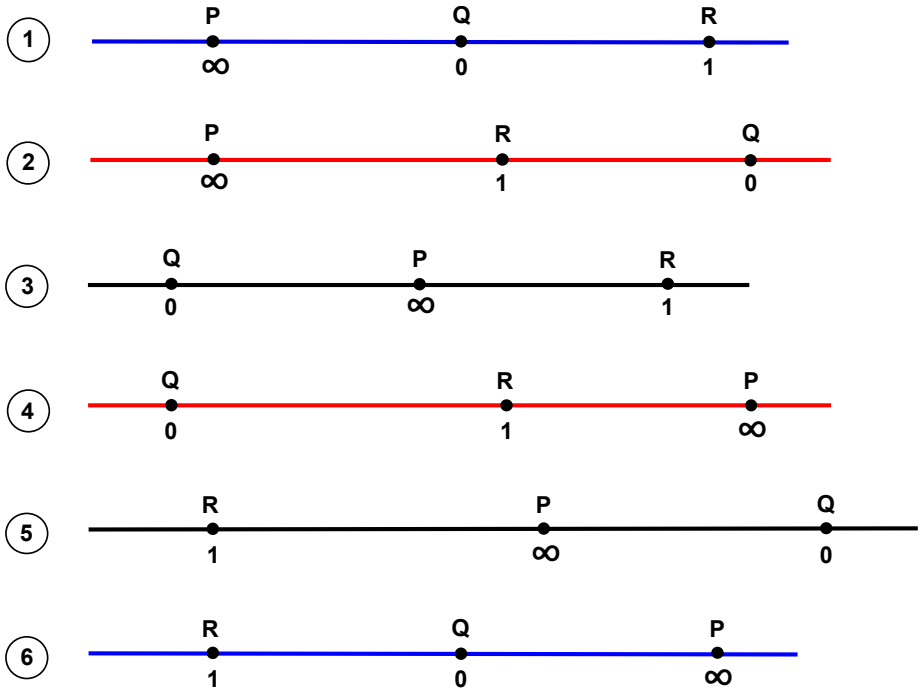


Ejemplo 1. Observemos que las abscisas proyectivas, cuya figura de referencia es: **P**(**∞**), **Q (0)**, **R (1)**, quedan visualizadas en la representación de la razón doble **(PQRX)** que hicimos en el apartado 4.1 de esta lección, variando ésta según la posición de los puntos **P**, **Q**, **R**.
Dado que:

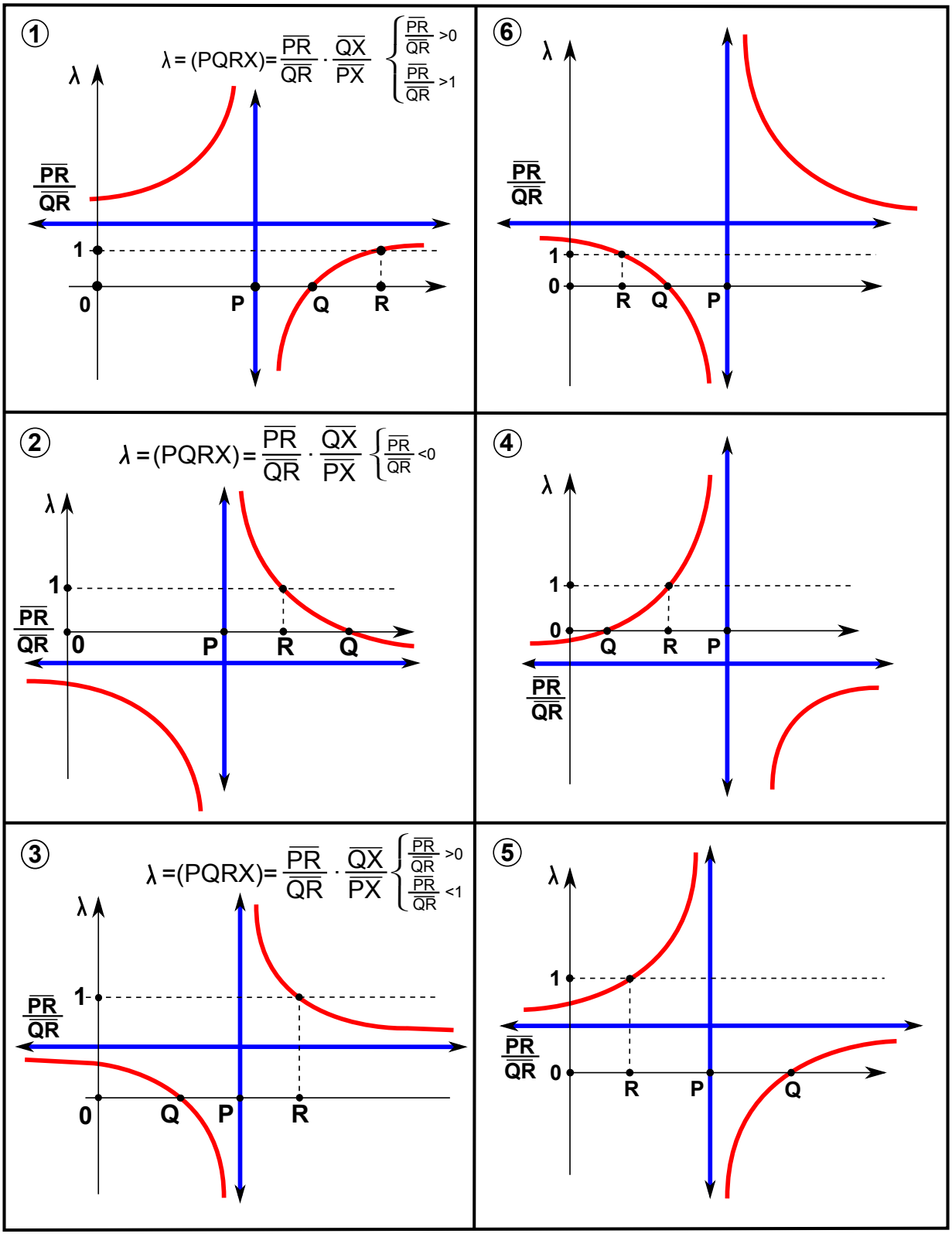
$$(\mathbf{PQRX}) = \frac{(\mathbf{PQR})}{(\mathbf{PQX})} = (\mathbf{PQR}) \cdot (\mathbf{QPX})$$

esta representación será la de la razón simple (**QPX**) afectada por un coeficiente, cuyo valor será el de la razón simple (**PQR**).

La posibles posiciones relativas de los puntos **P**, **Q**, **R** se corresponderán con las permutaciones de esos tres elementos, es decir:



proporcionando representaciones simétricas, respectivamente, las 1) y 6), 2) y 4), 3) y 5. Veámoslo en el siguiente cuadro:


①
λ = (PQRX) = PR/QR · QX/PX
PR/QR >0
PR/QR >1
λ
PR/QR
1
0
P
Q
R
⑥
λ
PR/QR
1
0
R
Q
P
②
λ = (PQRX) = PR/QR · QX/PX
PR/QR <0
λ
1
PR/QR
0
P
R
Q
④
λ
1
0
Q
R
P
PR/QR
③
λ = (PQRX) = PR/QR · QX/PX
PR/QR >0
PR/QR <1
λ
1
PR/QR
0
Q
P
R
⑤
λ
1
PR/QR
0
R
P
Q

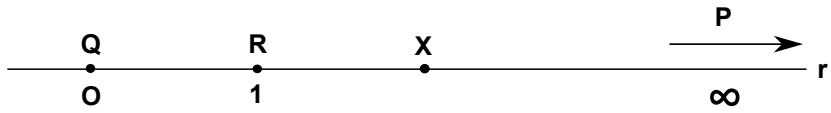
4.4 Generalidad de las abscisas proyectivas.

Las abscisas proyectivas son más generales que las **cartesianas** y que las **baricéntricas**.

En efecto:

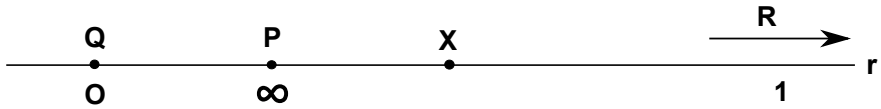
a.- Las **cartesianas** resultan de elegir el punto **P** en el impropio de la recta **r**, y los **Q** y **R** como origen y unidad de un sistema cartesiano; basta con tener en cuenta que:

$$(\mathbf{PQRX}) = (\mathbf{XRQP}) = \frac{(\mathbf{XRQ})}{(\mathbf{XRP})} = (\mathbf{XRQ}) = \frac{\overline{\mathbf{QX}}}{\overline{\mathbf{QR}}}$$



b.- Las **baricéntricas** resultan de elegir el punto **R** en el impropio de la recta **r**, y los **P** y **Q** como fundamentales; basta con tener en cuenta que

$$(\mathbf{QPRX}) = \frac{(\mathbf{QPR})}{(\mathbf{QPX})} = (\mathbf{PQX})$$



4.5 Expresión de la razón doble mediante sus abscisas cartesianas

Sean **P**, **Q**, **R** y **X** cuatro puntos de la recta **s**, y **p**, **q**,**r** y **x** sus correspondientes abscisas en el sistema cartesiano **(O, U)**.

Por definición se tiene:

$$(\mathbf{PQRX}) = \frac{\overline{\mathbf{PR}}}{\overline{\mathbf{QR}}} : \frac{\overline{\mathbf{PX}}}{\overline{\mathbf{QX}}}$$

y teniendo en cuenta que cualquiera que sean los puntos **A** y **B**, de coordenadas cartesianas, respectivas, **a** y **b**, se verifica

$$\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{OB}} - \overline{\mathbf{OA}} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$$

resultará

$$(\mathbf{PQRX}) = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{p}}{\mathbf{r}-\mathbf{q}} : \frac{\mathbf{x}-\mathbf{p}}{\mathbf{x}-\mathbf{q}}$$

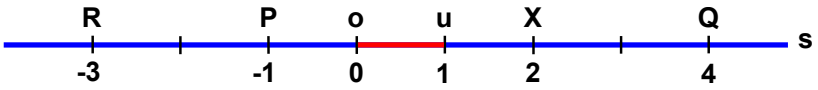
que podemos escribir, en forma abreviada, como sigue:

$$(\mathbf{PQRX}) = (\mathbf{p},\ \mathbf{q},\ \mathbf{r},\ \mathbf{x})$$

igualdad que nos sugiere la siguiente definición: Llamaremos **razón doble formal de la cuaterna ordenada de números p, q, r, x**, al desarrollo de $(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r},\mathbf{x})$, tal como figura más arriba, es decir:

$$(\mathbf{p},\ \mathbf{q},\ \mathbf{r},\ \mathbf{x}) = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{p}}{\mathbf{r}-\mathbf{q}} : \frac{\mathbf{x}-\mathbf{p}}{\mathbf{x}-\mathbf{q}}$$

Ejemplo 1. Si las coordenadas cartesianas de los cuatro puntos **P**, **Q**, **R** y **X**, de la recta **s**, son respectivamente **-1**, **4**, **-3**, **2**

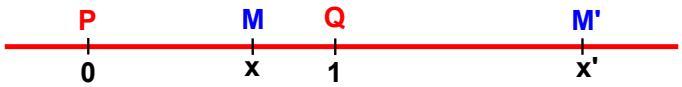


se verifica que:

$$(\mathbf{PQRX}) = \frac{\overline{\mathbf{PR}}}{\overline{\mathbf{QR}}} : \frac{\overline{\mathbf{PX}}}{\overline{\mathbf{QX}}} = \frac{-2}{-7} : \frac{3}{-2} = -\frac{4}{21}$$

$$(-\mathbf{1},\ \mathbf{4},\ -\mathbf{3},\ \mathbf{2}) = \frac{-3-(-1)}{-3-4} : \frac{2-(-1)}{2-4} = \frac{-2}{-7} : \frac{3}{-2} = -\frac{4}{21}$$

Ejemplo 2. Dada una recta, sobre la que están situados los puntos **P** y **Q**, se trata de hallar la relación que existe entre los pares de puntos **M** y **M′**, que separan armónicamente los **P** y **Q**.



Si fijamos origen y unidad, respectivamente, en los puntos **P** y **Q**, tendremos

$$(\mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{x},\ \mathbf{x}') = -\mathbf{1}$$

es decir

$$\frac{(\mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{x})}{(\mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{x}')} = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}-\mathbf{1}} : \frac{\mathbf{x}'}{\mathbf{x}'-\mathbf{1}} = -\mathbf{1}$$

de donde

$$\mathbf{x}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{1}) = -(\mathbf{x}-\mathbf{1})\cdot\mathbf{x}'$$

y operando

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'-\mathbf{x} = -\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'+\mathbf{x}'$$

siendo, en definitiva la relación pedida la siguiente:

$$\mathbf{2}\cdot\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}' = \mathbf{x}+\mathbf{x}'$$

CAPÍTULO III

Lección 5.- PROYECTIVIDAD ENTRE SERIES RECTILÍNEAS

5.1 Figuras de primera, segunda y tercera categoría

5.2 Proyectividad entre series rectilíneas

5.3 Teorema fundamental de la proyectividad

5.4 Razón doble en función de las abscisas proyectivas

5.5 Cambio de coordenadas proyectivas

5.6 Ecuación de la proyectividad en coordenadas proyectivas

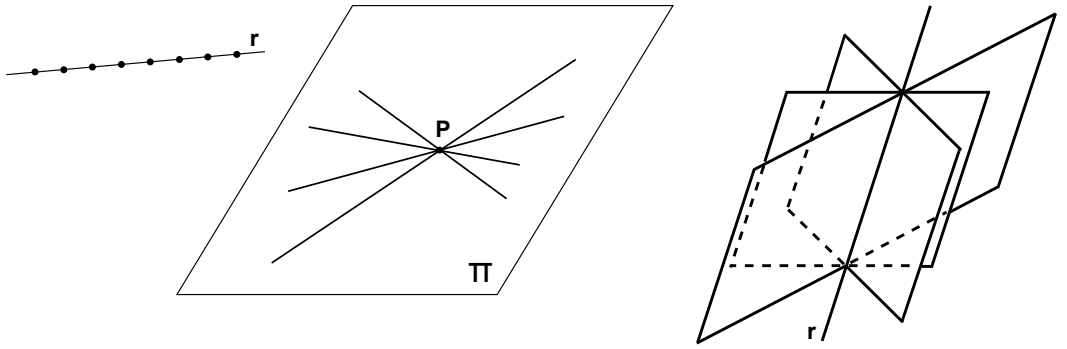
5.1 Figuras de primera, segunda y tercera categoría

Llamaremos **serie de puntos** al conjunto de los puntos de una recta **r**. De la recta **r** diremos que es la **base** de la serie.

Llamaremos **haz de rectas**, en un plano Π, al conjunto de las rectas de dicho plano que pasan por un punto dado **P**. De dicho punto **P** diremos que es el **vértice** del haz.

Llamaremos **haz de planos**, en el espacio ordinario, al conjunto de los planos que pasan por una recta dada **r**. De dicha recta **r** diremos que es la **arista** del haz.

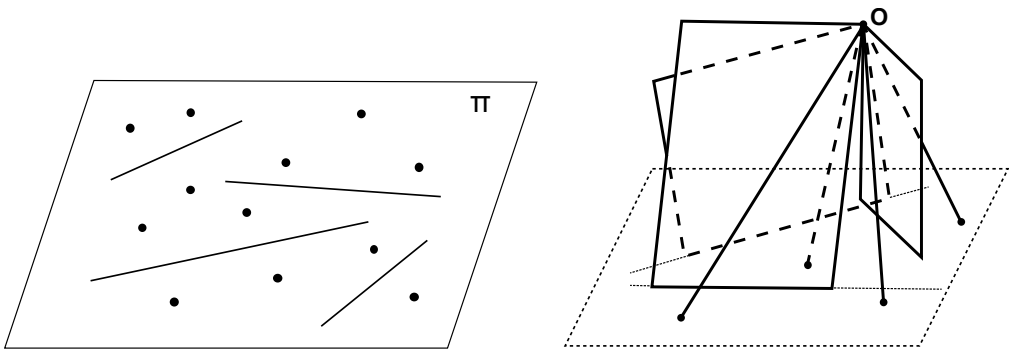
Las tres figuras: serie de puntos, haz de rectas y haz de planos, se llamarán **formas** o **figuras de primera categoría**.



Llamaremos **figura plana** a todo conjunto de puntos y rectas de un plano Π.

Llamaremos **figura radiada** a todo conjunto de planos y rectas de una radiación de centro **O**.

Las dos figuras: figura plana y figura radiada se llamarán **formas** o **figuras de segunda categoría** (si no lo son de primera).



Llamaremos **forma** o **figura de tercera categoría** a todo conjunto de puntos, rectas y planos del espacio, que no sea figura de primera o segunda categoría.

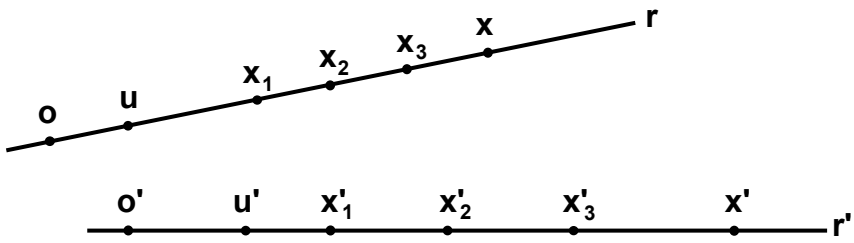
5.2 Proyectividad entre series rectilíneas

Llamaremos **proyectividad** entre las rectas **r** y $\mathbf{r'}$, consideradas cada una de ellas como conjunto de sus puntos, a toda biyección de **r** sobre $\mathbf{r'}$ que conserve la razón doble. Así, si $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$, $\mathbf{X_3}$, $\mathbf{X}$ son puntos de **r**, y $\mathbf{X'_1}$, $\mathbf{X'_2}$, $\mathbf{X'_3}$, $\mathbf{X'}$ son sus correspondientes imágenes sobre $\mathbf{r'}$ por una tal biyección, tendremos:

$$(\mathbf{X_1X_2X_3X}) = (\mathbf{X'_1X'_2X'_3X'})$$

Si, además, son: $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$, $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x'_1}, \mathbf{x'_2}, \mathbf{x'_3}, \mathbf{x'}$, las abscisas de los puntos de las dos cuaternas, respecto de sendos sistemas de referencia cartesianos, la condición anterior se traducirá en la siguiente:

$$\frac{\mathbf{x_3 - x_1}}{\mathbf{x_3 - x_2}} : \frac{\mathbf{x - x_1}}{\mathbf{x - x_2}} = \frac{\mathbf{x'_3 - x'_1}}{\mathbf{x'_3 - x'_2}} : \frac{\mathbf{x' - x'_1}}{\mathbf{x' - x'_2}}$$



Fijados los tres pares de **puntos homólogos**, $\mathbf{X_i}$, $\mathbf{X'_i}$ (i=1,2,3), la igualdad anterior puede escribirse como una **ecuación bilineal** entre las abscisas **x**, $\mathbf{x'}$ del par de puntos homólogos **X**, $\mathbf{X'}$:

$$\mathbf{a \cdot x \cdot x' + b \cdot x + c \cdot x' + d = 0}$$

que, resuelta en $\mathbf{x'}$, da:

$$\mathbf{x'} = -\frac{\mathbf{b \cdot x + d}}{\mathbf{a \cdot x + c}}$$

Resuelta en **x**, la expresión sería en todo análoga.

Es inmediato comprobar que **la función obtenida es una biyección** siempre que se verifique:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{d} \\ \mathbf{a} & \mathbf{c} \end{vmatrix} \neq \mathbf{0}$$

En efecto: Llamando **módulo** de la proyectividad al valor de

$$\begin{vmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{d} \\ \mathbf{a} & \mathbf{c} \end{vmatrix}$$

se tiene que:

1) Si el módulo no es nulo, se trata de una biyección, puesto que:

$$-\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{x_1}+\mathbf{d}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{x_1}+\mathbf{c}} = -\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{x_2}+\mathbf{d}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{x_2}+\mathbf{c}} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x_1} = \mathbf{x_2}$$

2) Si el módulo es nulo, no es una biyección, puesto que la función asocia a todos los puntos de **r** el mismo punto:

$$\mathbf{x'} = -\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$$

y a todo punto de $\mathbf{r'}$ el punto:

$$\mathbf{x} = -\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}$$

Cuando el módulo sea nulo, convendremos en decir que se trata de una **proyectividad degenerada**.

Ejemplo 1. Consideremos la proyectividad entre dos series rectilíneas $(\mathbf{x})$ y $(\mathbf{x'})$, referidas a abscisas cartesianas, dada por la siguiente ecuación.

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x'} - \mathbf{2}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{x'} + \mathbf{2} = \mathbf{0}$$

Si la resolvemos en $\mathbf{x'}$ tendremos:

$$\mathbf{x'} = \frac{\mathbf{2}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{2}}{\mathbf{x} - \mathbf{1}}$$

siendo, por tanto, el módulo de dicha proyectividad

$$\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

En consecuencia, podremos afirmar que se trata de una **proyectividad degenerada**.

PROPOSICIÓN 1. Toda proyectividad no degenerada entre dos series rectilíneas (x), (x'), referidas a abscisas cartesianas viene representada por una ecuación de la forma

$$a \cdot x \cdot x' + b \cdot x + c \cdot x' + d = 0$$

con la condición

$$\begin{vmatrix} b & d \\ a & c \end{vmatrix} \neq 0$$

Y, recíprocamente, **toda ecuación de la forma**

$$a \cdot x \cdot x' + b \cdot x + c \cdot x' + d = 0$$

con la condición

$$\begin{vmatrix} b & d \\ a & c \end{vmatrix} \neq 0$$

al interpretar x, x′ como abscisas cartesianas, representa una proyectividad entre series rectilíneas.

En efecto: Dado que la condición

$$\begin{vmatrix} b & d \\ a & c \end{vmatrix} \neq 0$$

nos asegura que se trata de una biyección, bastará con probar que se conservan las razones dobles. Así, procediendo por división

$$\begin{array}{r|l} b \cdot x+d & a \cdot x+c \\ \hline -\dfrac{b \cdot c}{a} & \dfrac{b}{a} \\ \hline -\dfrac{b \cdot c}{a} + d & \end{array}$$

podemos escribir

$$x' = -\frac{b \cdot x + d}{a \cdot x + c} = -\left(\frac{b}{a} + \frac{-\dfrac{b \cdot c}{a} + d}{a \cdot x + c} \right)$$

es decir:

$$x' = -\frac{b}{a} + \frac{b \cdot c - a \cdot d}{a \cdot (a \cdot x + c)}$$

lo que nos plantea la posibilidad de componer la función como producto de las funciones más sencillas siguientes:

$$y = a \cdot x$$

$$z = y + c$$

$$t = a \cdot z$$

$$u = \frac{1}{t}$$

$$v = (b \cdot c - a \cdot d) \cdot u$$

$$x' = -\frac{b}{a} + v$$

Observemos que sólo se presentan tres tipos de funciones, representadas por las:

$$\mathbf{y = a \cdot x} \quad , \quad \mathbf{z = y + c} \quad , \quad \mathbf{u = \frac{1}{t}}$$

Vamos a comprobar que para cada una de ellas se conserva la razón doble

Para $\mathbf{y = a \cdot x}$ tenemos:

$$\frac{\mathbf{y_3 - y_1}}{\mathbf{y_3 - y_2}} = \frac{\mathbf{a \cdot x_3 - a \cdot x_1}}{\mathbf{a \cdot x_3 - a \cdot x_2}} = \frac{\mathbf{x_3 - x_1}}{\mathbf{x_3 - x_2}}$$

es decir:

$$(\mathbf{y_1},\ \mathbf{y_2},\ \mathbf{y_3}) = (\mathbf{x_1},\ \mathbf{x_2},\ \mathbf{x_3})\ .$$

En forma análoga se establece que:

$$(\mathbf{y_1},\ \mathbf{y_2},\ \mathbf{y_4}) = (\mathbf{x_1},\ \mathbf{x_2},\ \mathbf{x_4})\ .$$

En consecuencia

$$(\mathbf{y_1},\ \mathbf{y_2},\ \mathbf{y_3},\ \mathbf{y_4}) = (\mathbf{x_1},\ \mathbf{x_2},\ \mathbf{x_3},\ \mathbf{x_4})\ .$$

Para $\mathbf{z = y + c}$ tenemos:

$$\frac{\mathbf{z_3 - z_1}}{\mathbf{z_3 - z_2}} = \frac{\mathbf{y_3 + c - (y_1 + c)}}{\mathbf{y_3 + c - (y_2 + c)}} = \frac{\mathbf{y_3 - y_1}}{\mathbf{y_3 - y_2}}$$

es decir:

$$(\mathbf{z_1},\ \mathbf{z_2},\ \mathbf{z_3}) = (\mathbf{y_1},\ \mathbf{y_2},\ \mathbf{y_3})\ .$$

En forma análoga se establece que:

$$(\mathbf{z_1},\ \mathbf{z_2},\ \mathbf{z_4}) = (\mathbf{y_1},\ \mathbf{y_2},\ \mathbf{y_4})\ .$$

En consecuencia

$$(\mathbf{z_1},\ \mathbf{z_2},\ \mathbf{z_3},\ \mathbf{z_4}) = (\mathbf{y_1},\ \mathbf{y_2},\ \mathbf{y_3},\ \mathbf{y_4})\ .$$

Para $\mathbf{u = \frac{1}{t}}$ tenemos:

$$\frac{\mathbf{u_3 - u_1}}{\mathbf{u_3 - u_2}} = \frac{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{t_3}} - \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{t_1}}}{\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{t_3}} - \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{t_2}}} = \frac{\dfrac{\mathbf{t_1 - t_3}}{\mathbf{t_3 \cdot t_1}}}{\dfrac{\mathbf{t_2 - t_3}}{\mathbf{t_3 \cdot t_2}}} = \frac{\mathbf{t_1 - t_3}}{\mathbf{t_2 - t_3}} \cdot \frac{\mathbf{t_2}}{\mathbf{t_1}}$$

es decir:

$$(\mathbf{u_1},\ \mathbf{u_2},\ \mathbf{u_3}) = (\mathbf{t_1},\ \mathbf{t_2},\ \mathbf{t_3}) \cdot \frac{\mathbf{t_2}}{\mathbf{t_1}}\ .$$

En forma análoga se establece que

$$(\mathbf{u_1},\ \mathbf{u_2},\ \mathbf{u_4}) = (\mathbf{t_1},\ \mathbf{t_2},\ \mathbf{t_4}) \cdot \frac{\mathbf{t_2}}{\mathbf{t_1}}\ .$$

En consecuencia

$$(\mathbf{u_1},\ \mathbf{u_2},\ \mathbf{u_3},\ \mathbf{u_4}) = \frac{(\mathbf{u_1},\ \mathbf{u_2},\ \mathbf{u_3})}{(\mathbf{u_1},\ \mathbf{u_2},\ \mathbf{u_4})} = \frac{(\mathbf{t_1},\ \mathbf{t_2},\ \mathbf{t_3})}{(\mathbf{t_1},\ \mathbf{t_2},\ \mathbf{t_4})} = (\mathbf{t_1},\ \mathbf{t_2},\ \mathbf{t_3},\ \mathbf{t_4})$$

Así, dado que cada una de las funciones, en que hemos descompuesto la dada, conserva la razón doble, también la conservará ésta.

Ejemplo 2. La proyectividad representada por la ecuación

$$\mathbf{x \cdot x' - 3 \cdot x + x' - 2 = 0}$$

que resuelta en $\mathbf{x'}$ nos da

$$\mathbf{x' = \frac{3 \cdot x + 2}{x + 1}},$$

no es degenerada, puesto que su módulo vale:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1 \neq 0}$$

5.3 Teorema fundamental de la proyectividad

Consideremos dos rectas cualesquiera, $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r'}$ y sobre ellas sendos sistemas de referencia cartesianos. Sean $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$, $\mathbf{X_3}$, $\mathbf{X \in r}$ y , $\mathbf{X'_1}$, $\mathbf{X'_2}$, $\mathbf{X'_3}$, $\mathbf{X' \in r'}$ siendo $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$, $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x'_1}$, $\mathbf{x'_2}$, $\mathbf{x'_3}$, $\mathbf{x'}$ sus respectivas coordenadas.
Se verifica entonces la siguiente propiedad:

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA PROYECTIVIDAD. Si $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$, $\mathbf{X_3}$ y $\mathbf{X'_1}$, $\mathbf{X'_2}$, $\mathbf{X'_3}$ son, respectivamente, distintos dos a dos, es decir, si $\mathbf{x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_1}$ y $\mathbf{x'_1 \neq x'_2 \neq x'_3 \neq x'_1}$, **existe una proyectividad, y una sola, en la cual se corresponden los tres pares de puntos $(\mathbf{X_i}, \mathbf{X'_i})$, i=1, 2, 3.**

En efecto: Si existe una proyectividad entre las series $(\mathbf{x})$ y $(\mathbf{x'})$, sea la de ecuación:

$$\mathbf{a \cdot x \cdot x' + b \cdot x + c \cdot x' + d = 0}$$

en la cual se corresponden los tres pares de puntos

$$(\mathbf{X_i}, \mathbf{X'_i}),\ \mathbf{i = 1, 2, 3}.$$

los parámetros **a**, **b**, **c**, **d** deberán satisfacer las tres condiciones que resultan al sustituir en la ecuación de la proyectividad, sucesivamente $\mathbf{x}$ por $\mathbf{x_i}$, $\mathbf{x'}$ por $\mathbf{x'_i}$ **(i=1, 2, 3)**; así

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{a \cdot x_1 \cdot x'_1 + b \cdot x_1 + c \cdot x'_1 + d = 0} \\ \mathbf{a \cdot x_2 \cdot x'_2 + b \cdot x_2 + c \cdot x'_2 + d = 0} \\ \mathbf{a \cdot x_3 \cdot x'_3 + b \cdot x_3 + c \cdot x'_3 + d = 0} \end{aligned}\right\}$$

En la hipótesis de que estas ecuaciones sean independientes, las soluciones se expresarán como producto de un factor no nulo, arbitrario, por los menores que se obtienen de la matriz del sistema al suprimir circularmente una columna.
Bajo la misma hipótesis de independencia de esas ecuaciones, podemos obtener directamente la ecuación de la única proyectividad solución, expresando la compatibilidad del sistema que se obtiene al añadir la

ecuación de la proyectividad al conjunto de las tres ecuaciones anteriores, compatibilidad que se expresa como sigue:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}' & \mathbf{x} & \mathbf{x}' & \mathbf{1} \\ \mathbf{x_1}\cdot\mathbf{x}'_1 & \mathbf{x_1} & \mathbf{x}'_1 & \mathbf{1} \\ \mathbf{x_2}\cdot\mathbf{x}'_2 & \mathbf{x_2} & \mathbf{x}'_2 & \mathbf{1} \\ \mathbf{x_3}\cdot\mathbf{x}'_3 & \mathbf{x_3} & \mathbf{x}'_3 & \mathbf{1} \end{vmatrix} = 0$$

Veamos ahora que en nuestra hipótesis

$$\mathbf{x_1} \neq \mathbf{x_2} \neq \mathbf{x_3} \neq \mathbf{x_1} \quad , \quad \mathbf{x}'_1 \neq \mathbf{x}'_2 \neq \mathbf{x}'_3 \neq \mathbf{x}'_1$$

las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{a}\cdot\mathbf{x_1}\cdot\mathbf{x}'_1 + \mathbf{b}\cdot\mathbf{x_1} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{x}'_1 + \mathbf{d} = \mathbf{0} \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{x_2}\cdot\mathbf{x}'_2 + \mathbf{b}\cdot\mathbf{x_2} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{x}'_2 + \mathbf{d} = \mathbf{0} \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{x_3}\cdot\mathbf{x}'_3 + \mathbf{b}\cdot\mathbf{x_3} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{x}'_3 + \mathbf{d} = \mathbf{0} \end{array}\right\}$$

son independientes.

El rango de la matriz de este sistema es igual o mayor que 2, puesto que el menor

$$\begin{vmatrix} \mathbf{x}'_1 & \mathbf{1} \\ \mathbf{x}'_2 & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2$$

no es nulo, en virtud de que $\mathbf{x}'_1 \neq \mathbf{x}'_2$ por hipótesis. Además, los orlados de este menor con la única fila restante y las otras dos columnas son:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{x_1}\cdot\mathbf{x}'_1 & \mathbf{x}'_1 & \mathbf{1} \\ \mathbf{x_2}\cdot\mathbf{x}'_2 & \mathbf{x}'_2 & \mathbf{1} \\ \mathbf{x_3}\cdot\mathbf{x}'_3 & \mathbf{x}'_3 & \mathbf{1} \end{vmatrix} \quad \mathbf{y} \quad \begin{vmatrix} \mathbf{x_1} & \mathbf{x}'_1 & \mathbf{1} \\ \mathbf{x_2} & \mathbf{x}'_2 & \mathbf{1} \\ \mathbf{x_3} & \mathbf{x}'_3 & \mathbf{1} \end{vmatrix}$$

y si los hacemos simultáneamente cero, resultarán las ecuaciones:

$$(\mathbf{x_1}\cdot\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x_2}\cdot\mathbf{x}'_2)\cdot(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}'_3) - (\mathbf{x_2}\cdot\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x_3}\cdot\mathbf{x}'_3)\cdot(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2) = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2})\cdot(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}'_3) - (\mathbf{x_2} - \mathbf{x_3})\cdot(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2) = \mathbf{0}$$

y por ser, por hipótesis, $\mathbf{x}'_2 \neq \mathbf{x}'_3$, haciendo

$$\frac{\mathbf{x_1}}{\mathbf{x_2}} = \overline{\mathbf{x_1}} \quad , \quad \frac{\mathbf{x_3}}{\mathbf{x_2}} = \overline{\mathbf{x_3}} \quad , \quad \frac{\mathbf{x}'_1}{\mathbf{x}'_2} = \overline{\mathbf{x}'_1} \quad , \quad \frac{\mathbf{x}'_3}{\mathbf{x}'_2} = \overline{\mathbf{x}'_3}$$

que exige $\mathbf{x_2}\cdot\mathbf{x}'_2 \neq \mathbf{0}$ (lo que no es restrictivo) se deducen las dos ecuaciones

$$(\overline{\mathbf{x_1}}\cdot\overline{\mathbf{x}'_1} - \mathbf{1})\cdot(\mathbf{1} - \overline{\mathbf{x}'_3}) - (\mathbf{1} - \overline{\mathbf{x_3}}\cdot\overline{\mathbf{x}'_3})\cdot(\overline{\mathbf{x}'_1} - \mathbf{1}) = \mathbf{0}$$

$$(\overline{\mathbf{x_1}} - \mathbf{1})\cdot(\mathbf{1} - \overline{\mathbf{x}'_3}) - (\mathbf{1} - \overline{\mathbf{x_3}})\cdot(\overline{\mathbf{x}'_1} - \mathbf{1}) = \mathbf{0}$$

que restadas y ordenadas dan, sucesivamente

$$(\mathbf{1}-\overline{\mathbf{x}'_3})\cdot(\overline{\mathbf{x}_1}\cdot\overline{\mathbf{x}'_1}-\mathbf{1}-\overline{\mathbf{x}_1}+\mathbf{1})-(\overline{\mathbf{x}'_1}-\mathbf{1})\cdot(\mathbf{1}-\overline{\mathbf{x}_3}\cdot\overline{\mathbf{x}'_3}-\mathbf{1}+\overline{\mathbf{x}_3})=\mathbf{0}$$

$$(\mathbf{1}-\overline{\mathbf{x}'_3})\cdot\mathbf{x}_1\cdot(\overline{\mathbf{x}'_1}-\mathbf{1})-(\overline{\mathbf{x}'_1}-\mathbf{1})\cdot\overline{\mathbf{x}}_3\cdot(\mathbf{1}-\overline{\mathbf{x}'_3})=\mathbf{0}$$

$$(\mathbf{1}-\overline{\mathbf{x}'_3})\cdot(\overline{\mathbf{x}'_1}-\mathbf{1})\cdot(\overline{\mathbf{x}_1}-\overline{\mathbf{x}'_3})=\mathbf{0}$$

condición, esta última, que sólo puede cumplirse si se verifica una de las tres siguientes:

$$\mathbf{x}'_3=\mathbf{x}'_2\quad,\quad\mathbf{x}'_1=\mathbf{x}'_2\quad,\quad\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_3$$

incompatibles con nuestra hipótesis.

En consecuencia, el rango de la matriz del sistema sobre el que hemos estado razonando es 3, y por tanto sus ecuaciones son independientes.

5.4 Razón doble en función de las abscisas proyectivas

Sean $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$, $\mathbf{X_3}$, $\mathbf{X_4}$ cuatro puntos de la recta **r**, y

$$\mathbf{x_i}=(\mathbf{PQRX_i})\quad,\quad\mathbf{i}=\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3},\ \mathbf{4}$$

sus abscisas proyectivas en el sistema de puntos fundamentales **P**, **Q**, **R**.

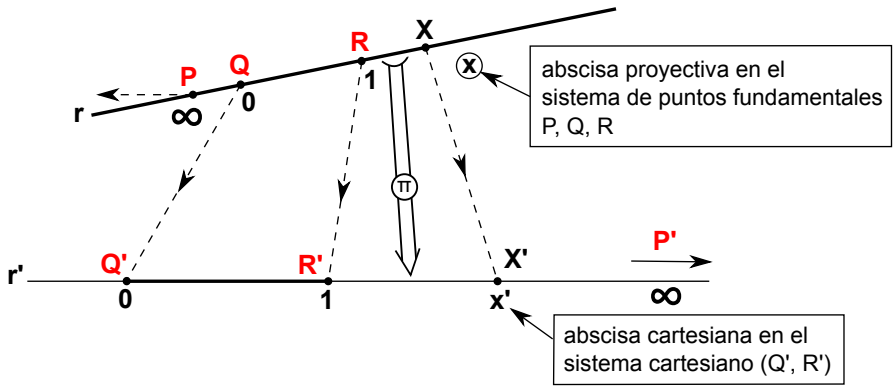
Sea $\mathbf{r}'$ otra recta, cualquiera, que utilizaremos como auxiliar en nuestro razonamiento.

En virtud del **Teorema fundamental de la proyectividad**, establecido en el apartado anterior, entre **r** y $\mathbf{r}'$ existirá una proyectividad $\mathbf{\Pi}$, y una sola, que transforma **P** en el punto impropio de $\mathbf{r}'$, y **Q**, **R** en dos puntos distintos, respectivamente $\mathbf{Q}'$ y $\mathbf{R}'$.

Dado que $\mathbf{\Pi}$ conserva la razón doble, si $\mathbf{X'_i}$ es el homólogo de $\mathbf{X_i}$, para i=1,2,3,4, tendremos:

$$\mathbf{x_i}=(\mathbf{PQRX_i})=(\mathbf{P'Q'R'X'_i})$$

Ahora bien, en el apartado 4.4, de la lección anterior, establecimos que por ser $\mathbf{P}'$ el punto impropio de la recta $\mathbf{r}'$, la razón doble $(\mathbf{P'Q'R'X'_i})$ es la abscisa cartesiana del punto $\mathbf{X'_i}$, en el sistema que tiene como origen $\mathbf{Q}'$ y como punto unidad el $\mathbf{R}'$.



Como se verifica, por la proyectividad $\mathbf{\Pi}$:

$$(\mathbf{X_1X_2X_3X_4}) = (\mathbf{X'_1X'_2X'_3X'_4})$$

y por lo que acabamos de ver

$$(\mathbf{X'_1X'_2X'_3X'_4}) = (\mathbf{x_1},\ \mathbf{x_2},\ \mathbf{x_3},\ \mathbf{x_4})$$

resulta, en definitiva, que

$$(\mathbf{X_1X_2X_3X_4}) = (\mathbf{x_1},\ \mathbf{x_2},\ \mathbf{x_3},\ \mathbf{x_4})$$

es decir: **también en el caso de las abscisas proyectivas la razón doble de cuatro puntos se expresa por la razón doble formal de sus abscisas.**

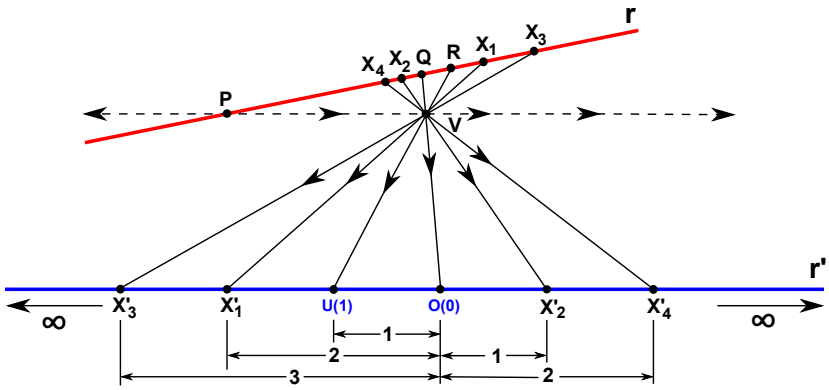
Ejemplo 1. Dado el sistema de puntos fundamental **P**, **Q**, **R**, de abscisas proyectivas, respectivamente, **∞**, **0**, **1**, y cuatro puntos de la recta **r** que los contiene: $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$, $\mathbf{X_3}$, $\mathbf{X_4}$, de abscisas proyectivas, respecto del sistema de puntos fundamentales dado, respectivamente: **2**, **-1**, **3**, **-2**, se verifica que

$$(\mathbf{X_1X_2X_3X_4}) = (\mathbf{2},\ \mathbf{-1},\ \mathbf{3},\ \mathbf{-2}) = \frac{(\mathbf{2},\ \mathbf{-1},\ \mathbf{3})}{(\mathbf{2},\ \mathbf{-1},\ \mathbf{-2})} = \frac{\mathbf{3-2}}{\mathbf{3-(-1)}} : \frac{\mathbf{-2-2}}{\mathbf{-2-(-1)}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{16}}$$

El razonamiento anterior, que nos ha permitido establecer la razón doble de las abscisas proyectivas de cuatro puntos, como la razón doble formal de esas abscisas, en la misma forma que lo hacíamos cuando el sistema de referencia era cartesiano, nos sugiere un cierto "malabarismo geométrico", que nos permitirá calcular la razón doble de cuatro puntos situados sobre una recta **r** en la que se ha fijado un sistema de puntos fundamentales: $\mathbf{P}(\infty)$, $\mathbf{Q(0)}$, $\mathbf{R}(1)$, trasladando el problema al de otra recta $\mathbf{r'}$, provista de un sistema cartesiano: **O(0)**, **U(1)**, determinando una proyectividad que transforma, fundamentalmente, el punto **P** de **r** en el punto impropio de la recta $\mathbf{r'}$, y los puntos **Q** y **R**, respectivamente en los **O** y **U**. La proyectividad en cuestión la estableceremos fijando un punto cualquiera, **V**, situado sobre la paralela a $\mathbf{r'}$ por el punto **P**, siendo puntos homólogos los de intersección de las rectas del haz de vértice **V** con las rectas **r** y $\mathbf{r'}$ (La justificación de que se trata de un proyectividad la veremos en la lección 10, puesto que la construcción que realizamos es en particular la de una perspectividad de centro **V**). Si somos capaces de determinar las coordenadas cartesianas de los puntos $\mathbf{X'_1}$, $\mathbf{X'_2}$, $\mathbf{X'_3}$, $\mathbf{X'_4}$ en $\mathbf{r'}$, homólogos de los $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$, $\mathbf{X_3}$, $\mathbf{X_4}$ en **r**, el problema estará resuelto, pues las coordenadas cartesianas de los $\mathbf{X'_1}$, $\mathbf{X'_2}$, $\mathbf{X'_3}$, $\mathbf{X'_4}$, serán exactamente las mismas que las coordenadas proyectivas de los $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$, $\mathbf{X_3}$, $\mathbf{X_4}$. Observemos que no precisamos conocer, a priori, dichas coordenadas proyectivas; si las conociéramos el problema no sería tal.

Ejemplo 2. Consideremos una recta **r** y, definido sobre ella, un sistema de referencia proyectivo, de puntos fundamentales **P**, **Q**, **R**, fijando en dicha recta cuatro puntos: $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$, $\mathbf{X_3}$, $\mathbf{X_4}$ Se trata de calcular la razón doble $(\mathbf{X_1X_2X_3X_4})$ utilizando el procedimiento descrito más arriba.

Evidentemente, las coordenadas proyectivas de los puntos $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$, $\mathbf{X_3}$, $\mathbf{X_4}$, en el sistema de puntos fundamentales $\mathbf{P}(\infty)$, $\mathbf{Q}(\mathbf{0})$, $\mathbf{R}(\mathbf{1})$, sobre $\mathbf{r}$, coincidirán con las correspondientes a los puntos $\mathbf{X'_1}$, $\mathbf{X'_2}$, $\mathbf{X'_3}$, $\mathbf{X'_4}$ en el sistema cartesiano $\mathbf{O}(\mathbf{0})$, $\mathbf{U}(\mathbf{1})$ sobre $\mathbf{r}$



Haciendo las mediciones sobre la recta $\mathbf{r'}$ tendremos en el sistema cartesiano $(\mathbf{O}, \mathbf{U})$:

$$\textbf{Coordenadas de} \begin{cases} \mathbf{X'_1} & \cdots\cdots\cdots -\mathbf{2} \\ \mathbf{X'_2} & \cdots\cdots\cdots \mathbf{1} \\ \mathbf{X'_3} & \cdots\cdots\cdots -\mathbf{3} \\ \mathbf{X'_4} & \cdots\cdots\cdots \mathbf{2} \end{cases}$$

luego:

$$(\mathbf{X_1X_2X_3X_4}) = (\mathbf{X'_1X'_2X'_3X'_4}) = (-\mathbf{2},\ \mathbf{1},\ -\mathbf{3},\ \mathbf{2}) = \frac{-\mathbf{3}-(-\mathbf{2})}{-\mathbf{3}-\mathbf{1}} : \frac{\mathbf{2}-(-\mathbf{2})}{\mathbf{2}-\mathbf{1})} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{16}}$$

5.5 Cambio de abscisas proyectivas

Como consecuencia inmediata de lo establecido en el apartado anterior resultará la fórmula del cambio de coordenadas proyectivas.

Sea $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ la figura de referencia **ANTIGUA**, y $\mathbf{P'}$, $\mathbf{Q'}$, $\mathbf{R'}$, la figura de referencia **NUEVA** determinada ésta por:

$$\mathbf{p} = (\mathbf{PQRP'})$$

$$\mathbf{q} = (\mathbf{PQRQ'})$$

$$\mathbf{r} = (\mathbf{PQRR'})$$

Por definición, para un punto $\mathbf{X}$, son:

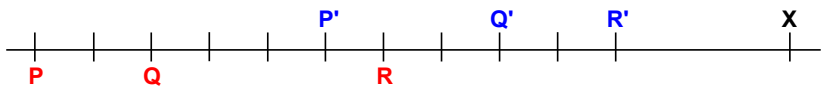
$$\mathbf{x} = (\mathbf{PQRX}) \quad , \quad \mathbf{x'} = (\mathbf{P'Q'R'X})$$

y en consecuencia

$$\mathbf{x'} = (\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{x})$$

Ejemplo 1. Consideremos, sobre una recta, el sistema de puntos fundamentales **P**, **Q**, **R**, de abscisas proyectivas (sistema **antiguo**), y los puntos $\mathbf{P'}$, $\mathbf{Q'}$, $\mathbf{R'}$, que constituirán el **nuevo** sistema de referencia, dados por sus coordenadas proyectivas.

$$\mathbf{p} = (\mathbf{PQRP'}) = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{10}} \quad , \quad \mathbf{q} = (\mathbf{PQRQ'}) = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{8}} \quad , \quad \mathbf{r} = (\mathbf{PQRR'}) = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}}$$



Podemos comprobar, tomando medidas en la figura los valores dados para **p**, **q**, **r**. Veámoslo:

$$\mathbf{p} = (\mathbf{PQRP'}) = \frac{(\mathbf{PQR})}{(\mathbf{PQP'})} = \frac{\overline{\mathbf{PR}}}{\overline{\mathbf{QR}}} : \frac{\overline{\mathbf{PP'}}}{\overline{\mathbf{QP'}}} = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{4}} : \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{10}}$$

$$\mathbf{q} = (\mathbf{PQRQ'}) = \frac{(\mathbf{PQR})}{(\mathbf{PQQ'})} = \frac{\overline{\mathbf{PR}}}{\overline{\mathbf{QR}}} : \frac{\overline{\mathbf{PQ'}}}{\overline{\mathbf{QQ'}}} = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{4}} : \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{6}} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{8}}$$

$$\mathbf{r} = (\mathbf{PQRR'}) = \frac{(\mathbf{PQR})}{(\mathbf{PQR'})} = \frac{\overline{\mathbf{PR}}}{\overline{\mathbf{QR}}} : \frac{\overline{\mathbf{PR'}}}{\overline{\mathbf{QR'}}} = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{4}} : \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{8}} = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}}$$

En las mediciones hemos tomado como unidad el segmento

Si el punto **X** de la recta tiene por coordenadas **x** y $\mathbf{x'}$, respecto de los sistemas **antiguo** y **nuevo**, se verificará:

$$\mathbf{x'} = (\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{10}}, \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{8}}, \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}}, \mathbf{x}) = \frac{\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}} - \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{10}}}{\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}} - \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{8}}} : \frac{\mathbf{x} - \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{10}}}{\mathbf{x} - \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{8}}} = \mathbf{4} : \frac{\mathbf{40 \cdot x - 36}}{\mathbf{40 \cdot x - 9}}$$

es decir

$$\mathbf{x'} = \frac{\mathbf{40 \cdot x - 9}}{\mathbf{10 \cdot x - 9}} \ ,$$

ecuación del cambio de abscisas proyectivas. Si nos interesase, ahora, determinar la coordenada **antigua** en función de la **nueva**, bastaría con despejar la **x**; así

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{9 \cdot x' - 9}}{\mathbf{10 \cdot x' - 40}}$$

5.6 Ecuación de la proyectividad en coordenadas proyectivas

Los razonamientos del apartado 5.2 se pueden repetir utilizando abscisas proyectivas puesto que, según establecimos después, la razón doble de cuatro puntos se expresa, igual que en coordenadas cartesianas, por la razón doble formal.

En consecuencia, también una proyectividad entre series, en coordenadas proyectivas, se traduce en una ecuación bilineal entre las abscisas del par de puntos homólogos.

Ejemplo 1. Consideremos la proyectividad representadas por la ecuación:

$$\mathbf{x \cdot x' - 3 \cdot x + x' - 2 = 0}$$

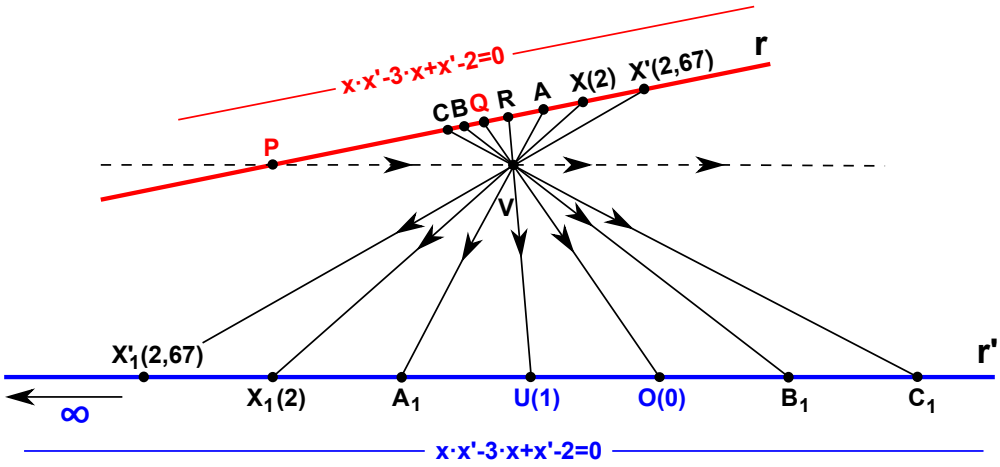
Tanto si interpretamos las abscisas como proyectivas o como cartesianas, podemos escribir

$$\mathbf{x' = \frac{3 \cdot x + 2}{x + 1}}$$

siendo $\mathbf{x'}$ la abscisa del punto homólogo al de abscisas $\mathbf{x}$. Recordemos que, ya en un ejemplo anterior, comprobamos que se trataba de una proyectividad no degenerada.

Si suponemos esta proyectividad sobre una recta $\mathbf{r}$, referidas ambas series a una misma figura fundamental, la definida por un sistema proyectivo de puntos base $\mathbf{P}(\infty)$, $\mathbf{Q}(\mathbf{0})$, $\mathbf{R}(\mathbf{1})$, y luego la suponemos sobre otra recta $\mathbf{r'}$, pero en la que hemos definido un sistema cartesiano de puntos base $\mathbf{O}(\mathbf{0})$, $\mathbf{U}(\mathbf{1})$, podemos comprobar utilizando la construcción del ejemplo 2, del apartado 5.4, que calificábamos de "malabarismo geométrico", lo que apuntábamos al iniciar este apartado.

La construcción nos permite comprobar varias cosas, entre otras que es indistinto interpretar la ecuación de la proyectividad respecto de un sistema proyectivo como de uno cartesiano, evidentemente desde un punto de vista analítico que no geométrico.

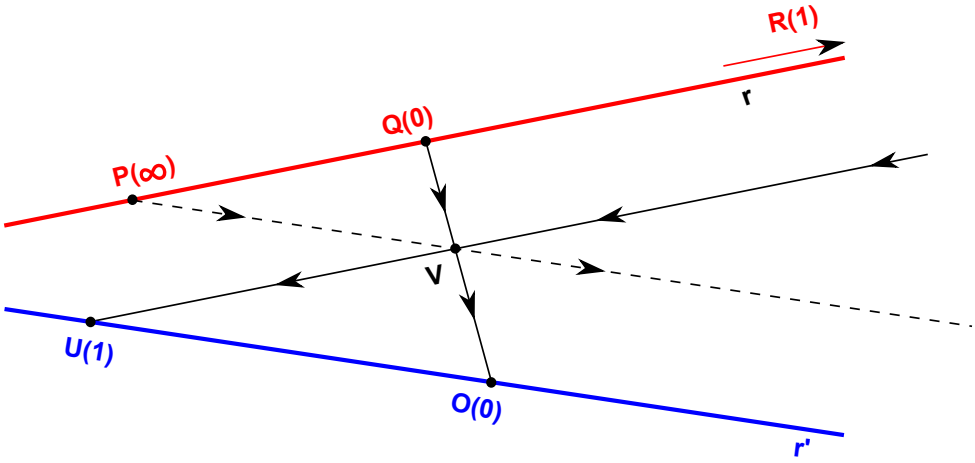


Dado que la abscisas cartesiana resulta ser un caso particular de la abscisa proyectiva, y que la abscisas baricéntrica se expresa como inversa de una abscisa proyectiva, podemos afirmar que cualesquiera que sean las coordenadas, la ecuación de una proyectividad entre series será una bilineal entre las abscisas de los puntos homólogos:

$$\mathbf{a \cdot x \cdot x' + b \cdot x + c \cdot x' + d = 0}$$

La construcción anterior, la del "malabarismo geométrico", se aplica al pie de la letra en el caso de tratarse de abscisas baricéntricas, en lugar de proyectivas; la única diferencia, que no es tal, consiste en que, dado que un sistema baricéntrico resulta de uno proyectivo, $\mathbf{P}(\infty)$, $\mathbf{Q}(\mathbf{0})$, $\mathbf{R}(\mathbf{1})$, al llevar el punto $\mathbf{R}$ al impropio de la recta $\mathbf{r}$ que lo soporta, el punto unidad del sistema cartesiano sobre la recta $\mathbf{r'}$, a la que trasladamos el problema, resultará ser la

intersección de $\mathbf{r}'$ con la paralela a la **r** por el punto **V**. El esquema sería el siguiente, y con él operaríamos como en los casos anteriores.



Lección 6.- PROYECTIVIDADES HIPERBÓLICAS, PARABÓLICAS Y ELÍPTICAS

6.1 Puntos dobles de una proyectividad entre series superpuestas
6.2 Forma reducida de la ecuación de una proyectividad
6.3 La ecuación de una proyectividad en coordenadas cartesianas

6.1 Puntos dobles de una proyectividad entre series superpuestas.

Consideremos una proyectividad definida sobre la recta **r**, referidas ambas series a una misma figura fundamental, siendo su ecuación

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'+\mathbf{b}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{x}'+\mathbf{d}=\mathbf{0}$$

De un punto, $\mathbf{Y}\in\mathbf{r}$, diremos que es **doble** en la proyectividad si su homólogo coincide con él. Evidentemente, si no estuviésemos hablando de series superpuestas no podríamos hablar de puntos dobles.
Así, resulta que, la condición para que un punto sea doble $(\mathbf{y}=\mathbf{y}')$ es que su abscisa sea raíz de la ecuación

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{y}^{\mathbf{2}}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot\mathbf{y}+\mathbf{d}=\mathbf{0}$$

Esta ecuación, cuyos coeficientes son reales, tendrá:

- Dos raíces reales distintas, o
- una raíz real doble, o
- dos raíces imaginarias conjugadas,

según que su discriminante: $(\mathbf{b}+\mathbf{c})^{\mathbf{2}}-\mathbf{4}\cdot\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}$, sea respectivamente, positivo, nulo o negativo. A las correspondientes posibles proyectividades se les denominará: **hiperbólica**, **parabólica** o **elíptica**.

Ejemplo 1. Consideremos la proyectividad entre dos series rectilíneas superpuestas, $(\mathbf{x})$ y $(\mathbf{x}')$, referidas ambas a una misma figura fundamental, siendo su ecuación.

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'-\mathbf{x}-\mathbf{x}'-\mathbf{8}=\mathbf{0}$$

Sus eventuales puntos dobles nos vendrán dados por las soluciones de la ecuación.

$$\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}-\mathbf{y}-\mathbf{y}-\mathbf{8}=\mathbf{0}$$

es decir

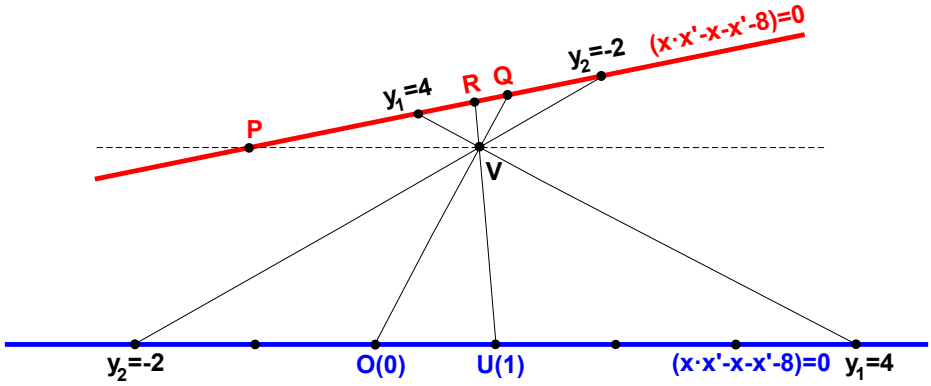
$$\mathbf{y}^{\mathbf{2}}-\mathbf{2}\cdot\mathbf{y}-\mathbf{8}=\mathbf{0}$$

y serán

$$\mathbf{y}=\frac{\mathbf{2}\pm\sqrt{\mathbf{4}+\mathbf{32}}}{\mathbf{2}}=\frac{\mathbf{2}\pm\mathbf{6}}{\mathbf{2}}=\begin{cases}\mathbf{y_1}=\mathbf{4}\\ \mathbf{y_2}=-\mathbf{2}\end{cases}$$

Por tener dos raíces reales distintas, la proyectividad será **hiperbólica**.

Según establecimos en la lección anterior podremos permitirnos la siguiente interpretación geométrica:



Ejemplo 2. Sea, ahora, la proyectividad entre dos series rectilíneas superpuestas, $(\mathbf{x})$ y $(\mathbf{x}')$, referidas ambas a una misma figura fundamental, de ecuación:

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{3}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{x}'+\mathbf{4}=\mathbf{0}$$

Sus eventuales puntos dobles vendrán dados por las soluciones de la ecuación

$$\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{3}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{y}+\mathbf{4}=\mathbf{0}$$

es decir

$$\mathbf{y}^2+\mathbf{4}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{4}=\mathbf{0}$$

y serán

$$\mathbf{y}=\frac{-\mathbf{4}\pm\sqrt{\mathbf{16}-\mathbf{16}}}{\mathbf{2}}=\begin{cases}\mathbf{y_1}=-\mathbf{2}\\ \mathbf{y_2}=-\mathbf{2}\end{cases}$$

Por tener una raíz real doble la proyectividad será **parabólica**.

Ejemplo 3. Si la proyectividad entre dos series rectilíneas superpuestas, $(\mathbf{x})$ y $(\mathbf{x}')$, referidas ambas a una misma figura fundamental, tiene por ecuación:

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'+\mathbf{x}-\mathbf{x}'+\mathbf{4}=\mathbf{0}$$

sus eventuales puntos dobles vendrán dados por las soluciones de la ecuación

$$\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{y}-\mathbf{y}+\mathbf{4}=\mathbf{0}$$

es decir

$$\mathbf{y}^2+\mathbf{4}=\mathbf{0}$$

y serán

$$\mathbf{y}=\begin{cases}\mathbf{y_1}=\mathbf{2}\cdot\mathbf{i}\\ \mathbf{y_2}=-\mathbf{2}\cdot\mathbf{i}\end{cases}$$

Por tener dos raíces imaginarias conjugadas la proyectividad será **elíptica**.

Observemos que, en el caso de una **proyectividad hiperbólica**, su ecuación presenta una forma particularmente sencilla si situamos los puntos origen y límite, de la figura de referencia, en los puntos dobles.

En este caso, en efecto, la ecuación:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{y^2}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot\mathbf{y}+\mathbf{d}=\mathbf{0},$$

que nos da los puntos dobles, deberá tener como soluciones:

$$\mathbf{y}=\boldsymbol{\infty}\quad\mathbf{e}\quad\mathbf{y}=\mathbf{0}$$

en consecuencia deberá ser:

$$\mathbf{a}=\mathbf{0}\quad\mathbf{y}\quad\mathbf{d}=\mathbf{0}$$

con lo cual la ecuación de la proyectividad se escribirá

$$\mathbf{x'}=-\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}}\cdot\mathbf{x}$$

y si hacemos: $\mathbf{k}=-\dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}}$, tendremos lo que llamaremos su **ecuación canónica**:

$$\mathbf{x'}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}$$

Llamaremos a **k característica** de la proyectividad hiperbólica representada por la ecuación canónica. La característica tiene una interpretación geométrica interesante: Es la razón doble de la cuaterna formada por los puntos dobles y un par cualquiera de puntos homólogos en la proyectividad dada por la ecuación $\mathbf{x'}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}$:

$$(\boldsymbol{\infty},\ \mathbf{0},\ \mathbf{x},\ \mathbf{x'})=(\boldsymbol{\infty},\ \mathbf{0},\ \mathbf{x},\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})=(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x},\ \mathbf{x},\ \mathbf{0})=\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}{\mathbf{x}}=\mathbf{k}$$

En el caso de tratarse de una **proyectividad parabólica**, si tomamos el punto doble como punto límite de la figura de referencia, la ecuación

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{y^2}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot\mathbf{y}+\mathbf{d}=\mathbf{0}$$

que nos da los puntos dobles, deberá tener una raíz doble $\boldsymbol{\infty}$, para lo cual será necesario que

$$\mathbf{a}=\mathbf{0}\quad\mathbf{y}\quad(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{0}$$

con lo que, la ecuación de la proyectividad se escribirá

$$\mathbf{x'}=\mathbf{x}-\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{c}}$$

y si hacemos: $\mathbf{p}=-\dfrac{\mathbf{d}}{\mathbf{c}}$

$$\mathbf{x'}=\mathbf{x}+\mathbf{p}$$

Ejemplo 4. Conviene observar que, antes de iniciar el proceso de obtención de una forma sencilla para la ecuación de una proyectividad, es preciso comprobar que dicha proyectividad no es degenerada, puesto que puede ocurrir que el procedimiento formal, que nos da los eventuales puntos dobles, nos facilite unos valores, y luego al proceder a la reducción no obtengamos ningún resultado.

Así, la ecuación de la proyectividad

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x'}-\mathbf{4}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{x'}-\mathbf{4}=\mathbf{0}$$

nos daría como puntos dobles las raíces de la ecuación:

$$y^2 - 3 \cdot y - 4 = 0$$

es decir

$$y = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = -1 \end{cases}$$

Sin embargo, dicha proyectividad es degenerada puesto que es:

$$x' = \frac{4 \cdot x + 4}{x + 1}$$

siendo su módulo

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo 5. Consideremos la proyectividad, entre dos series rectilíneas superpuestas, (x) y (x'), referidas ambas a una misma figura fundamental, siendo su ecuación:

$$x \cdot x' - x - x' - 8 = 0$$

Esta proyectividad no es degenerada, puesto que es

$$x' = \frac{x+8}{x-1}$$

y su módulo vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 8 = -9 \neq 0$$

Sus puntos dobles, dados por la ecuación

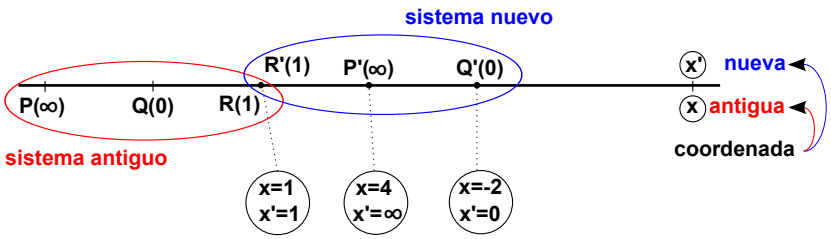
$$y^2 - 2 \cdot y - 8 = 0$$

valen

$$y_1 = 4 \quad , \quad y_2 = -2,$$

que por ser reales y distintos nos dicen que se trata de una proyectividad **hiperbólica**.

Para transformar la ecuación de la proyectividad dada en otra particularmente sencilla, vamos a cambiar el sistema de referencia, situando los puntos origen y límite de la figura de referencia en los puntos dobles; el punto unidad puede ser cualquiera, y en este caso lo hacemos coincidir con el unidad antiguo.



El dibujo anterior es un esquema que nos puede guiar en el planteamiento del cambio de sistema de referencia.

Así, tendremos que

$$\mathbf{p} = (\mathbf{PQRP'}) = \mathbf{4}$$
$$\mathbf{q} = (\mathbf{PQRQ'}) = \mathbf{-2}$$
$$\mathbf{r} = (\mathbf{PQRR'}) = \mathbf{1}$$

siendo, por tanto, la ecuación del cambio de coordenadas:

$$\mathbf{x'} = (\mathbf{p},\ \mathbf{q},\ \mathbf{r},\ \mathbf{x}) = (\mathbf{4},\ \mathbf{-2},\ \mathbf{1},\ \mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{4},\ \mathbf{-2},\ \mathbf{1})}{(\mathbf{4},\ \mathbf{-2},\ \mathbf{x})} = \frac{\dfrac{\mathbf{1-4}}{\mathbf{1-(-2)}}}{\dfrac{\mathbf{x-4}}{\mathbf{x-(-2)}}} = \frac{\mathbf{-1}}{\dfrac{\mathbf{x-4}}{\mathbf{x+2}}} = \frac{\mathbf{x+2}}{\mathbf{4-x}}$$

es decir

$$\boxed{\begin{matrix}\mathbf{x'}\text{, coordenada nueva}\\ (\mathbf{x}\text{, coordenada antigua})\end{matrix}} \longrightarrow \mathbf{x'} = \frac{\mathbf{x+2}}{\mathbf{4-x}} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{x} = \frac{\mathbf{4\cdot x' - 2}}{\mathbf{1+x'}} \longleftarrow \boxed{\begin{matrix}\mathbf{x}\text{, coordenada antigua}\\ (\mathbf{x'}\text{, coordenada nueva})\end{matrix}}$$

La sustitución que haremos en la ecuación de la proyectividad dada

$$\mathbf{x\cdot x' - x - x' - 8 = 0}$$

será la siguiente

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{4\cdot y - 2}}{\mathbf{1+y}} \quad , \quad \mathbf{x'} = \frac{\mathbf{4\cdot y' - 2}}{\mathbf{1+y'}}$$

resultando

$$\frac{\mathbf{4\cdot y - 2}}{\mathbf{1+y}} \cdot \frac{\mathbf{4\cdot y' - 2}}{\mathbf{1+y'}} - \frac{\mathbf{4\cdot y - 2}}{\mathbf{1+y}} - \frac{\mathbf{4\cdot y' - 2}}{\mathbf{1+y'}} - \mathbf{8 = 0}$$

y operando

$$\mathbf{(4\cdot y - 2)\cdot(4\cdot y' - 2) - (4\cdot y - 2)\cdot(1+y') - (4\cdot y' - 2)\cdot(1+y) - 8\cdot(1+y)\cdot(1+y') = 0}$$

$$\mathbf{16\cdot y\cdot y' - 8\cdot y - 8\cdot y' + 4 - [4\cdot y + 4\cdot y\cdot y' - 2 - 2\cdot y'] - [4\cdot y' + 4\cdot y\cdot y' - 2 - 2\cdot y] - 8\cdot[1+y'+y+y\cdot y'] = 0}$$

$$\mathbf{y\cdot y'\cdot(16-4-4-8) + y\cdot(-8-4+2-8) + y'\cdot(-8+2-4-8) + (4+2+2-8) = 0}$$

es decir

$$\mathbf{-18\cdot y - 18\cdot y' = 0}$$

o lo que es lo mismo:

$$\mathbf{y' = -y}$$

que es la **ecuación canónica** de la proyectividad dada, que reescrita con las variables habituales sería:

$$\mathbf{x' = -x}$$

siendo, por tanto, la **característica** de esta proyectividad hiperbólica

$$\mathbf{K = -1}$$

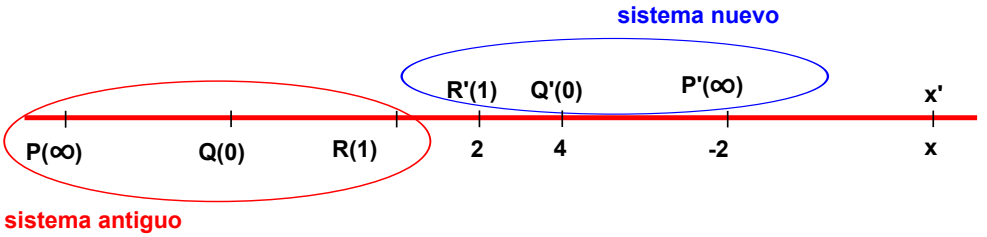
Ejemplo 6. Si rehacemos el ejemplo anterior, en el que la proyectividad

$$x \cdot x' - x - x' - 8 = 0$$

tenía como puntos dobles los valores

$$y_1 = 4 \quad , \quad y_2 = -2$$

pero situando, ahora, los puntos origen y límite de la nueva figura de referencia en los 4 y -2, e incluso variando también la situación del punto unidad, en el 2, tendremos que:



Así, en este caso:

$$p = (PQRP') = -2$$
$$q = (PQRQ') = 4$$
$$r = (PQRR') = 2$$

siendo, por tanto, la ecuación del cambio de coordenadas

$$x' = (p,\ q,\ r,\ x) = (-2,\ 4,\ 2,\ x) = \frac{(-2,\ 4,\ 2)}{(-2,\ 4,\ x)} = \frac{\dfrac{2-(-2)}{2-4}}{\dfrac{x-(-2)}{x-4}} = \frac{-2}{\dfrac{x+2}{x-4}} = \frac{8-2\cdot x}{x+2}$$

es decir

$$\boxed{\begin{matrix} x', \text{ coordenada nueva} \\ (x, \text{ coordenada antigua}) \end{matrix}} \longrightarrow x' = \frac{8-2\cdot x}{x+2} \iff x = \frac{8-2\cdot x'}{x'+2} \longleftarrow \boxed{\begin{matrix} x, \text{ coordenada antigua} \\ (x', \text{ coordenada nueva}) \end{matrix}}$$

La sustitución que haremos en la ecuación de la proyectividad dada

$$x \cdot x' - x - x' - 8 = 0$$

será la siguiente

$$x = \frac{8-2\cdot y}{y+2} \quad , \quad x' = \frac{8-2\cdot y'}{y'+2}$$

resultando

$$\frac{8-2\cdot y}{y+2} \cdot \frac{8-2\cdot y'}{y'+2} - \frac{8-2\cdot y}{y+2} - \frac{8-2\cdot y'}{y'+2} - 8 = 0$$

y operando

$$(8-2\cdot y)\cdot(8-2\cdot y') - (8-2\cdot y)\cdot(y'+2) - (8-2\cdot y')\cdot(y+2) - 8\cdot(y+2)\cdot(y'+2) = 0$$

$$64 - 16\cdot y' - 16\cdot y + 4\cdot y\cdot y' - [8\cdot y' + 16 - 2\cdot y\cdot y' - 4\cdot y] - [8\cdot y + 16 - 2\cdot y\cdot y' - 4\cdot y'] - 8\cdot[y\cdot y' + 2\cdot y + 2\cdot y' + 4] = 0$$

$$y\cdot y'\cdot(4+2+2-8) + y\cdot(-16+4-8-16) + y'\cdot(-16-8+4-16) + (64-16-16-32) = 0$$

es decir

$$-36\cdot y-36\cdot y'=0$$

o lo que es lo mismo:

$$y'=-y$$

que es la **ecuación canónica** de la proyectividad dada que reescrita con las variables habituales sería:

$$x'=-x$$

siendo, por tanto, la **característica** de esta proyectividad, dada por esta ecuación canónica:

$$k=-1$$

Observemos que el resultado al que hemos llegado coincide con el que obtuvimos en el ejemplo anterior. Sin embargo, antes de llegar a una conclusión conviene ver lo que ocurre en los ejemplos siguientes. Es inmediato, por otra parte, comprobar que la característica es la razón doble de la cuaterna formada por los puntos dobles y un par cualquiera de puntos homólogos en la proyectividad dada $(x'=x)$. En efecto:

$$(\infty,\ 0,\ x,\ x')=(\infty,\ 0,\ x,\ -x)=-1$$

Ejemplo 7. Consideremos la proyectividad entre dos series rectilíneas interpuestas (x) y (x'), referidas ambas a una misma figura fundamental, siendo su ecuación

$$x\cdot x'+3\cdot x-2\cdot x'-2=0$$

Esta proyectividad no es degenerada, puesto que es

$$x'=\frac{-3\cdot x+2}{x-2}$$

y su módulo vale

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=(-3)\cdot(-2)-1\cdot 2=4\neq 0$$

Sus puntos dobles, dados por la ecuación

$$y^2+y-2=0$$

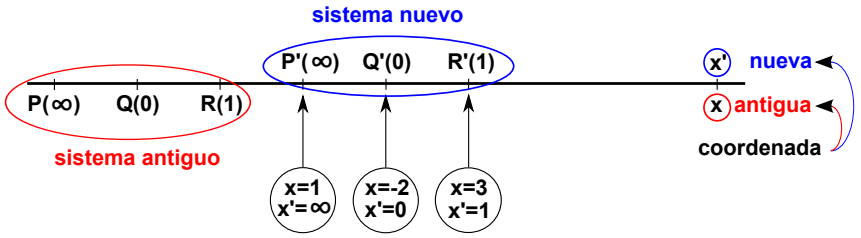
valen

$$y_1=1\quad,\quad y_2=-2$$

que, por ser reales y distintos, nos dicen que se trata de una proyectividad **hiperbólica**.

Como hicimos en los ejemplos anteriores, vamos a cambiar el sistema de referencia situando los puntos origen y límite de la figura de referencia en los puntos dobles; el punto unidad, que puede ser cualquiera, vamos a situarlo en el punto 3.

El esquema que manejaremos será el siguiente:



Tendremos, en este caso:

$$\mathbf{p} = (\mathbf{PQRP'}) = \mathbf{1}$$
$$\mathbf{q} = (\mathbf{PQRQ'}) = \mathbf{-2}$$
$$\mathbf{r} = (\mathbf{PQRR'}) = \mathbf{3}$$

siendo, por tanto, la ecuación del cambio de coordenadas

$$\mathbf{x'} = (\mathbf{p},\ \mathbf{q},\ \mathbf{r},\ \mathbf{x}) = (\mathbf{1},\ \mathbf{-2},\ \mathbf{3},\ \mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{1},\ \mathbf{-2},\ \mathbf{3})}{(\mathbf{1},\ \mathbf{-2},\ \mathbf{x})} = \frac{\dfrac{\mathbf{3-1}}{\mathbf{3-(-2)}}}{\dfrac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{x-(-2)}}} = \frac{\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}}{\dfrac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{x+2}}} = \frac{\mathbf{2\cdot x+4}}{\mathbf{5\cdot x-5}}$$

es decir:

$\mathbf{x'}$, **coordenada nueva** ($\mathbf{x}$, **coordenada antigua**)	$\longrightarrow \mathbf{x'} = \dfrac{\mathbf{2\cdot x+4}}{\mathbf{5\cdot x-5}} \iff \mathbf{x} = \dfrac{\mathbf{5\cdot x'+4}}{\mathbf{5\cdot x'-2}} \longleftarrow$	$\mathbf{x}$, **coordenada antigua** ($\mathbf{x'}$, **coordenada nueva**)

La sustitución que haremos en la ecuación de la proyectividad dada

$$\mathbf{x\cdot x' + 3\cdot x - 2\cdot x' - 2 = 0}$$

será la siguiente

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{5\cdot y+4}}{\mathbf{5\cdot y-2}} \quad , \quad \mathbf{x'} = \frac{\mathbf{5\cdot y'+4}}{\mathbf{5\cdot y'-2}}$$

resultando

$$\frac{\mathbf{5\cdot y+4}}{\mathbf{5\cdot y-2}} \cdot \frac{\mathbf{5\cdot y'+4}}{\mathbf{5\cdot y'-2}} + \mathbf{3}\cdot \frac{\mathbf{5\cdot y+4}}{\mathbf{5\cdot y-2}} - \mathbf{2}\cdot \frac{\mathbf{5\cdot y'+4}}{\mathbf{5\cdot y'-2}} - \mathbf{2} = \mathbf{0}$$

y operando

$$\mathbf{(5\cdot y+4)\cdot(5\cdot y'+4)+3\cdot(5\cdot y+4)\cdot(5\cdot y'-2)-2\cdot(5\cdot y'+4)\cdot(5\cdot y-2)-2\cdot(5\cdot y-2)\cdot(5\cdot y'-2)=0}$$

$$\mathbf{25\cdot y\cdot y'+20\cdot y+20\cdot y'+16+75\cdot y\cdot y'-30\cdot y+60\cdot y'-24-50\cdot y\cdot y'+20\cdot y'-40\cdot y+16-50\cdot y\cdot y'+20\cdot y+20\cdot y'-8=0}$$

$$\mathbf{y\cdot y'\cdot(25+75-50-50)+y\cdot(20-30-40+20)+y'\cdot(20+60+20+20)+(16-24+16-8)=0}$$

$$\mathbf{-30\cdot y + 120\cdot y' = 0}$$
$$\mathbf{y' = \frac{1}{4}\cdot y}$$

que es la **ecuación canónica** de la proyectividad dada, que reescrita con las variables habituales sería:

$$\mathbf{x' = \frac{1}{4}\cdot x}$$

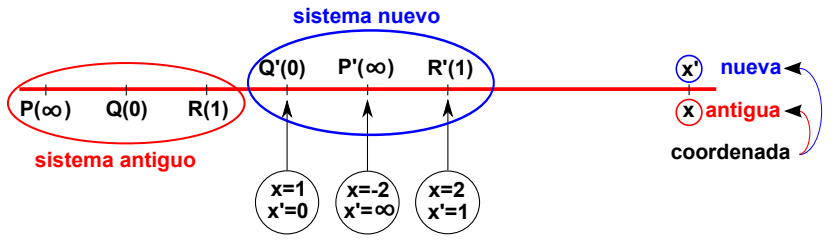
siendo, por tanto, la característica de esta proyectividad dada por esta ecuación canónica

$$\mathbf{k = \frac{1}{4}}$$

Ejemplo 8. Si rehacemos el ejemplo anterior, en el que la proyectividad

$$x \cdot x' + 3 \cdot x - 2 \cdot x' - 2 = 0$$

tenía como puntos dobles los valores $y_1 = 1$, $y_2 = -2$, pero situando ahora los puntos origen y límite de la nueva figura de referencia en los -2 y 1, e incluso variando también la situación del punto unidad al 2, tendremos que



En este caso serán

$$p = (PQRP') = -2$$
$$q = (PQRQ') = 1$$
$$r = (PQRR') = 2$$

y la ecuación del cambio de coordenadas

$$x' = (p,\ q,\ r,\ x) = (-2,\ 1,\ 2,\ x) = \frac{(-2,\ 1,\ 2)}{(-2,\ 1,\ x)} = \frac{\dfrac{2-(-2)}{2-1}}{\dfrac{x-(-2)}{x-1}} = \frac{\dfrac{4}{x+2}}{\dfrac{x-1}{}} = \frac{4 \cdot x - 4}{x+2}$$

es decir

x', coordenada nueva (x, coordenada antigua)	$\longrightarrow x' = \dfrac{4 \cdot x - 4}{x+2} \iff x = \dfrac{2 \cdot x' + 4}{-x' + 4} \longleftarrow$	x, coordenada antigua (x', coordenada nueva)

La sustitución que haremos en la ecuación de la proyectividad dada

$$x \cdot x' + 3 \cdot x - 2 \cdot x' - 2 = 0$$

será la siguiente

$$x = \frac{2 \cdot y + 4}{-y + 4} \quad , \quad x' = \frac{2 \cdot y' + 4}{-y' + 4}$$

resultando

$$\frac{2 \cdot y + 4}{-y + 4} \cdot \frac{2 \cdot y' + 4}{-y' + 4} + 3 \cdot \frac{2 \cdot y + 4}{-y + 4} - 2 \cdot \frac{2 \cdot y' + 4}{-y' + 4} - 2 = 0$$

y operando

$$(2 \cdot y + 4) \cdot (2 \cdot y' + 4) + 3 \cdot (2 \cdot y + 4) \cdot (-y' + 4) - 2 \cdot (2 \cdot y' + 4) \cdot (-y + 4) - 2 \cdot (-y + 4) \cdot (-y' + 4) = 0$$

$$4 \cdot y \cdot y' + 8 \cdot y + 8 \cdot y' + 16 - 6 \cdot y \cdot y' + 24 \cdot y - 12 \cdot y' + 48 + 4 \cdot y \cdot y' - 16 \cdot y' + 8 \cdot y - 32 - 2 \cdot y \cdot y' + 8 \cdot y + 8 \cdot y' - 32 = 0$$

$$y \cdot y' \cdot (4 - 6 + 4 - 2) + y \cdot (8 + 24 + 8 + 8) + y' \cdot (8 - 12 - 16 + 8) + (16 + 48 - 32 - 32) = 0$$

$$48 \cdot y - 12 \cdot y' = 0$$

$$y' = 4 \cdot y$$

que es la **ecuación canónica** de la proyectividad dada, que reescrita con las variables habituales sería:

$$x' = 4 \cdot x$$

siendo, por tanto, la característica de esta proyectividad dada por esta ecuación canónica

$$k = 4$$

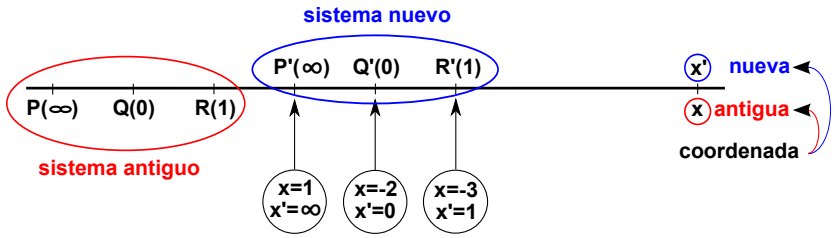
Ejemplo 9. Consideramos de nuevo la proyectividad entres dos series rectilíneas superpuestas, (x) y (x'), referidas ambas a una misma figura fundamental, siendo su ecuación

$$x \cdot x' + 3 \cdot x - 2 \cdot x' - 2 = 0$$

y sus puntos dobles

$$y_1 = 1 \quad , \quad y_2 = -2$$

Siguiendo la metodología de los ejemplos anteriores vamos a cambiar el sistema de referencia, situando los puntos origen y límite de la figura de referencia en los puntos dobles; el punto unidad vamos a situarlo ahora en el punto -3. El esquema que manejaremos será el siguiente:



Tendremos, en este caso

$$p = (PQRP') = 1$$
$$q = (PQRQ') = -2$$
$$r = (PQRR') = -3$$

siendo, por tanto, la ecuación del cambio de coordenadas

$$x' = (p,\ q,\ r,\ x) = (1,\ -2,\ -3,\ x) = \frac{(1,\ -2,\ -3)}{(1,\ -2,\ x)} = \frac{\dfrac{-3-1}{-3-(-2)}}{\dfrac{x-1}{x-(-2)}} = \frac{\dfrac{-4}{-1}}{\dfrac{x-1}{x+2}} = \frac{4 \cdot x + 8}{x-1}$$

es decir

$$\boxed{\begin{matrix} x', \text{ coordenada nueva} \\ (x, \text{ coordenada antigua}) \end{matrix}} \longrightarrow x' = \frac{4 \cdot x + 8}{x-1} \iff x = \frac{x' + 8}{x' - 4} \longleftarrow \boxed{\begin{matrix} x, \text{ coordenada antigua} \\ (x', \text{ coordenada nueva}) \end{matrix}}$$

La sustitución que haremos en la ecuación de la proyectividad dada

$$x \cdot x' + 3 \cdot x - 2 \cdot x' - 2 = 0$$

será la siguiente:

$$x = \frac{y + 8}{y - 4} \quad , \quad x' = \frac{y' + 8}{y' - 4}$$

resultando

$$\frac{y+8}{y-4}\cdot\frac{y'+8}{y'-4}+3\cdot\frac{y+8}{y-4}-2\cdot\frac{y'+8}{y'-4}-2=0$$

y operando

$$(y+8)\cdot(y'+8)+3\cdot(y+8)\cdot(y'-4)-2\cdot(y'+8)\cdot(y-4)-2\cdot(y-4)\cdot(y'-4)=0$$

$$y\cdot y'+8\cdot y+8\cdot y'+64+3\cdot y\cdot y'-12\cdot y+24\cdot y'-96-2\cdot y\cdot y'+8\cdot y'-16\cdot y+64-2\cdot y\cdot y'+8\cdot y+8\cdot y'-32=0$$

$$y\cdot y'\cdot(1+3-2-2)+y\cdot(8-12-16+8)+y'\cdot(8+24+8+8)+(64-96+64-32)=0$$

$$-12\cdot y+48\cdot y'=0$$

$$y'=\frac{1}{4}\cdot y,$$

que es la ecuación canónica de la proyectividad dada, que reescrita con las variables habituales sería:

$$x'=\frac{1}{4}\cdot x$$

siendo por tanto, la **característica** de esta proyectividad hiperbólica dada por esta ecuación canónica

$$k=\frac{1}{4}\ .$$

En el caso de los ejemplos, 5 y 6, llegábamos a una única ecuación canónica, y por tanto a una única característica, mientras que en los siguientes tres ejemplos, 7, 8 y 9, dependiendo de la elección de los puntos dobles para situar los puntos origen y límite de la figura de referencia, obteníamos, según el caso, ecuaciones canónicas distintas, pero con características inversas la una de la otra, lo que está de acuerdo con que si en una razón doble permutamos los dos primeros elementos el resultado es que su valor se invierte; así

$$(PQRX)=\frac{(PQR)}{(PQX)}=\frac{\frac{\overline{PR}}{\overline{QR}}}{\frac{\overline{PX}}{\overline{QX}}}=\frac{\frac{\overline{QX}}{\overline{PX}}}{\frac{\overline{QR}}{\overline{PR}}}=\frac{(QPX)}{(QPR)}=\frac{1}{\frac{(QPR)}{(QPX)}}=\frac{1}{(QPRX)}$$

En el caso de los ejemplos, 5 y 6, dado que la característica era $k=-1$, las dos eventuales ecuaciones canónica coincidían.

Ejemplo 10. Consideremos la proyectividad, entre dos series rectilíneas superpuestas, (x) y (x'), referidas ambas a una misma figura fundamental, siendo su ecuación

$$x\cdot x'+3\cdot x+x'+4=0\ .$$

Esta proyectividad no es degenerada, puesto que es

$$x'=\frac{-3\cdot x-4}{x+1}$$

y su módulo vale

$$\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-3+4=1\neq 0\ .$$

Sus puntos dobles, dados por la ecuación

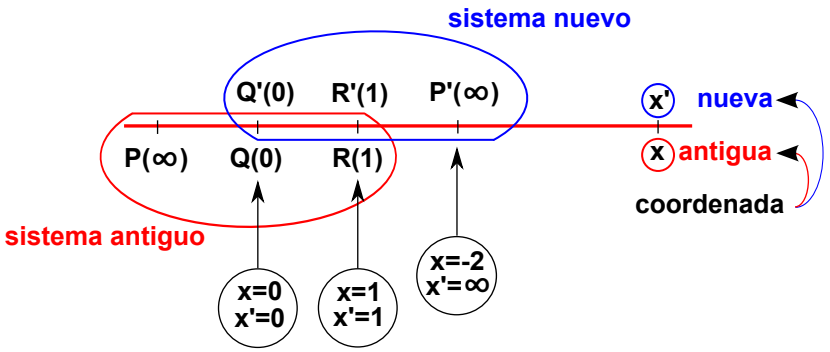
$$y^2+4\cdot y+4=0$$

valen

$$y_1 = -2, \quad , \quad y_2 = -2$$

que al ser iguales, nos permiten afirmar que se trata de una proyectividad **parabólica**.

Para transformar la ecuación de la proyectividad dada en otra particularmente sencilla vamos a cambiar el sistema de referencia, situando el punto límite de la nueva figura de referencia en el único punto doble, manteniendo, en este caso, tanto el punto origen como el unidad. El esquema de este planteamiento sería el siguiente:



Así, tendremos que

$$p = (PQRP') = -2$$
$$q = (PQRQ') = 0$$
$$r = (PQRR') = 1$$

siendo, por tanto, la ecuación del cambio de coordenadas

$$x' = (p,\ q,\ r,\ x) = (-2,\ 0,\ 1,\ x) = \frac{(-2,\ 0,\ 1)}{(-2,\ 0,\ x)} = \frac{\dfrac{1-(-2)}{1-0}}{\dfrac{x-(-2)}{x-0}} = \frac{3}{\dfrac{x+2}{x}} = \frac{3\cdot x}{x+2}$$

es decir

$$\boxed{\begin{matrix}x', \text{ coordenada nueva}\\ (x, \text{ coordenada antigua})\end{matrix}} \longrightarrow x' = \frac{3\cdot x}{x+2} \iff x = \frac{2\cdot x'}{3-x'} \longleftarrow \boxed{\begin{matrix}x, \text{ coordenada antigua}\\ (x', \text{ coordenada nueva})\end{matrix}}$$

La sustitución que haremos en la ecuación de la proyectividad será la siguiente:

$$x = \frac{2\cdot y}{3-y} \quad , \quad x' = \frac{2\cdot y'}{3-y'}$$

resultando

$$\frac{2\cdot y}{3-y}\cdot\frac{2\cdot y'}{3-y'} + 3\cdot\frac{2\cdot y}{3-y} + \frac{2\cdot y'}{3-y'} - 4 = 0$$

y operando

$$2\cdot y\cdot 2\cdot y' + 3\cdot 2\cdot y\cdot(3-y') + 2\cdot y'\cdot(3-y) + 4\cdot(3-y)\cdot(3-y') = 0$$

$$4\cdot y\cdot y' + 18\cdot y - 6\cdot y\cdot y' + 6\cdot y' - 2\cdot y\cdot y' + 36 - 12\cdot y' - 12\cdot y + 4\cdot y\cdot y' = 0$$

$$y\cdot y'\cdot(4-6-2+4) + y\cdot(18-12) + y'\cdot(6-12) + 36 = 0$$

$$6\cdot y - 6\cdot y' + 36 = 0$$

$$y' = y + 6$$

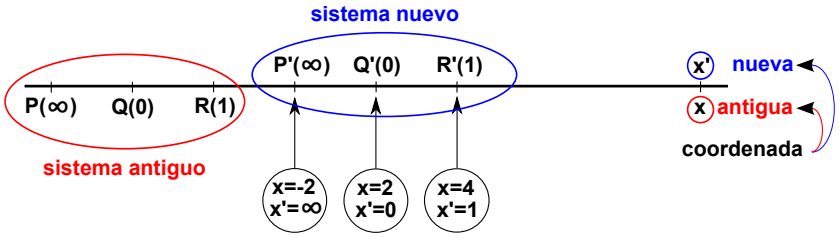
que es la **ecuación canónica** de la proyectividad dada, que reescrita con las variables habituales sería

$$x' = x + 6$$

Ejemplo 11. Si rehacemos el ejemplo anterior, en el que la proyectividad

$$x \cdot x' + 3 \cdot x + x' + 4 = 0$$

tenía un único punto doble, $y_1 = y_2 = -2$, en el que seguimos colocando el punto límite de la nueva figura de referencia, pero variando el origen y unidad, que situaremos en los puntos 2 y 4, tendremos que



Así, tendremos que

$$p = (PQRP') = -2$$
$$q = (PQRQ') = 2$$
$$r = (PQRR') = 4$$

siendo, por tanto, la ecuación del cambio de coordenadas

$$x' = (p,\ q,\ r,\ x) = (-2,\ 2,\ 4,\ x) = \frac{(-2,\ 2,\ 4)}{(-2,\ 2,\ x)} = \frac{\dfrac{4-(-2)}{4-2}}{\dfrac{x-(-2)}{x-2}} = \frac{3}{\dfrac{x+2}{x-2}} = \frac{3\cdot x - 6}{x+2}$$

es decir

$$\boxed{\begin{matrix} x', \text{ coordenada nueva} \\ (x, \text{ coordenada antigua}) \end{matrix}} \longrightarrow x' = \frac{3\cdot x - 6}{x+2} \iff x = \frac{2\cdot x' + 6}{3 - x'} \longleftarrow \boxed{\begin{matrix} x, \text{ coordenada antigua} \\ (x', \text{ coordenada nueva}) \end{matrix}}$$

La sustitución que haremos en la ecuación de la proyectividad será la siguiente:

$$x = \frac{2\cdot y + 6}{3 - y} \quad , \quad x' = \frac{2\cdot y' + 6}{3 - y'}$$

resultando

$$\frac{2\cdot y + 6}{3 - y} \cdot \frac{2\cdot y' + 6}{3 - y'} + 3 \cdot \frac{2\cdot y + 6}{3 - y} + \frac{2\cdot y' + 6}{3 - y'} - 4 = 0$$

y operando

$$(2\cdot y+6)\cdot(2\cdot y'+6)+3\cdot(2\cdot y+6)\cdot(3-y')+(2\cdot y'+6)\cdot(3-y)+4\cdot(3-y)\cdot(3-y')=0$$

$$4\cdot y\cdot y'+12\cdot y+12\cdot y'+36+18\cdot y-6\cdot y\cdot y'+54-18\cdot y'+6\cdot y'-2\cdot y\cdot y'+18-6\cdot y+36-12\cdot y'-12\cdot y+4\cdot y\cdot y'=0$$

$$y\cdot y'\cdot(4-6-2+4)+y\cdot(12+18-6-12)+y'\cdot(12-18+6-12)+(36+54+18+36)=0$$

$$12\cdot y - 12\cdot y' + 144 = 0$$

$$y' = y + 12$$

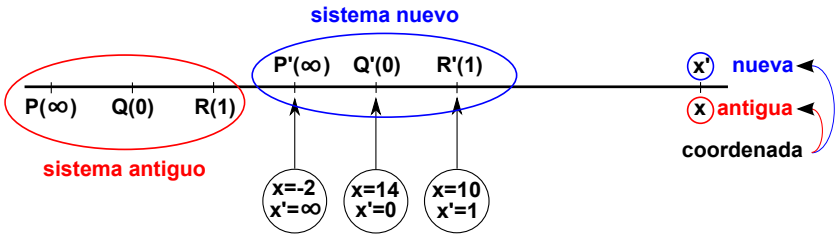
Luego, la ecuación de la proyectividad dada reescrita con las variables habituales sería

$$x' = x + 12$$

Ejemplo 12. Si rehacemos el ejemplo anterior, en el que la proyectividad

$$x\cdot x' + 3\cdot x + x' + 4 = 0$$

tenía un único punto doble, $y_1 = y_2 = -2$, en el que seguimos colocando el punto límite de la nueva figura de referencia, pero variando el origen y unidad, que situaremos en los puntos 14 y 10, tendremos que



Así, tendremos que

$$p = (PQRP') = -2$$
$$q = (PQRQ') = 14$$
$$r = (PQRR') = 10$$

siendo, por tanto, la ecuación del cambio de coordenadas

$$x' = (p,\ q,\ r,\ x) = (-2,\ 14,\ 10,\ x) = \frac{(-2,\ 14,\ 10)}{(-2,\ 14,\ x)} = \frac{\dfrac{10-(-2)}{10-14}}{\dfrac{x-(-2)}{x-14}} = \frac{\dfrac{12}{-4}}{\dfrac{x+2}{x-14}} = \frac{42-3\cdot x}{x+2}$$

es decir

$$\boxed{\begin{matrix}x', \text{ coordenada nueva}\\ (x, \text{ coordenada antigua})\end{matrix}} \longrightarrow x' = \frac{42-3\cdot x}{x+2} \iff x = \frac{42-2\cdot x'}{x'+3} \longleftarrow \boxed{\begin{matrix}x, \text{ coordenada antigua}\\ (x', \text{ coordenada nueva})\end{matrix}}$$

La sustitución que haremos, en la ecuación de la proyectividad será la siguiente:

$$x = \frac{42-2\cdot y}{y+3} \quad , \quad x' = \frac{42-2\cdot y'}{y'+3}$$

resultando

$$\frac{42-2\cdot y}{y+3}\cdot\frac{42-2\cdot y'}{y'+3} + 3\cdot\frac{42-2\cdot y}{y+3} + \frac{42-2\cdot y'}{y'+3} - 4 = 0$$

y operando

$$(42-2\cdot y)\cdot(42-2\cdot y')+3\cdot(42-2\cdot y)\cdot(y'+3)+(42-2\cdot y')\cdot(y+3)+4\cdot(y+3)\cdot(y'+3)=0$$

$$1764-84\cdot y'-84\cdot y+4\cdot y\cdot y'+126\cdot y'+378-6\cdot y\cdot y'-18\cdot y+42\cdot y+126-2\cdot y\cdot y'-6\cdot y'+4\cdot y\cdot y'+12\cdot y+12\cdot y'+36=0$$

$$\mathbf{y\cdot y'\cdot(4-6-2+4)+y\cdot(-84-18+42+12)+y'\cdot(-84+126-6+12)+2304=0}$$

$$\mathbf{-48\cdot y+48\cdot y'+2304=0}$$

$$\mathbf{y'=y-48}$$

Luego, la ecuación de la proyectividad dada reescrita con las variables habituales sería

$$\mathbf{x'=x-48}$$

6.2 Forma reducida de la ecuación de una proyectividad

Sean ahora dos series proyectivas cualesquiera. Vamos a ver que referidas a sistemas convenientes, en principio distintos, se puede conseguir una forma reducida, independientemente de que las serie sean, o no, superpuestas.

En efecto: Si hacemos que se correspondan el punto límite de la primera serie con el origen de la segunda, y además, el origen de la primera serie con el límite de la segunda, resultará, de la ecuación general de la proyectividad

$$\mathbf{a\cdot x\cdot x'+b\cdot x+c\cdot x'+d=0}$$

al dividir por $\mathbf{x}$, y hacer tender $\mathbf{x}$ a infinito al mismo tiempo que $\mathbf{x'}$ a cero, la condición

$$\mathbf{b=0}$$

expresará la correspondencia de $\mathbf{x=\infty}$ con $\mathbf{x'=0}$.
Permutando los papeles de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x'}$, se obtiene la condición

$$\mathbf{c=0}$$

Así, la ecuación de la proyectividad será

$$\mathbf{a\cdot x\cdot x'+d=0},$$

y haciendo $\mathbf{k=-\dfrac{d}{a}}$, resultará ser la siguiente:

$$\mathbf{x\cdot x'=k}$$

Ejemplo 1. Consideremos dos series proyectivas entre los puntos de las rectas $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r'}$, de ecuación

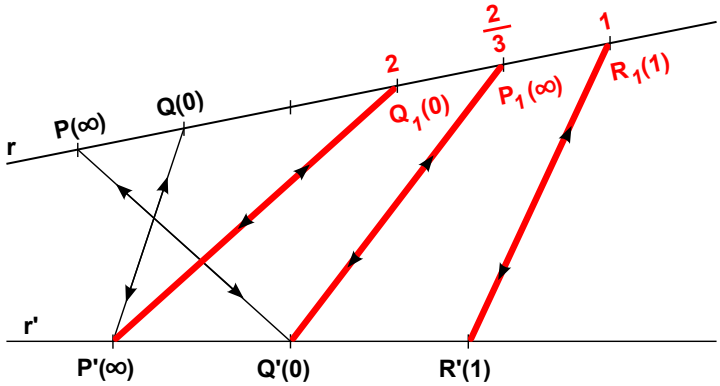
$$\mathbf{x\cdot x'+3\cdot x-2\cdot x'-2=0}$$

y cada una de las rectas provista de su correspondiente sistema de referencia.
Un procedimiento para obtener una forma reducida de la ecuación anterior, consistirá en lo siguiente:

Cambiemos el sistema de referencia, en la recta **r**, de forma que el nuevo sistema tenga como puntos límite, origen y unidad los homólogos de los puntos origen, límite y unidad del sistema de referencia en la recta $\mathbf{r'}$, que obtendremos como sigue:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{x'=\infty} & \Longrightarrow & \mathbf{x-2=0} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x=2} \\ \mathbf{x'=0} & \Longrightarrow & \mathbf{3\cdot x-2=0} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x=\dfrac{2}{3}} \\ \mathbf{x'=1} & \Longrightarrow & \mathbf{x+3\cdot x-2-2=0} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x=1} \end{array}$$

El esquema siguiente refleja lo que pretendemos hacer



El cambio de sistema de referencia será, por tanto, en **r**, el siguiente

$$\begin{array}{l} \mathbf{p=(PQRP_1)=\dfrac{2}{3}} \\ \mathbf{q=(PQRQ_1)=2} \\ \mathbf{r=(PQRR_1)=1} \end{array}$$

es decir:

$$\mathbf{x_1=(p,\ q,\ r,\ x)=\dfrac{(p,\ q,\ r)}{(p,\ q,\ x)}=\dfrac{\left(\dfrac{2}{3},\ 2,\ 1\right)}{\left(\dfrac{2}{3},\ 2,\ x\right)}=\dfrac{\dfrac{1-\dfrac{2}{3}}{1-2}}{\dfrac{x-\dfrac{2}{3}}{x-2}}=\dfrac{-\dfrac{1}{3}}{\dfrac{3\cdot x-2}{3}}=\dfrac{x-2}{2-3\cdot x}}$$

y despejando la **x** en

$$\mathbf{x_1=\dfrac{x-2}{2-3\cdot x}}$$

resulta

$$\mathbf{x=\dfrac{2\cdot x_1+2}{3\cdot x_1+1}}$$

y sustituyendo en la ecuación de la proyectividad

$$\mathbf{x\cdot x'+3\cdot x-2\cdot x'-2=0}$$

tendremos

$$\mathbf{\dfrac{2\cdot x_1+2}{3\cdot x_1+1}\cdot x'+3\cdot\dfrac{2\cdot x_1+2}{3\cdot x_1+1}-2\cdot x'-2=0}$$

y operando

$$\mathbf{(2\cdot x_1+2)\cdot x'+3\cdot(2\cdot x_1+2)-2\cdot x'\cdot(3\cdot x_1+1)-2\cdot(3\cdot x_1+1)=0}$$

$$2\cdot x_1\cdot x' + 2\cdot x' + 6\cdot x_1 + 6 - 6\cdot x'\cdot x_1 - 2\cdot x' - 6\cdot x_1 - 2 = 0$$

$$x_1\cdot x'\cdot(2-6) + x'\cdot(2-2) + x_1\cdot(6-6) + (6-2) = 0$$

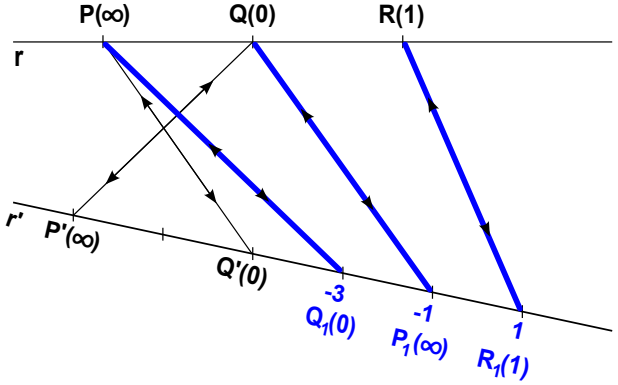
$$-4\cdot x_1\cdot x' + 4 = 0$$

y en definitiva

$$x_1\cdot x' = 1$$

Lo mismo que hemos cambiado el sistema de referencia en la recta $\mathbf{r}$, podemos hacerlo cambiándolo en la recta $\mathbf{r'}$.

El esquema sería entonces el siguiente



puesto que:

$$x = \infty \implies x' + 3 = 0 \implies x' = -3$$

$$x = 0 \implies -2\cdot x' - 2 = 0 \implies x' = -1$$

$$x = 1 \implies x' + 3 - 2\cdot x' - 2 = 0 \implies x' = 1$$

El cambio de sistema de referencia será, por tanto, en $\mathbf{r'}$ el siguiente:

$$p = (P'Q'R'P_1) = -1$$

$$q = (P'Q'R'Q_1) = -3$$

$$r = (P'Q'R'R_1) = 1$$

es decir

$$x_1 = (p,\ q,\ r,\ x') = \frac{(p,\ q,\ r)}{(p,\ q,\ x')} = \frac{(-1,\ -3,\ 1)}{(-1,\ 3,\ x')} = \frac{\dfrac{1-(-1)}{1-(-3)}}{\dfrac{x'-(-1)}{x'-(-3)}} = \frac{\dfrac{2}{4}}{\dfrac{x'+1}{x'+3}} = \frac{x'+3}{2\cdot x'+2}$$

y despejando la x' en

$$x_1 = \frac{x'+3}{2\cdot x'+2}$$

resulta

$$x' = \frac{3-2\cdot x_1}{2\cdot x_1 - 1}$$

y sustituyendo en la ecuación de la proyectividad

$$x\cdot x' + 3\cdot x - 2\cdot x' - 2 = 0$$

tendremos

$$\frac{3-2\cdot x_1}{2\cdot x_1 - 1}\cdot x' + 3\cdot x - 2\cdot\frac{3-2\cdot x_1}{2\cdot x_1 - 1} - 2 = 0$$

y operando

$$\mathbf{3\cdot x-2\cdot x_1\cdot x+3\cdot x\cdot(2\cdot x_1-1)-2\cdot(3-2\cdot x_1)-2\cdot(2\cdot x_1-1)=0}$$

$$\mathbf{3\cdot x-2\cdot x_1\cdot x+6\cdot x\cdot x_1-3\cdot x-6+4\cdot x_1-4\cdot x_1+2}=0$$

$$\mathbf{x\cdot x_1\cdot(-2+6)+x\cdot(3-3)+x_1\cdot(4-4)-6+2=0}$$

$$\mathbf{4\cdot x\cdot x_1-4=0}$$

y en definitiva

$$\mathbf{x\cdot x_1=1}$$

Observemos, por otra parte, que el procedimiento sigue siendo válido en el caso de que las series fuesen superpuestas, como ya habíamos apuntado.

6.3 La ecuación de una proyectividad en coordenadas cartesianas

Según sabemos, las coordenadas cartesianas resultan ser un caso particular de las proyectivas, aquél en el que el punto límite del sistema de referencia es el impropio de la recta, coincidiendo el origen y unidad del mismo con los de la misma denominación en coordenadas proyectivas.
Así, cuando el sistema de referencia sea cartesiano, dada una proyectividad entre series superpuestas, llamaremos **punto límite de la segunda serie** al homólogo del impropio de la primera serie, y análogamente, **punto límite de la primera serie** al punto cuyo homólogo es el impropio de la segunda serie.
Para la determinación de los puntos límites de una tal proyectividad

$$\mathbf{a\cdot x\cdot x'+b\cdot x+c\cdot x'+d=0},$$

siempre suponiendo que $\mathbf{x}$, $\mathbf{x'}$ son coordenadas cartesianas, se procede como sigue: Se divide la ecuación por $\mathbf{x}$, y se hace $\mathbf{x}\longrightarrow\boldsymbol{\infty}$, suponiendo que $\mathbf{x'}$ toma un valor acotado $\overline{\mathbf{x'}}$; así

$$\mathbf{a\cdot x'+b+c\cdot\frac{x'}{x}+\frac{d}{x}=0}$$

de donde

$$\mathbf{a\cdot x'+b=0}$$

con lo que la abscisa $\overline{\mathbf{x'}}$ del punto límite de la segunda serie será

$$\mathbf{\overline{x'}=-\frac{b}{a}}$$

Procediendo de forma análoga resultará la abscisa $\overline{\mathbf{x'}}$ del punto límite de la primera serie

$$\mathbf{\overline{x'}=-\frac{c}{a}}$$

Ejemplo 1. Consideremos la proyectividad entre las dos series superpuestas, $(\mathbf{x})$ y $(\mathbf{x}')$ en la recta $\mathbf{r}$ sobre la que está definido un sistema cartesiano, siendo la ecuación de la misma la siguiente:

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'+\mathbf{3}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{2}\cdot\mathbf{x}'-\mathbf{2}=\mathbf{0}$$

El **punto límite** de la primera serie se obtendrá dividiendo la ecuación por $\mathbf{x}'$, y haciendo luego que $\mathbf{x}' \longrightarrow \boldsymbol{\infty}$:

$$\mathbf{x}+\mathbf{3}\cdot\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}'}-\mathbf{2}-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{x}'}=\mathbf{0}$$

es decir

$$\overline{\mathbf{x}}-\mathbf{2}=\mathbf{0}$$

con lo que el punto límite será

$$\overline{\mathbf{x}}=\mathbf{2}$$

Para determinar el **punto límite** de la segunda serie se dividirá la ecuación por $\mathbf{x}$, y luego se hará que $\mathbf{x} \longrightarrow \boldsymbol{\infty}$:

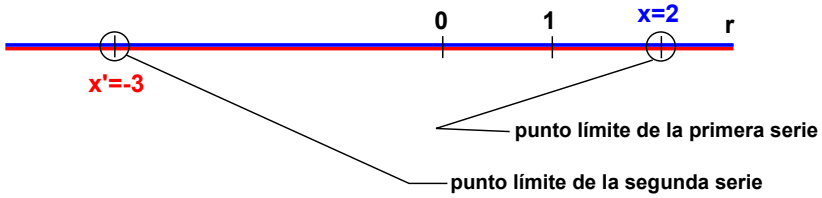
$$\mathbf{x}'+\mathbf{3}-\mathbf{2}\cdot\frac{\mathbf{x}'}{\mathbf{x}}-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{x}}=\mathbf{0}$$

es decir

$$\overline{\mathbf{x}'}+\mathbf{3}=\mathbf{0}$$

con lo que el punto límite será

$$\overline{\mathbf{x}'}=-\mathbf{3}$$



Definidos los puntos límites de una proyectividad, en coordenadas cartesianas, veamos una curiosa interpretación de este planteamiento. Dado que el punto límite de la segunda serie es el homólogo del impropio de la primera serie, y el punto límite de la primera serie el homólogo del impropio de la segunda serie, resultará que la ecuación reducida de la proyectividad

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'=\mathbf{k}$$

expresará que **el producto de distancias de dos puntos homólogos x, $\mathbf{x}'$ a los puntos límites de las correspondiente series es constante**.

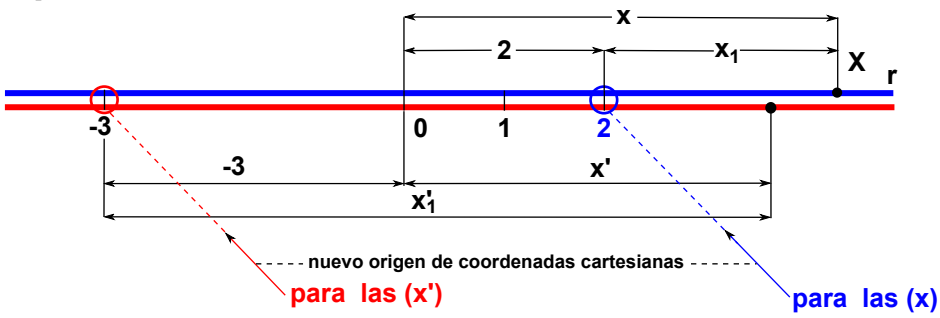
Ejemplo 2. Consideremos la proyectividad entre las dos series superpuestas, $(\mathbf{x})$ y $(\mathbf{x}')$, en la recta $\mathbf{r}$ sobre la que está definido un sistema cartesiano, siendo la ecuación de la misma la siguiente:

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'+\mathbf{3}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{2}\cdot\mathbf{x}'-\mathbf{2}=\mathbf{0}$$

En el ejemplo anterior establecimos que sus puntos límites son:

$$\overline{x} = 2 \quad , \quad \overline{x'} = -3.$$

En este caso, para hallar la ecuación reducida bastará con hacer sendos cambios de sistemas de referencia cartesianos, llevando el origen al punto $\overline{x} = 2$, en el caso de la serie **(x)**, y al $\overline{x'} = -3$ en el de la (x'). Veámoslo, con la ayuda del siguiente esquema:



El cambio de sistema de referencia cartesiano vendrá expresado como sigue

$$x = 2 + x_1, \quad \textbf{para la serie } (x)$$

$$x' = x'_1 - 3, \quad \textbf{para la serie } (x')$$

Sustituyendo, ahora, en la ecuación de la proyectividad dada

$$x \cdot x' + 3 \cdot x - 2 \cdot x' - 2 = 0$$

tendremos

$$(2 + x_1) \cdot (x'_1 - 3) + 3 \cdot (2 + x_1) - 2 \cdot (x'_1 - 3) - 2 = 0$$

y operando

$$2 \cdot x'_1 - 6 + x_1 \cdot x'_1 - 3 \cdot x_1 + 6 + 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x'_1 + 6 - 2 = 0$$

$$x_1 \cdot x'_1 + x'_1 \cdot (2 - 2) + x_1 \cdot (-3 + 3) + (-6 + 6 + 6 - 2) = 0$$

es decir

$$x_1 \cdot x'_1 - 4 = 0$$

y en definitiva

$$x_1 \cdot x'_1 = 4 \quad , \quad (k = 4)$$

que es la ecuación reducida, que expresa que el producto de las distancias de dos puntos homólogos cualesquiera a los puntos límites de las correspondientes series es constante, y en particular, en este caso, igual a 4.

Podemos comprobar esta afirmación trabajando con la ecuación original de la proyectividad. Veámoslo:

Si en la ecuación dada

$$x \cdot x' + 3 \cdot x - 2 \cdot x' - 2 = 0,$$

hacemos, por ejemplo, **x=4**, tendremos que su homólogo x' se obtendrá así,

$$4 \cdot x' + 3 \cdot 4 - 2 \cdot x' - 2 = 0,$$

y operando

$$\mathbf{2}\cdot\mathbf{x}'+\mathbf{10}=\mathbf{0},$$

es decir

$$\mathbf{x}'=-\mathbf{5}.$$

La distancia de **x=4** a su correspondiente punto límite $\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{2}$ será

$$|\mathbf{4}-\mathbf{2}|=\mathbf{2},$$

y la del punto homólogo $\mathbf{x}'=-\mathbf{5}$ al suyo será

$$|-\mathbf{5}-(-\mathbf{3})|=\mathbf{2},$$

Con lo que se cumple lo enunciado:

$$\mathbf{2}\cdot\mathbf{2}=\mathbf{4}=\mathbf{k}.$$

Podemos volverlo a comprobar con otros valores, por ejemplo con **x=20**, en cuyo caso será

$$\mathbf{20}\cdot\mathbf{x}'+\mathbf{3}\cdot\mathbf{20}-\mathbf{2}\cdot\mathbf{x}'-\mathbf{2}=\mathbf{0}$$

y operando

$$\mathbf{18}\cdot\mathbf{x}'+\mathbf{58}=\mathbf{0}$$

es decir

$$\mathbf{x}'=-\frac{\mathbf{29}}{\mathbf{9}}$$

La distancia de **x=20** a su correspondiente punto límite $\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{2}$ será

$$|\mathbf{20}-\mathbf{2}|=\mathbf{18},$$

y la del punto homólogo $\mathbf{x}'=-\frac{\mathbf{29}}{\mathbf{9}}$ al suyo será

$$\left|-\frac{\mathbf{29}}{\mathbf{9}}-(-\mathbf{3})\right|=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}$$

lo que confirma lo enunciado

$$\mathbf{18}\cdot\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}=\mathbf{4}=\mathbf{k}.$$

Lección 7.- INVOLUCIONES

7.1 Involuciones

En general, una proyectividad, $\boldsymbol{f}$, entre series superpuestas actúa de manera distinta a su inversa, $\boldsymbol{f^{-1}}$, en el sentido siguiente: Si $\boldsymbol{f}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}'$, y por tanto $\boldsymbol{f^{-1}}(\mathbf{X}') = \mathbf{X}$, en general $\boldsymbol{f}(\mathbf{X}') = \mathbf{X}'' \neq \mathbf{X}$. Resulta entonces interesante la siguiente propiedad:

PROPOSICIÓN 1. Si en la proyectividad entre series superpuestas, $\boldsymbol{f}$, se corresponden doblemente un par de puntos, es decir, si para $\mathbf{P},\ \mathbf{P}' \in \mathbf{r}$, $\boldsymbol{f}(\mathbf{P}) = \mathbf{P}'$ y $\boldsymbol{f}(\mathbf{P}') = \mathbf{P}$ **entonces todos los pares de puntos homólogos, X, X′, se corresponden doblemente.**

En efecto: Sea $\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}' + \mathbf{b}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{x}' + \mathbf{d} = \mathbf{0}$ la ecuación de $\boldsymbol{f}$, y sean $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'$ las respectivas abscisas de $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}'$. Vamos a suponer el mismo sistema de referencia para las dos series superpuestas.
El que se correspondan doblemente $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}'$ se expresará por

$$\begin{cases} \mathbf{a}\cdot\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}' + \mathbf{b}\cdot\mathbf{p} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{p}' + \mathbf{d} = \mathbf{0} \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{p}' + \mathbf{c}\cdot\mathbf{p} + \mathbf{d} = \mathbf{0} \end{cases}$$

de donde, restando, se obtiene

$$(\mathbf{b} - \mathbf{c})\cdot(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \mathbf{0}$$

y dado que suponemos $\mathbf{P} \neq \mathbf{P}'$, y por tanto $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}'$ resulta la condición

$$\mathbf{b} = \mathbf{c}$$

con lo cual la ecuación de $\boldsymbol{f}$ toma la forma

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}' + \mathbf{b}\cdot(\mathbf{x} + \mathbf{x}') + \mathbf{d} = \mathbf{0}$$

en la cual observamos la dependencia simétrica del primer miembro respecto de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}'$, y en consecuencia la doble correspondencia en $\boldsymbol{f}$ de todo par de puntos homólogos $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}'$.

Si se verifica la propiedad anterior, la proyectividad se llamará **involutiva** o simplemente **involución**, y su ecuación será de la forma

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}' + \mathbf{b}(\mathbf{x} + \mathbf{x}') + \mathbf{d} = \mathbf{0}$$

Ejemplo 1. Consideremos dos series superpuestas sobre la recta $\mathbf{r}$, en la que se corresponden doblemente los puntos

$$\mathbf{x_1} = \mathbf{1} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{x_1'} = \mathbf{2}$$

$$\mathbf{x_2} = \mathbf{-2} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{x_2'} = \mathbf{4}$$

Para determinar los coeficientes de la ecuación de la involución correspondiente, tenemos las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{a}\cdot\mathbf{1}\cdot\mathbf{2}+\mathbf{b}\cdot(\mathbf{1}+\mathbf{2})+\mathbf{d}=\mathbf{0} \\ \mathbf{a}\cdot(-\mathbf{2})\cdot\mathbf{4}+\mathbf{b}\cdot(-\mathbf{2}+\mathbf{4})+\mathbf{d}=\mathbf{0} \end{array}\right\}$$

y haciendo **a=1** (o lo que es equivalente dividiendo ambas igualdades por **a**, supuesta no nula):

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{2}+\mathbf{3}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{d}=\mathbf{0} \\ -\mathbf{8}+\mathbf{2}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{d}=\mathbf{0} \end{array}\right\}$$

Restando de la primera igualdad la segunda tendremos

$$\mathbf{10}+\mathbf{b}=\mathbf{0} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{b}=-\mathbf{10}$$

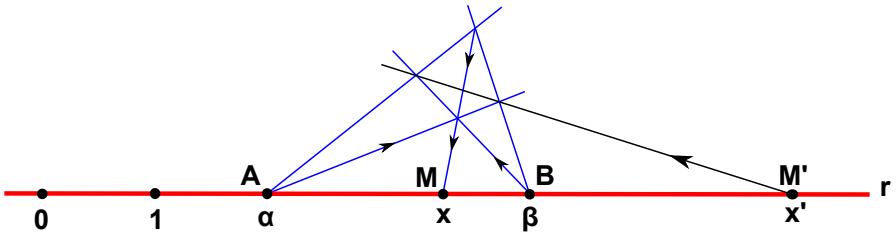
y sustituyendo en la primera ecuación

$$\mathbf{2}+\mathbf{3}\cdot(-\mathbf{10})+\mathbf{d}=\mathbf{0} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{d}=\mathbf{28}$$

La involución tendrá, por tanto, por ecuación

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'-\mathbf{10}\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{x}')+\mathbf{28}=\mathbf{0}$$

Ejemplo 2. Sobre una recta **r** se dan dos puntos fijos, **A** y **B**, y se consideran dos puntos variable **M** y **M′**, conjugados armónicos respecto del par **A**, **B**. Veamos que **M** y **M′** son puntos homólogos de una involución.



En efecto: La correspondencia que asocia cualquier punto **M** con su conjugado armónico, respecto del par **A**, **B**, es como sabemos una biyección involutiva, en el sentido de que si al punto **M** le corresponde el **M′**, al punto **M′**, considerado de la primera serie le corresponde el **M**, como perteneciente a la segunda.

Además, si $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ designan las abscisas de los puntos **A** y **B**, y con **x** y **x′** designamos las de los puntos **M** y **M′**, tendremos

$$(\mathbf{ABMM'})=(\boldsymbol{\alpha},\,\boldsymbol{\beta},\,\mathbf{x},\,\mathbf{x}')=\frac{(\boldsymbol{\alpha},\,\boldsymbol{\beta},\,\mathbf{x})}{(\boldsymbol{\alpha},\,\boldsymbol{\beta},\,\mathbf{x}')}=\frac{\dfrac{\mathbf{x}-\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{x}-\boldsymbol{\beta}}}{\dfrac{\mathbf{x}'-\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{x}'-\boldsymbol{\beta}}}=-\mathbf{1}$$

es decir

$$\frac{\mathbf{x}-\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{x}-\boldsymbol{\beta}}+\frac{\mathbf{x}'-\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{x}'-\boldsymbol{\beta}}=\mathbf{0}$$

y operando

$$(\mathbf{x}-\boldsymbol{\alpha})\cdot(\mathbf{x}'-\boldsymbol{\beta})+(\mathbf{x}'-\boldsymbol{\alpha})\cdot(\mathbf{x}-\boldsymbol{\beta})=\mathbf{0}$$

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{x}-\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}'+\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}+\mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{x}'-\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}+\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$$

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'\cdot(\mathbf{1}+\mathbf{1})+\mathbf{x}\cdot(-\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})+\mathbf{x}'\cdot(-\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})=\mathbf{0}$$

$$\mathbf{2}\cdot\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'-(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{x}')+\mathbf{2}\cdot\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$$

que es la ecuación de una involución.

PROPOSICIÓN 2. Una involución queda determinada unívocamente por dos pares de puntos homólogos, llamados también **conjugados**, $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_1'}$, y $\mathbf{X_2}$, $\mathbf{X_2'}$, siempre que $\mathbf{X_1}\neq\mathbf{X_2}$, $\mathbf{X_1'}\neq\mathbf{X_2'}$ y que $\mathbf{X_1}\neq\mathbf{X_2'}$, $\mathbf{X_2}\neq\mathbf{X_1'}$.

En efecto: El que se correspondan dichos pares se traduce en el sistema:

$$\begin{cases}\mathbf{a}\cdot\mathbf{x_1}\cdot\mathbf{x_1'}+\mathbf{b}\cdot(\mathbf{x_1}+\mathbf{x_1'})+\mathbf{d}=\mathbf{0}\\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{x_2}\cdot\mathbf{x_2'}+\mathbf{b}\cdot(\mathbf{x_2}+\mathbf{x_2'})+\mathbf{d}=\mathbf{0}\end{cases}$$

Ahora bien, la matriz del sistema anterior será de rango 1 si, y sólo si, se verifica

$$\begin{vmatrix}\mathbf{x_1}+\mathbf{x_1'} & \mathbf{1}\\ \mathbf{x_2}+\mathbf{x_2'} & \mathbf{1}\end{vmatrix}=\mathbf{0}\quad\mathbf{y}\quad\begin{vmatrix}\mathbf{x_1}\cdot\mathbf{x_1'} & \mathbf{1}\\ \mathbf{x_2}\cdot\mathbf{x_2'} & \mathbf{1}\end{vmatrix}=\mathbf{0}$$

es decir

$$\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}+\mathbf{x_1'}-\mathbf{x_2'}=\mathbf{0}\quad\mathbf{y}\quad\mathbf{x_1}\cdot\mathbf{x_1'}-\mathbf{x_2}\cdot\mathbf{x_2'}=\mathbf{0}$$

Suponiendo que $\mathbf{x_2}\cdot\mathbf{x_2'}\neq\mathbf{0}$, lo que no es restrictivo, de la segunda ecuación se deduce:

$$\frac{\mathbf{x_1}}{\mathbf{x_2}}=\frac{\mathbf{x_2'}}{\mathbf{x_1'}}$$

de donde

$$\frac{\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}}{\mathbf{x_2}}=\frac{\mathbf{x_2'}-\mathbf{x_1'}}{\mathbf{x_1'}}$$

y teniendo en cuenta la primera ecuación, resultará

$$\mathbf{x_2}-\mathbf{x_1'}=\mathbf{0}\,;$$

Volviendo con este resultado a la primera ecuación tendremos

$$\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2'}=\mathbf{0}\,,$$

lo que contradice nuestra hipótesis.

En consecuencia las ecuaciones del sistema establecido son independientes.

Por tanto, al ampliar el sistema con la ecuación

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'+\mathbf{b}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{x}'+\mathbf{d}=\mathbf{0}\,,$$

al expresar la compatibilidad, obtendremos la ecuación de la involución buscada:

$$\begin{vmatrix}\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}' & \mathbf{x}+\mathbf{x}' & \mathbf{1}\\ \mathbf{x_1}\cdot\mathbf{x_1'} & \mathbf{x_1}+\mathbf{x_1'} & \mathbf{1}\\ \mathbf{x_2}\cdot\mathbf{x_2'} & \mathbf{x_2}+\mathbf{x_2'} & \mathbf{1}\end{vmatrix}=\mathbf{0}$$

Ejemplo 3. Si consideramos dos series superpuestas, sobre la recta **r**, la involución determinada por los pares de puntos homólogos

$$\mathbf{x_1 = 2} \quad , \quad \mathbf{x'_1 = 5}$$

$$\mathbf{x_2 = -3} \quad , \quad \mathbf{x'_2 = 4}$$

tendrá por ecuación

$$\begin{vmatrix} \mathbf{x \cdot x'} & \mathbf{x + x'} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2 \cdot 5} & \mathbf{2 + 5} & \mathbf{1} \\ \mathbf{(-3) \cdot 4} & \mathbf{-3 + 4} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

es decir

$$\mathbf{x \cdot x' \cdot} \begin{vmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} - \mathbf{(x + x') \cdot} \begin{vmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-12} & \mathbf{1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{7} \\ \mathbf{-12} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

y operando

$$\mathbf{x \cdot x' \cdot (7 - 1) - (x + x') \cdot (10 + 12) + (10 + 84) = 0}$$

$$\mathbf{6 \cdot x \cdot x' - 22 \cdot (x + x') + 94 = 0}$$

Por tratarse de una proyectividad entre series superpuestas podemos hablar de los puntos dobles de una involución. La ecuación que nos los proporcionará será:

$$\mathbf{a \cdot y^2 + 2 \cdot b \cdot y + d = 0}$$

Observemos que **una involución no puede ser parabólica**, puesto que la condición

$$\mathbf{a \cdot d - b^2 = 0}$$

resulta ser la misma que se obtiene al anular el módulo.

En consecuencia, **la involución parabólica es una proyectividad degenerada.**

Ejemplo 4. Dada la involución

$$\mathbf{2 \cdot x \cdot x' + 3 \cdot (x + x') - 8 = 0}$$

la ecuación que nos da sus puntos dobles será

$$\mathbf{2 \cdot y^2 + 6 \cdot y - 8 = 0}$$

es decir

$$\mathbf{y^2 + 3 \cdot y - 4 = 0}$$

ecuación de segundo grado, cuyas raíces serán los puntos dobles que nos interesan

$$\mathbf{y = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}}$$

Los puntos dobles serán por tanto:

$$\mathbf{y_1 = 1} \quad , \quad \mathbf{y_2 = -4}$$

En el apartado 6.3 de la lección anterior establecimos lo que entendíamos por puntos límites, como homólogos de los impropios correspondientes, de las dos series superpuestas. Dado que la ecuación de una involución es

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'+\mathbf{b}\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{x}')+\mathbf{d}=\mathbf{0}\quad,\quad(\mathbf{a}\neq\mathbf{0})$$

el punto impropio, como todo punto de la recta soporte de las dos series, admite un solo homólogo, que en este caso recibe el nombre de **punto central** de la involución, que es en cierta manera un punto límite doble, puesto que sólo hay uno, cuya abscisa será: $\overline{\mathbf{x}}=\overline{\mathbf{x}'}=\dfrac{-\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$. El concepto general de **punto límite**, aplicado a una involución nos ha proporcionado, por tanto, el de **punto central**, punto en el que coinciden los puntos límites de las dos series.
Si hacemos, ahora, un cambio en el sistema de coordenadas cartesianas dado, transportando el origen de abscisas al punto central, haciendo la sustitución

$$\mathbf{x}=\mathbf{y}-\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\quad,\quad\mathbf{x}'=\mathbf{y}'-\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$$

la ecuación de la involución será

$$\mathbf{a}\cdot\left(\mathbf{y}-\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\right)\cdot\left(\mathbf{y}'-\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\right)+\mathbf{b}\cdot\left(\mathbf{y}-\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}+\mathbf{y}'-\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\right)+\mathbf{d}=\mathbf{0}$$

y operando

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}'-\mathbf{b}\cdot\mathbf{y}-\mathbf{b}\cdot\mathbf{y}'+\frac{\mathbf{b}^2}{\mathbf{a}}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{y}'-\frac{\mathbf{2}\cdot\mathbf{b}^2}{\mathbf{a}}+\mathbf{d}=\mathbf{0}$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}'-\frac{\mathbf{b}^2}{\mathbf{a}}+\mathbf{d}=\mathbf{0}$$

$$\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}'=\frac{\mathbf{b}^2-\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}}{\mathbf{a}^2}$$

y haciendo $\mathbf{k}=\dfrac{\mathbf{b}^2-\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}}{\mathbf{a}^2}$, y restaurando las variables tendremos, como ecuación de la involución, la siguiente

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'=\mathbf{k}$$

Supondremos en lo que sigue que: $\mathbf{b}^2-\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}\neq\mathbf{0}$, lo que supone que la involución no es degenerada, y que el valor $\mathbf{k}$ es una constante no nula.
Si la involución está definida por la relación que acabamos de obtener, las abscisas de los puntos dobles serán las raíces de la ecuación

$$\mathbf{y}^2=\mathbf{k}$$

que serán reales si $\mathbf{k}>\mathbf{0}$, imaginarias si $\mathbf{k}<\mathbf{0}$. Como dichas abscisas son opuestas, los puntos dobles serán simétricos respecto al punto central.

Ejemplo 5. Consideremos la involución dada por la ecuación

$$\mathbf{2}\cdot\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'+\mathbf{3}\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{x}')-\mathbf{8}=\mathbf{0}$$

El punto central será, según sabemos, el homólogo del impropio de la recta soporte de las dos series superpuestas, cualquiera que sea, de ellas, la que consideremos; así

$$\mathbf{x}'=\boldsymbol{\infty}\quad\Longrightarrow\quad\mathbf{2}\cdot\overline{\mathbf{x}}+\mathbf{3}=\mathbf{0}\quad\Longrightarrow\quad\overline{\mathbf{x}}=-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$

$$\mathbf{x}=\boldsymbol{\infty}\quad\Longrightarrow\quad\mathbf{2}\cdot\overline{\mathbf{x}'}+\mathbf{3}=\mathbf{0}\quad\Longrightarrow\quad\overline{\mathbf{x}'}=-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$

Los puntos dobles se obtienen haciendo $\mathbf{x} = \mathbf{x}' = \mathbf{y}$:

$$\mathbf{2 \cdot y^2 + 6 \cdot y - 8 = 0}$$

es decir

$$\mathbf{y = \frac{-6 \pm \sqrt{36+64}}{4} = \frac{-6 \pm 10}{4} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}}$$

Comprobemos que los puntos dobles son simétricos respecto al punto central; bastará con ver que el punto central es el punto medio del segmento determinado por los puntos dobles; en efecto,

$$\mathbf{\frac{suma\ de\ puntos\ dobles}{2} = \frac{1-4}{2} = -\frac{3}{2} = punto\ central}$$

En el caso particular de ser $\mathbf{a = 0}$, la ecuación de la involución resultará ser

$$\mathbf{b \cdot (x + x') + d = 0}$$

de donde resultará

$$\mathbf{\frac{x + x'}{2} = -\frac{d}{2 \cdot b}}$$

lo que nos muestra que el punto medio de dos puntos homólogos cualesquiera es fijo, y tiene por abscisa:

$$\mathbf{-\frac{d}{2 \cdot b}}$$

En este caso, diremos que se trata de una **involución simétrica**. Su punto central será el impropio, ya que al aumentar **x** indefinidamente también lo hace $\mathbf{x'}$; se puede decir que el punto impropio es uno de sus puntos dobles, siendo el otro el centro de simetría.

Ejemplo 6. Sobre una recta **r** se da un punto fijo **A**, y se consideran dos puntos, **M** y $\mathbf{M'}$, simétricos respecto del punto **A**. Veamos que **M** y $\mathbf{M'}$ son puntos homólogos de una involución.

En efecto: La correspondencia que asocia cualquier punto **M** con su simétrico $\mathbf{M'}$ respecto del **A** es, evidentemente, una biyección involutiva, en el sentido de que si al punto **M** le corresponde el $\mathbf{M'}$, al punto $\mathbf{M'}$, considerado de la primera serie le corresponde el **M**, como perteneciente a la segunda.

Además, si $\boldsymbol{\alpha}$ designa la abscisa del punto **A**, las abscisas **x**, $\mathbf{x'}$ verifican la relación.

$$\mathbf{\frac{x + x'}{2} = \alpha}$$

es decir

$$\mathbf{x + x' - 2 \cdot \alpha = 0}$$

que será la ecuación de la involución.

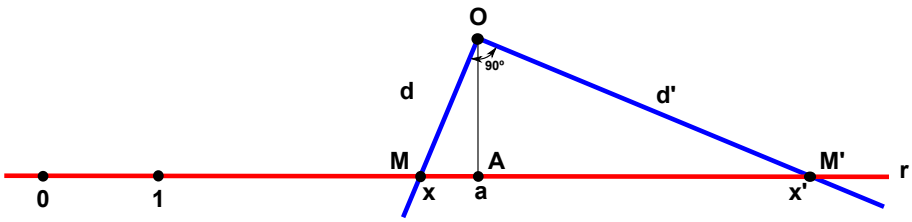
Observemos que se trata de una proyectividad (involución) no degenerada

$$\mathbf{x' = \frac{-x + 2 \cdot \alpha}{0 \cdot x + 1} \quad ; \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 \cdot \alpha \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0}$$

e hiperbólica, de puntos dobles

$$\frac{x+x}{2}=\alpha \quad \Longrightarrow \quad 2\cdot x=2\cdot\alpha \quad \Longrightarrow \begin{cases} y_1=\infty \\ y_2=\alpha \end{cases}$$

Ejemplo 7. Consideremos un plano, y sobre él una recta **r** y un punto **O**, no perteneciente a **r**, por el que pasan dos rectas variables perpendiculares, **d** y **d′**, que cortan a **r** en los puntos **M** y **M′**.



En primer lugar, veamos que los puntos **M** y **M′** son homólogos en una involución. En efecto: Se verifica:

$$\overline{AM}\cdot\overline{AM'}=-\overline{OA}^2$$

y si designamos por **a** la abscisa del punto **A**, por **x**, **x′**, respectivamente las de **M**, **M′**, y por **h** la longitud del segmento $\overline{OA}$, podremos escribir

$$(x-a)\cdot(x'-a)=-h^2$$

y operando

$$x\cdot x'-a\cdot x-a\cdot x'+a^2=-h^2$$

o lo que es lo mismo

$$x\cdot x'-a\cdot(x+x')+a^2+h^2=0$$

ecuación que corresponde a la involución que nos interesaba.

Por otra parte, para que uno de los puntos **M**, **M′** sea el impropio se hace necesario que uno de los lados del ángulo recto $\widehat{MOM'}$ sea paralelo a la recta **r**, con lo que el otro coincidirá con la perpendicular $\overline{OA}$, a **r**. Resultará de ello que el punto central de la involución dada es la proyección **A**, de abscisa **a**, del punto **O** sobre **r**.

Además, los puntos dobles serán imaginarios, puesto que en ningún caso podrán coincidir los puntos **M** y **M′**. Analíticamente es fácil llegar a las conclusiones anteriores. En efecto: El punto central resultará de hacer que **x** tienda a infinito en la ecuación de la involución, con lo que resultará.

$$\overline{x'}-a\cdot(0+1)+0=0$$

es decir

$$\overline{x'}=a$$

y los puntos dobles resultarán de hacer $x=x'$, en la ecuación de la involución; así si $x=x'=y$

$$y\cdot y-a\cdot(y+y)+a^2+h^2=0$$

es decir

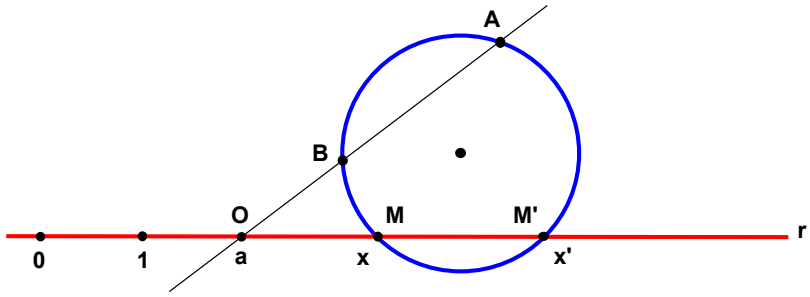
$$\mathbf{y^2 - 2 \cdot a \cdot y^2 + a^2 + h^2 = 0}$$

cuyas soluciones serán los citados puntos dobles

$$\mathbf{y = \frac{2 \cdot a \pm \sqrt{4 \cdot a^2 - 4 \cdot (a^2 + h^2)}}{2} = a \pm h \cdot i}$$

que como podemos ver son imaginarios.

Ejemplo 8. Consideremos un plano, y sobre él una recta **r** y dos puntos **A** y **B**, no pertenecientes a **r**, por los que pasa una circunferencia cualquiera que corta a **r** en dos puntos **M** y **M′**.



En primer lugar, veamos que los puntos **M** y **M′** son homólogos en una involución. En efecto: Eligiendo arbitrariamente el punto **M**, existirá una única circunferencia que pasa por los puntos **A**, **B**, **M**. Esta circunferencia cortará a la recta **r** en un único punto **M′**. Luego a todo punto **M** de **r**, considerado como de la primera serie corresponderá un único punto **M′** de la segunda; por la misma razón, a todo punto **M′** de la segunda serie le corresponderá un único punto **M** de la primera.

La relación analítica que liga las abscisas **x**, **x′** respectivamente de los puntos **M**, **M′**, existe puesto que se trata de una intersección de una recta con una circunferencia. Resulta muy fácil hallarla, en este caso, haciendo aplicación del concepto de potencia de un punto respecto a una circunferencia, concepto que estudiaremos en la Lección 19, pudiendo escribir aquí

$$\mathbf{\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \overline{OA} \cdot \overline{OB}},$$

y si designamos por **a** la abscisa del punto **O**, y por **k** la constante $\mathbf{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}$, tendremos

$$\mathbf{(x - a) \cdot (x' - a) = k}$$

y operando

$$\mathbf{x \cdot x' - a \cdot x - a \cdot x' + a^2 = k}$$

o lo que es lo mismo

$$\mathbf{x \cdot x' - a \cdot (x + x') + a^2 - k = 0}$$

ecuación que corresponde a la involución que nos interesaba.

Desde un punto de vista analítico la determinación del punto central y de los eventuales puntos dobles es fácil. Para determinar el punto central basta con hacer que **x′** o **x** tiendan a infinito en la ecuación de la involución, con lo cual tendremos

$$\mathbf{\overline{x} - a = 0}$$

es decir, el punto central tendrá como abscisa

$$\overline{x} = a$$

Para determinar los puntos dobles haremos $x = x' = y$, y sustituiremos en la ecuación dada; así

$$y^2 - 2 \cdot a \cdot y + a^2 - k = 0$$

siendo éstos las raíces de esta ecuación, es decir

$$y = \frac{2 \cdot a \pm \sqrt{4 \cdot a^2 - 4 \cdot a^2 + 4 \cdot k}}{2} = a \pm \sqrt{k} = \begin{cases} a + \sqrt{k} \\ a - \sqrt{k} \end{cases}$$

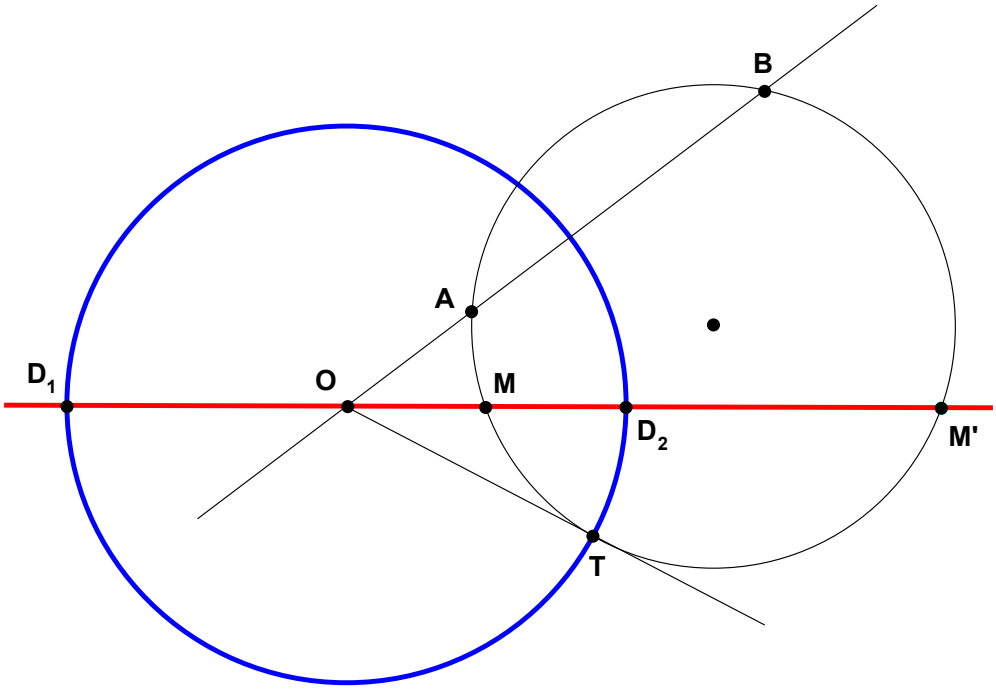
que serán reales si **k>0**, e imaginarios si **k<0**.

Veamos ahora como razonaremos geométricamente: Si el punto **M** se aleja indefinidamente sobre la recta **r**, el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo $\overset{\triangle}{ABM}$ se aleja también indefinidamente sobre la mediatriz del segmento $\overline{AB}$. En consecuencia, esta circunferencia tendrá por límite la recta determinada por los puntos **A** y **B**, y el punto M' tendrá por límite el punto **O**, intersección de la recta que pasa por **A** y **B** con **r**; luego el punto central será el **O**.

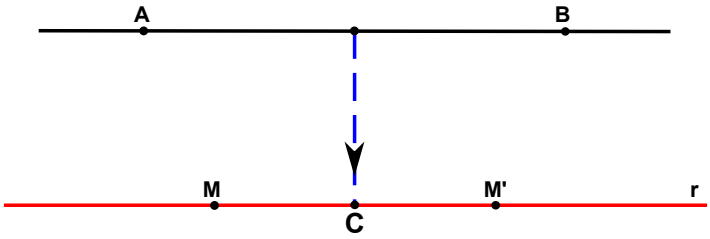
Los puntos dobles D_1 y D_2, vendrán definidos por la relación

$$\overline{OD_1}^2 = \overline{OD_2}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB},$$

los cuales, para ser reales, precisan que los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ sean del mismo signo, es decir, que los puntos **A** y **B** estén de un mismo lado de la recta **r**. Para determinarlos, geométricamente, bastará con trazar, por el punto **O**, una tangente $\overline{OT}$ a una circunferencia cualquiera que pasa por los puntos **A** y **B**; luego, trazando la circunferencia de centro **O** y radio $\overline{OT}$, su interacción con la recta **r** nos dará los puntos dobles D_1 y D_2. Esta construcción cae, evidentemente, en defecto si los puntos **A** y **B** están separados por el punto **O**.



En el caso particular de que la recta determinada por los puntos **A** y **B**, fuese paralela a la **r**, el punto central sería el impropio de **r** y la involución resultaría ser una simetría, de centro **C**, la proyección sobre **r** del punto medio del segmento $\overline{\mathbf{AB}}$.



CAPÍTULO IV

Lección 8.- PROYECTIVIDAD ENTRE FIGURAS DE PRIMERA CATEGORIA

8.1 Razón doble de cuatro rectas de un haz

8.2 Proyectividad entre haces de rectas y entre haces de rectas y series

8.3 Haz de planos. Razón doble de cuatro planos de un haz

8.4 Proyectividad entre figuras de primera categoría

8.1 Razón doble de cuatro rectas de un haz

Según sabemos, la ecuación de una recta, en el plano, dada en su forma general, es

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{x_1}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{x_2}+\mathbf{c}=\mathbf{0};$$

Si en el plano que contiene a la recta consideramos el punto $\mathbf{P}(\mathbf{p_1},\mathbf{p_2})$, la siguiente ecuación

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{x_1}-\mathbf{p_1})+\mathbf{b}\cdot(\mathbf{x_2}-\mathbf{p_2})=\mathbf{0}$$

para valores de **a** y **b** no simultáneamente nulos, representa distintas rectas que pasan por $\mathbf{P}(\mathbf{p_1},\mathbf{p_2})$. Recíprocamente, toda recta

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{x_1}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{x_2}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$$

que pasa por el punto $\mathbf{P}(\mathbf{p_1},\mathbf{p_2})$ verifica

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{p_1}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{p_2}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$$

con lo que restando estas ecuaciones se obtiene la anterior

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{x_1}-\mathbf{p_1})+\mathbf{b}\cdot(\mathbf{x_2}-\mathbf{p_2})=\mathbf{0}$$

Así, podemos afirmar que esta última es la ecuación general del haz plano de rectas de vértice el punto $\mathbf{P}(\mathbf{p_1},\mathbf{p_2})$ Al anular sucesivamente **a** y **b** obtenemos las rectas

$$\mathbf{x_2}-\mathbf{p_2}=\mathbf{0}\quad\mathbf{y}\quad\mathbf{x_1}-\mathbf{p_1}=\mathbf{0}$$

que evidentemente pasan por $\mathbf{P}(\mathbf{p_1},\ \mathbf{p_2})$, y son paralelas respectivamente, a cada uno de los ejes de coordenadas. Así, diremos que el haz de rectas

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{x_1}-\mathbf{p_1})+\mathbf{b}\cdot(\mathbf{x_2}-\mathbf{p_2})=\mathbf{0}$$

se obtiene por combinación lineal de las rectas

$$\mathbf{x_2}-\mathbf{p_2}=\mathbf{0}\quad\mathbf{y}\quad\mathbf{x_1}-\mathbf{p_1}=\mathbf{0}$$

Ejemplo 1. Consideremos en un plano un sistema de referencia cartesiano, de ejes $\overline{\mathbf{OX}}$, $\overline{\mathbf{OY}}$, y en él un punto **P** de coordenadas $(\mathbf{3},\mathbf{4})$. La ecuación de las rectas que pasan por **P**, para valores de **a** y **b** no simultáneamente nulos será:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{3})+\mathbf{b}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{4})=\mathbf{0}$$

Al valor $\mathbf{a}=\mathbf{0}$, le corresponderá la recta

$$\mathbf{0}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{3})+\mathbf{b}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{4})=\mathbf{0}$$

y como $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$, será

$$\mathbf{y}-\mathbf{4}=\mathbf{0}$$

Si $\mathbf{b}=\mathbf{0}$, la recta correspondiente será la siguiente

$$\mathbf{x}-\mathbf{3}=\mathbf{0}$$

Si los valores de los parámetros son: $\mathbf{a}=\mathbf{5}$, $\mathbf{b}=-\mathbf{2}$, la recta será

$$\mathbf{5}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{3})+(-\mathbf{2})\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{4})=\mathbf{0}$$

es decir

$$\mathbf{5}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{2}\cdot\mathbf{y}-\mathbf{7}=\mathbf{0}$$

Veamos que, en general, un haz puede representarse combinando linealmente las ecuaciones de dos rectas distintas.

$$\mathbf{r_1}\equiv\mathbf{a_1}\cdot\mathbf{x_1}+\mathbf{b_1}\cdot\mathbf{x_2}+\mathbf{c_1}=\mathbf{0}$$

$$\mathbf{r_2}\equiv\mathbf{a_2}\cdot\mathbf{x_2}+\mathbf{b_2}\cdot\mathbf{x_2}+\mathbf{c_2}=\mathbf{0}$$

que pasen por el vértice de dicho haz; así

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot(\mathbf{a_1}\cdot\mathbf{x_1}+\mathbf{b_1}\cdot\mathbf{x_2}+\mathbf{c_1})+\boldsymbol{\mu}\cdot(\mathbf{a_2}\cdot\mathbf{x_1}+\mathbf{b_2}\cdot\mathbf{x_2}+\mathbf{c_2})=\mathbf{0}$$

siendo $\boldsymbol{\lambda}$ y $\boldsymbol{\mu}$ no simultáneamente nulos.

En efecto: en primer lugar, para $\boldsymbol{\lambda}$ y $\boldsymbol{\mu}$ valores cualesquiera, no simultáneamente nulos, la ecuación

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot(\mathbf{a_1}\cdot\mathbf{x_1}+\mathbf{b_1}\cdot\mathbf{x_2}+\mathbf{c_1})+\boldsymbol{\mu}\cdot(\mathbf{a_2}\cdot\mathbf{x_1}+\mathbf{b_2}\cdot\mathbf{x_2}+\mathbf{c_2})=\mathbf{0}$$

representa una recta que pasa por el punto $\mathbf{P}(\mathbf{p_1},\mathbf{p_2})$ puesto que las coordenadas de dicho punto son solución del sistema

$$\begin{cases}\mathbf{a_1}\cdot\mathbf{x_1}+\mathbf{b_1}\cdot\mathbf{x_2}+\mathbf{c_1}=\mathbf{0}\\ \mathbf{a_2}\cdot\mathbf{x_1}+\mathbf{b_2}\cdot\mathbf{x_2}+\mathbf{c_2}=\mathbf{0}\end{cases}$$

Por otra parte, si una recta

$$\mathbf{r_3} \equiv \mathbf{a_3} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{b_3} \cdot \mathbf{x_2} + \mathbf{c_3} = \mathbf{0}$$

pasa por el punto $\mathbf{P}(\mathbf{p_1},\ \mathbf{p_2})$ el sistema formado por el anterior ampliado con esta última ecuación, es compatible; luego

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{b_1} & \mathbf{c_1} \\ \mathbf{a_2} & \mathbf{b_2} & \mathbf{c_2} \\ \mathbf{a_3} & \mathbf{b_3} & \mathbf{c_3} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

Como las rectas $\mathbf{r_1}$ y $\mathbf{r_2}$ son distintas, el rango de la matriz de las dos primeras filas es 2; por tanto existirán valores $\boldsymbol{\lambda}$ y $\boldsymbol{\mu}$, no simultáneamente nulos, tales que:

$$\mathbf{a_3} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{a_1} + \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{a_2}$$

$$\mathbf{b_3} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{b_1} + \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{b_2}$$

$$\mathbf{c_3} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{c_1} + \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{c_2}$$

es decir la recta $\mathbf{r_3}$ es de la forma

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{a_1} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{b_1} \cdot \mathbf{x_2} + \mathbf{c_1}) + \boldsymbol{\mu} \cdot (\mathbf{a_2} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{b_2} \cdot \mathbf{x_2} + \mathbf{c_2}) = \mathbf{0}$$

Podremos, por tanto, afirmar que: **Entre las rectas del haz de vértice $\mathbf{P}(\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2})$ y las parejas de números reales $(\boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{\mu})$, no simultáneamente nulos, definidos a menos de un factor no nulo, queda establecida una biyección mediante la ecuación**

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{a_1} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{b_1} \cdot \mathbf{x_2} + \mathbf{c_1}) + \boldsymbol{\mu} \cdot (\mathbf{a_2} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{b_2} \cdot \mathbf{x_2} + \mathbf{c_2}) = \mathbf{0}$$

Ejemplo 2. Dado un sistema de referencia cartesiano en un plano, las rectas

$$\mathbf{r_1} \equiv \mathbf{5} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{2} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{7} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{r_2} \equiv \mathbf{x} + \mathbf{3} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{15} = \mathbf{0}$$

se cortan en el punto $\mathbf{P}(\mathbf{3},\ \mathbf{4})$, vértice del haz determinado por las rectas $\mathbf{r_1}$ y $\mathbf{r_2}$, que tendrá por expresión

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{5} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{2} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{7}) + \boldsymbol{\mu} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{3} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{15}) = \mathbf{0}$$

con la condición de que los parámetros $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$ no sean simultáneamente nulos. A los valores $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{1}$, $\boldsymbol{\mu} = -\mathbf{2}$ les corresponde la recta

$$\mathbf{1} \cdot (\mathbf{5} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{2} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{7}) + (-\mathbf{2}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{3} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{15}) = \mathbf{0}$$

es decir

$$\mathbf{3} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{8} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{23} = \mathbf{0}$$

la misma que a $\boldsymbol{\lambda = 5}$, $\boldsymbol{\mu = -10}$, múltiplos de los anteriores valores de $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$.

Por tanto, a cada par de número reales $(\boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{\mu})$ le corresponderá una recta que pasa por **P**, de ecuación

$$\boldsymbol{\lambda \cdot (a_1 \cdot x_1 + b_1 \cdot x_2 + c_1) + \mu \cdot (a_2 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + c_2) = 0}$$

Dicha recta corresponderá también a todo par

$$\boldsymbol{\left(\frac{\lambda}{\alpha},\ \frac{\mu}{\alpha}\right)}$$

y, en particular, si es $\boldsymbol{\lambda \neq 0}$ al par

$$\boldsymbol{\left(1,\ \frac{\mu}{\lambda}\right)}$$

Recíprocamente, toda recta que pasa por **P** tendrá una ecuación de la forma

$$\boldsymbol{\lambda \cdot (a_1 \cdot x_1 + b_1 \cdot x_2 + c_1) + \mu \cdot (a_2 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + c_2) = 0}$$

con $\boldsymbol{\lambda}$ y $\boldsymbol{\mu}$ determinados a menos de un factor no nulo.
Podemos entonces representar, también, el haz

$$\boldsymbol{\lambda \cdot (a_1 \cdot x_1 + b_1 \cdot x_2 + c_1) + \mu \cdot (a_2 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + c_2) = 0}$$

por la ecuación

$$\boldsymbol{(a_1 \cdot x_1 + b_1 \cdot x_2 + c_1) + \nu \cdot (a_2 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + c_2) = 0}$$

Siendo $\boldsymbol{\nu = \frac{\mu}{\lambda}}$ el único parámetro del que depende su ecuación, el cual variará en el cuerpo real, ampliado con $\boldsymbol{\infty}$, al objeto de que esta ecuación contenga la recta que corresponda a $\boldsymbol{\lambda = 0}$, $\boldsymbol{\mu \neq 0}$.

Ejemplo 3. La ecuación del haz determinado por las rectas

$$\boldsymbol{r_1 \equiv 5 \cdot x - 2 \cdot y - 7 = 0}$$

$$\boldsymbol{r_2 \equiv x + 3 \cdot y - 15 = 0}$$

de vértice el punto $\boldsymbol{P(3,\ 4)}$, se puede expresar en la forma siguiente

$$\boldsymbol{5 \cdot x - 2 \cdot y - 7 + \nu \cdot (x + 3 \cdot y - 15) = 0}\ .$$

Para $\boldsymbol{\nu = \frac{-10}{5} = -2}$ obtendremos la recta

$$\boldsymbol{3 \cdot x - 8 \cdot y + 23 = 0}\ .$$

Para $\boldsymbol{\nu = 0}$, la recta será

$$\boldsymbol{5 \cdot x - 2 \cdot y + 7 = 0}$$

y al valor $\boldsymbol{\nu = \infty}$ corresponderá la recta

$$\boldsymbol{x + 3 \cdot y - 15 = 0}\ .$$

Abreviando podemos escribir, la ecuación del haz, como sigue:

$$\mathbf{M_x} + \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{N_x} = \mathbf{0}$$

siendo

$$\mathbf{M_x} = \mathbf{a_1} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{b_1} \cdot \mathbf{x_2} + \mathbf{c_1}$$

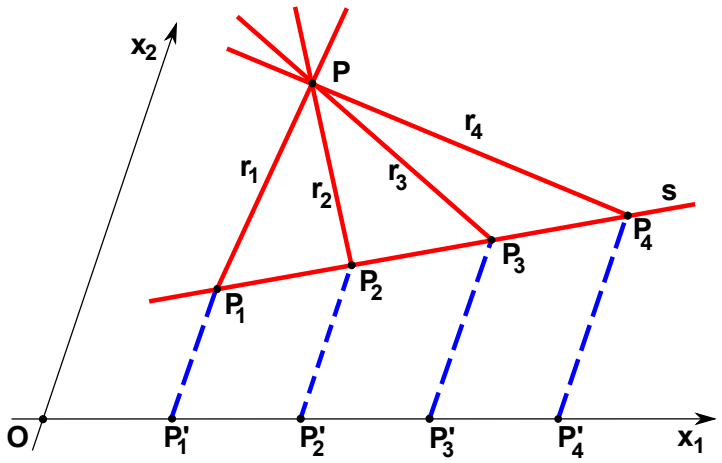
$$\mathbf{N_x} = \mathbf{a_2} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{b_2} \cdot \mathbf{x_2} + \mathbf{c_2}$$

Sean, ahora $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, $\mathbf{r_4}$ cuatro rectas del haz, obtenidas para $\boldsymbol{\nu}$ igual a $\boldsymbol{\nu_1}$, $\boldsymbol{\nu_2}$, $\boldsymbol{\nu_3}$, $\boldsymbol{\nu_4}$, respectivamente, y consideremos la recta:

$$\mathbf{s} \equiv \mathbf{a} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{x_2} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$$

no perteneciente al haz, es decir, tal que

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{b_1} & \mathbf{c_1} \\ \mathbf{a_2} & \mathbf{b_2} & \mathbf{c_2} \\ \mathbf{a_3} & \mathbf{b_3} & \mathbf{c_3} \end{vmatrix} \neq \mathbf{0}$$



y no paralela al eje $\mathbf{x_2}$, es decir tal que

$$\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$$

Sean $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$, $\mathbf{P_4}$, las intersecciones de $\mathbf{s}$ con $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, $\mathbf{r_4}$ respectivamente, y $\mathbf{P'_1}$, $\mathbf{P'_2}$, $\mathbf{P'_3}$, $\mathbf{P'_4}$ las proyecciones de dichas intersecciones paralelamente al eje $\mathbf{x_2}$ sobre el $\mathbf{x_1}$.
De acuerdo con el **Teorema de Thales**, que expresa la conservación de la razón simple por proyección paralela, tenemos

$$(\mathbf{P_1}\ \mathbf{P_2}\ \mathbf{P_3}\ \mathbf{P_4}) = (\mathbf{P'_1}\ \mathbf{P'_2}\ \mathbf{P'_3}\ \mathbf{P'_4})$$

pudiendo, ahora, determinar el valor de $(\mathbf{P'_1}\ \mathbf{P'_2}\ \mathbf{P'_3}\ \mathbf{P'_4})$ en función de las abscisas de los puntos de esta cuaterna, como ya sabemos, abscisas que vamos a determinar.

Determinaremos la coordenada $\mathbf{x_1}$ de la intersección de las rectas del haz con la **s**, hallando la ecuación de la paralela a $\mathbf{x_2}$ por dicho punto de intersección; dicha paralela tendrá por ecuación

$$\mathbf{M_x} + \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{N_x} + \boldsymbol{\rho} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{x_2} + \mathbf{c}) = \mathbf{0}$$

quedando determinado el parámetro, $\boldsymbol{\rho}$, por la condición de que la recta sea paralela al eje $\mathbf{x_2}$,

$$\mathbf{b_1} + \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{b_2} + \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

es decir

$$\boldsymbol{\rho} = -\frac{\mathbf{b_1} + \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{b_2}}{\mathbf{b}}$$

Sustituyendo este valor de $\boldsymbol{\rho}$ en la ecuación de la paralela, obtendremos despejando $\mathbf{x_1}$:

$$\mathbf{x_1} = \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{b_1} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c_1} + \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b_2} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c_2})}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a_1} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b_1} + \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a_2} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b_2})}$$

En consecuencia, la coordenada $\mathbf{x_1}$ de la intersección de las rectas del haz con la recta **s**, se expresa como una función homográfica del parámetro $\boldsymbol{\nu}$ del haz; y el módulo de dicha función, como es inmediato comprobar, resulta ser:

$$\mathbf{b} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{b_1} & \mathbf{c_1} \\ \mathbf{a_2} & \mathbf{b_2} & \mathbf{c_2} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{vmatrix}$$

Como se verifica, según sabemos, que

$$(\mathbf{P_1}\ \mathbf{P_2}\ \mathbf{P_3}\ \mathbf{P_4}) = (\mathbf{P'_1}\ \mathbf{P'_2}\ \mathbf{P'_3}\ \mathbf{P'_4}) = (\boldsymbol{\nu}_1,\ \boldsymbol{\nu}_2,\ \boldsymbol{\nu}_3,\ \boldsymbol{\nu}_4)$$

resulta que la razón doble $(\mathbf{P_1}\ \mathbf{P_2}\ \mathbf{P_3}\ \mathbf{P_4})$ no depende de la recta **s**, sino únicamente de los valores $\boldsymbol{\nu}_1,\ \boldsymbol{\nu}_2,\ \boldsymbol{\nu}_3,\ \boldsymbol{\nu}_4$.

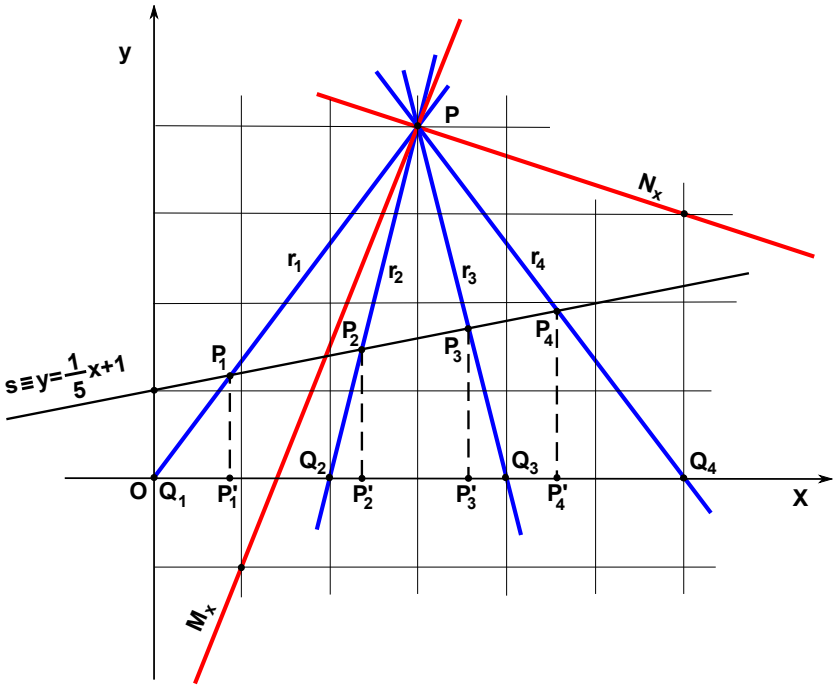
> El resultado es válido para la sección de toda cuaterna de rectas del haz por cualquier recta que no pasa por el punto **P**, ya que la condición $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, puede sustituirse por la $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ y repetir el razonamiento, pero con la proyección paralela de la cuaterna sobre el eje $\mathbf{x_2}$, ya que para ninguna recta del plano es: $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Ejemplo 4. Consideremos el haz plano de rectas determinado por

$$\mathbf{M_x \equiv 5 \cdot x - 2 \cdot y - 7 = 0}$$

$$\mathbf{N_x \equiv x + 3 \cdot y - 15 = 0}$$

de vértice el punto $\mathbf{P(3,\ 4)}$.



Las cuatro rectas del haz que vamos a manejar son:

$$\mathbf{r_1 \equiv 4 \cdot x - 3 \cdot y = 0}$$

$$\mathbf{r_2 \equiv 4 \cdot x - y - 8 = 0}$$

$$\mathbf{r_3 \equiv 4 \cdot x + y - 16 = 0}$$

$$\mathbf{r_4 \equiv 4 \cdot x + 3 \cdot y - 24 = 0}$$

La ecuación del haz al que pertenecen es

$$\mathbf{M_x + \nu \cdot N_x = 0}$$

es decir

$$\mathbf{5 \cdot x - 2 \cdot y - 7 + \nu \cdot (x + 3 \cdot y - 15) = 0}\ .$$

Para determinar los valores de $\boldsymbol{\nu}$, para cada una de estas rectas, procederemos como sigue:

Para $\mathbf{r_1}$ tendríamos

$$\mathbf{5 \cdot x - 2 \cdot y - 7 + \nu_1 \cdot (x + 3 \cdot y - 15) = \lambda_1 \cdot (4 \cdot x - 3 \cdot y)}$$

y operando

$$\mathbf{x \cdot (5 + \nu_1) + y \cdot (-2 + 3 \cdot \nu_1) + (-7 - 15 \cdot \nu_1) = 4 \cdot \lambda_1 \cdot x - 3 \cdot \lambda_1 \cdot y}$$

de donde

$$\left.\begin{array}{l} 5+\nu_1 = 4\cdot\lambda_1 \\ -2+3\cdot\nu_1 = -3\cdot\lambda_1 \\ -7-15\cdot\nu_1 = 0 \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{l} 4\cdot\lambda_1-\nu_1 = 5 \\ 3\cdot\lambda_1+3\cdot\nu_1 = 2 \\ \boxed{\nu_1 = \frac{-7}{15}} \end{array}\right\}$$

Sustituyendo el valor de ν_1, en las dos primeras ecuaciones tendremos

$$\left.\begin{array}{l} 4\cdot\lambda_1 - \frac{-7}{15} = 5 \\ \\ 3\cdot\lambda_1 + 3\cdot\frac{-7}{15} = 2 \end{array}\right\} \implies \boxed{\lambda_1 = \frac{17}{15}}$$

Este valor de λ único nos garantiza que $\mathbf{r_1}$, pertenece efectivamente al haz dado.
Comprobemos que para el valor $\nu_1 = \frac{-7}{15}$ obtenemos como recta del haz, la $\mathbf{r_1}$; para ello, al sustituir en la ecuación del haz

$$5\cdot x - 2\cdot y - 7 + \frac{-7}{15}\cdot(x+3\cdot y-15) = 0$$

y operar

$$x\cdot(5-\frac{7}{15}) + y\cdot(-2-\frac{7}{15}\cdot 3) + (-7+7) = 0$$

obtenemos

$$68\cdot x - 51\cdot y = 0$$

y simplificando, al dividir por 17, resulta:

$$r_1 \equiv 4\cdot x - 3\cdot y = 0$$

Procediendo en forma análoga con las rectas $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, $\mathbf{r_4}$ se obtendría:

Para,

$$\mathbf{r_2} \quad : \quad \boxed{\nu_2 = \frac{3}{13}} \quad , \quad \boxed{\lambda_2 = \frac{17}{13}}$$

$$\mathbf{r_3} \quad : \quad \boxed{\nu_3 = \frac{13}{11}} \quad , \quad \boxed{\lambda_3 = \frac{17}{11}}$$

$$\mathbf{r_4} \quad : \quad \boxed{\nu_4 = \frac{23}{9}} \quad , \quad \boxed{\lambda_4 = \frac{17}{9}}$$

Podemos, por tanto, escribir

$$(\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3,\ \nu_4) = \left(\frac{-7}{15},\ \frac{3}{13},\ \frac{13}{11},\ \frac{23}{9}\right) = \frac{\frac{\frac{13}{11}-\frac{-7}{15}}{\frac{13}{11}-\frac{3}{13}}}{\frac{\frac{23}{9}-\frac{-7}{15}}{\frac{23}{9}-\frac{3}{13}}} = \frac{1156}{867} = \frac{289\cdot 4}{289\cdot 3} = \frac{4}{3}$$

Las coordenadas del punto $\mathbf{P_1}$, las obtendremos como las del punto intersección de las rectas $\mathbf{s}$ y $\mathbf{r_1}$; así:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{r_1} \equiv \mathbf{4 \cdot x - 3 \cdot y = 0} \\ \mathbf{s} \equiv \mathbf{x - 5 \cdot y + 5 = 0} \end{array}\right\} \implies \mathbf{P_1}\left(\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{17}}, \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{17}}\right)$$

Luego las coordenadas del punto $\mathbf{P'_1}$, serán $\left(\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{17}}, \mathbf{0}\right)$.

Procediendo en forma análoga con los puntos $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$, $\mathbf{P_4}$, tendremos

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{r_2} \equiv \mathbf{4 \cdot x - y - 8 = 0} \\ \mathbf{s} \equiv \mathbf{x - 5 \cdot y + 5 = 0} \end{array}\right\} \implies \mathbf{P_2}\left(\frac{\mathbf{45}}{\mathbf{19}}, \frac{\mathbf{28}}{\mathbf{19}}\right)$$

siendo las coordenadas del punto $\mathbf{P'_2}$ las $\left(\frac{\mathbf{45}}{\mathbf{19}}, \mathbf{0}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{r_3} \equiv \mathbf{4 \cdot x + y - 16 = 0} \\ \mathbf{s} \equiv \mathbf{x - 5 \cdot y + 5 = 0} \end{array}\right\} \implies \mathbf{P_3}\left(\frac{\mathbf{25}}{\mathbf{7}}, \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{7}}\right)$$

siendo las coordenadas del punto $\mathbf{P'_3}$ las $\left(\frac{\mathbf{25}}{\mathbf{7}}, \mathbf{0}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{r_4} \equiv \mathbf{4 \cdot x + 3 \cdot y - 24 = 0} \\ \mathbf{s} \equiv \mathbf{x - 5 \cdot y + 5 = 0} \end{array}\right\} \implies \mathbf{P_4}\left(\frac{\mathbf{105}}{\mathbf{23}}, \frac{\mathbf{44}}{\mathbf{23}}\right)$$

siendo las coordenadas del punto $\mathbf{P'_4}$ las $\left(\frac{\mathbf{105}}{\mathbf{23}}, \mathbf{0}\right)$.

Así tendremos:

$$(\mathbf{P'_1\ P'_2\ P'_3\ P'_4}) = \left(\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{17}}, \frac{\mathbf{45}}{\mathbf{19}}, \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{7}}, \frac{\mathbf{105}}{\mathbf{23}}\right) = \frac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{25}}{\mathbf{7}} - \dfrac{\mathbf{15}}{\mathbf{17}}}{\dfrac{\mathbf{25}}{\mathbf{7}} - \dfrac{\mathbf{45}}{\mathbf{19}}}}{\dfrac{\dfrac{\mathbf{105}}{\mathbf{23}} - \dfrac{\mathbf{15}}{\mathbf{17}}}{\dfrac{\mathbf{105}}{\mathbf{23}} - \dfrac{\mathbf{45}}{\mathbf{19}}}} = \frac{\mathbf{3072}}{\mathbf{2304}} = \frac{\mathbf{768 \cdot 4}}{\mathbf{768 \cdot 3}} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$$

Si en lugar de haber tomado la recta $\mathbf{s}$ hubiéramos cortado el haz por el eje de abscisas los puntos de intersección hubiesen tenido como coordenadas para los cuatro la ordenada $\mathbf{0}$, y las abscisas los valores:

$$\mathbf{0},\ \mathbf{2},\ \mathbf{4},\ \mathbf{6}.$$

Luego:

$$(\mathbf{Q_1\ Q_2\ Q_3\ Q_4}) = (\mathbf{0},\ \mathbf{2},\ \mathbf{4},\ \mathbf{6}) = \frac{\dfrac{\mathbf{4-0}}{\mathbf{4-2}}}{\dfrac{\mathbf{6-0}}{\mathbf{6-2}}} = \frac{\mathbf{2}}{\dfrac{\mathbf{6}}{\mathbf{4}}} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\ ,$$

evidentemente el mismo valor que el que obtuvimos para la razón doble $(\mathbf{P'_1P'_2P'_3P'_4})$.

Podemos, por tanto, escribir:

$$(\mathbf{P_1\ P_2\ P_3\ P_4}) = (\mathbf{P'_1\ P'_2\ P'_3\ P'_4}) = (\mathbf{Q_1\ Q_2\ Q_3\ Q_4}) = (\boldsymbol{\nu_1},\ \boldsymbol{\nu_2},\ \boldsymbol{\nu_3},\ \boldsymbol{\nu_4}) = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$$

Representemos ahora el haz de rectas tomando como rectas base otras dos rectas, eventualmente distintas, $\mathbf{r'}$ y $\mathbf{r''}$

$$\mathbf{r'} \equiv \mathbf{M_x} + \boldsymbol{\nu'} \cdot \mathbf{N_x} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{r''} \equiv \mathbf{M_x} + \boldsymbol{\nu''} \cdot \mathbf{N_x} = \mathbf{0}$$

es decir:

$$\mathbf{M_x} + \boldsymbol{\nu'} \cdot \mathbf{N_x} + \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{M_x} + \boldsymbol{\nu''} \cdot \mathbf{N_x}) = \mathbf{0}.$$

Podemos escribir esta ecuación en la forma:

$$\mathbf{M_x} + \frac{\boldsymbol{\nu'} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu''}}{\mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{N_x} = \mathbf{0}.$$

que comparada con la

$$\mathbf{M_x} + \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{N_x} = \mathbf{0}$$

nos da

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\boldsymbol{\nu'} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu''}}{\mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma}},$$

función homográfica, de discriminante $\boldsymbol{\nu'} - \boldsymbol{\nu''} \neq \mathbf{0}$

En consecuencia:

$$(\mathbf{P_1}\ \mathbf{P_2}\ \mathbf{P_3}\ \mathbf{P_4}) = (\boldsymbol{\nu_1},\ \boldsymbol{\nu_2},\ \boldsymbol{\nu_3},\ \boldsymbol{\nu_4}) = (\boldsymbol{\sigma_1},\ \boldsymbol{\sigma_2},\ \boldsymbol{\sigma_3},\ \boldsymbol{\sigma_4})$$

lo que nos permite enunciar: **La razón doble de la sección de cuatro rectas de un haz por una recta cualquiera que no sea del haz, sólo depende de la cuaterna de rectas** (la llamaremos **razón doble de las cuatro rectas**), y **en una representación cualquiera**, por ejemplo $\mathbf{M_x} + \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{N_x} = \mathbf{0}$, **ésta se expresa mediante la razón doble formal de los valores del parámetro, $\boldsymbol{\nu}$, que corresponden a dichas cuatro rectas**.

Ejemplo 5. Continuando con el ejemplo anterior, veamos a qué valores del parámetro $\boldsymbol{\sigma}$, del haz

$$\mathbf{M_x} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N_x} = \mathbf{0}$$

siendo

$$\mathbf{M_x} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{3} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{9} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{N_x} \equiv \mathbf{4} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{3} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{0}$$

es decir

$$\mathbf{x} - \mathbf{3} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{9} + \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{4} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{3} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{0},$$

corresponden las rectas $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$, $\mathbf{r_4}$.

Dado que la recta $\mathbf{r_1}$, coincide con la $\mathbf{N_x}$ el valor del parámetro $\boldsymbol{\sigma}_1$, correspondiente debe valer $\boldsymbol{\sigma_1} = \boldsymbol{\infty}$.

Para la recta $\mathbf{r_2}$ tendremos

$$\mathbf{x} - \mathbf{3} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{9} + \boldsymbol{\sigma_2} \cdot (\mathbf{4} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{3} \cdot \mathbf{y}) = \boldsymbol{\lambda_2} \cdot (\mathbf{4} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{8})$$

y operando

$$\mathbf{x}\cdot(\mathbf{1}+\mathbf{4}\cdot\boldsymbol{\sigma_2})+\mathbf{y}\cdot(-\mathbf{3}-\mathbf{3}\cdot\boldsymbol{\sigma_2})+\mathbf{9}=\mathbf{4}\cdot\boldsymbol{\lambda_2}\cdot\mathbf{x}-\boldsymbol{\lambda_2}\cdot\mathbf{y}-\mathbf{8}\cdot\boldsymbol{\lambda_2}$$

de donde

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{1}+\mathbf{4}\cdot\boldsymbol{\sigma_2}=\mathbf{4}\cdot\boldsymbol{\lambda_2}\\ -\mathbf{3}-\mathbf{3}\cdot\boldsymbol{\sigma_2}=-\boldsymbol{\lambda_2}\\ \mathbf{9}=-\mathbf{8}\cdot\boldsymbol{\lambda_2}\end{array}\right\}\implies\boldsymbol{\lambda_2}=\frac{-\mathbf{9}}{\mathbf{8}}\implies\left.\begin{array}{l}\mathbf{1}+\mathbf{4}\cdot\boldsymbol{\sigma_2}=\dfrac{-\mathbf{36}}{\mathbf{8}}\\ -\mathbf{3}-\mathbf{3}\cdot\boldsymbol{\sigma_2}=\dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{8}}\end{array}\right\}$$

es decir

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{\sigma_2}=\dfrac{-\frac{\mathbf{36}}{\mathbf{8}}-\mathbf{1}}{\mathbf{4}}=\dfrac{-\mathbf{44}}{\mathbf{32}}=\dfrac{-\mathbf{11}}{\mathbf{8}}\\ \boldsymbol{\sigma_2}=\dfrac{-\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{8}}-\mathbf{3}}{\mathbf{3}}=\dfrac{-\mathbf{33}}{\mathbf{24}}=\dfrac{-\mathbf{11}}{\mathbf{8}}\end{array}\right\}\implies\boldsymbol{\sigma_2}=-\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{8}}$$

Y procediendo en forma análoga, tendríamos

$$\boldsymbol{\sigma_3}=-\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{16}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_4}=-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{8}}$$

Luego, en definitiva, los parámetros serán.

$$\boldsymbol{\sigma_1}=\infty\qquad\boldsymbol{\sigma_2}=-\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{8}}\qquad\boldsymbol{\sigma_3}=-\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{16}}\qquad\boldsymbol{\sigma_4}=-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{8}}$$

y en consecuencia

$$(\boldsymbol{\sigma_1},\,\boldsymbol{\sigma_2},\,\boldsymbol{\sigma_3},\,\boldsymbol{\sigma_4})\;=\;\left(\infty,\,-\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{8}},\,-\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{16}},\,-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{8}}\right)=$$

$$=\frac{\left(\infty,\,-\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{8}},\,-\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{16}}\right)}{\left(\infty,\,-\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{8}},\,-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{8}}\right)}=\frac{\dfrac{-\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{16}}-\infty}{-\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{16}}+\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{8}}}}{\dfrac{-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{8}}-\infty}{-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{8}}+\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{8}}}}=\frac{\dfrac{-\mathbf{1}}{-\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{16}}+\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{8}}}}{\dfrac{-\mathbf{1}}{-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{8}}+\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{8}}}}=$$

$$=\frac{-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{8}}+\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{8}}}{\frac{-\mathbf{13}}{\mathbf{16}}+\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{8}}}=\frac{\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{8}}}{\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{16}}}=\frac{\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{16}}}{\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{16}}}=\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{9}}=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$$

Se cumple, por tanto, que

$$(\mathbf{P_1}\,\mathbf{P_2}\,\mathbf{P_3}\,\mathbf{P_4})=(\boldsymbol{\nu_1},\,\boldsymbol{\nu_2},\,\boldsymbol{\nu_3},\,\boldsymbol{\nu_4})=(\boldsymbol{\sigma_1},\,\boldsymbol{\sigma_2},\,\boldsymbol{\sigma_3},\,\boldsymbol{\sigma_4})=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$$

8.2 Proyectividad entre haces de rectas y entre haces de rectas y series

La última afirmación del apartado anterior nos permite definir la "razón doble de una cuaterna de rectas de una haz" como la razón doble formal de los parámetros que corresponden a las rectas, en una representación cualquiera; coincide ésta con la razón doble de una sección por una recta cualquiera que no sea del haz. Por otra parte, tenemos también establecido que las rectas de un haz se corresponden, según una biyección, con los valores reales (incluido $\boldsymbol{\infty}$) del parámetro en una representación cualquiera.
Así, llamaremos **proyectividad entre dos haces** o **entre una serie rectilínea y un haz** a toda biyección que conserve la razón doble de las cuaternas de rectas y puntos.

Resultará entonces que toda proyectividad entre haces de rectas cuyos elementos corresponden a parámetros reales $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\nu'}$, en representaciones como la

$$\mathbf{M_x} + \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{N_x} = \mathbf{0}$$

se representará mediante una ecuación bilineal entre los parámetros $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\nu'}$:

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu'} + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\nu} + \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\nu'} + \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad , \quad \textbf{siendo}: \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \neq \mathbf{0}$$

y recíprocamente.

En forma análoga, una proyectividad entre un haz $(\boldsymbol{\nu})$ y una serie $(\mathbf{x})$ se representará mediante una ecuación.

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\nu} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad , \quad \textbf{siendo}: \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \neq \mathbf{0}$$

y recíprocamente.

Ejemplo 1 Consideremos los dos haces planos de rectas siguientes:

1.er haz:

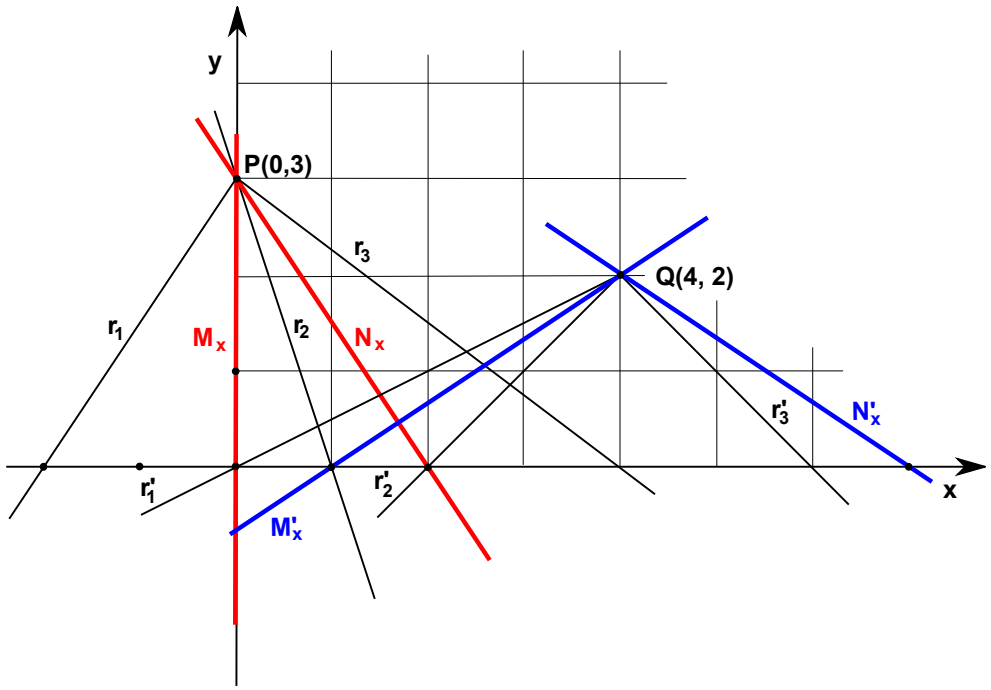
$$\mathbf{M_x} \equiv \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{N_x} \equiv \quad \mathbf{3} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{2} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{6} = \mathbf{0}$$

de vértice el punto $\mathbf{P}(\mathbf{0}, \mathbf{3})$

.2.o haz:

$$\mathbf{M'_x} \equiv \quad \mathbf{2} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{3} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{2} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{N_x} \equiv \quad \mathbf{2} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{3} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{14} = \mathbf{0}$$

de vértice el punto $\mathbf{Q}(\mathbf{4}, \mathbf{2})$.



Fijemos ahora tres rectas en cada uno de los haces anteriores, de ecuaciones respectivas:

Pertenecientes al primer haz:

$$\begin{aligned} \mathbf{r_1} &\equiv \quad \mathbf{3\cdot x - 2\cdot y + 6 = 0} \\ \mathbf{r_2} &\equiv \quad \mathbf{3\cdot x + y - 3 = 0} \\ \mathbf{r_3} &\equiv \quad \mathbf{3\cdot x + 4\cdot y - 12 = 0} \end{aligned}$$

Pertenecientes al segundo haz:

$$\begin{aligned} \mathbf{r'_1} &\equiv \quad \mathbf{x - 2\cdot y = 0} \\ \mathbf{r'_2} &\equiv \quad \mathbf{x - y - 2 = 0} \\ \mathbf{r'_3} &\equiv \quad \mathbf{x + y - 6 = 0} \end{aligned}$$

Si el primer haz, de vértice el punto $\mathbf{P(0,\ 3)}$, viene dado por

$$\mathbf{M_x + \nu \cdot N_x = 0}$$

es decir por:

$$\mathbf{x + \nu \cdot (3\cdot x + 2\cdot y - 6) = 0}$$

los valores de los correspondientes parámetros que nos proporcionan las anteriores rectas $\mathbf{r_i (i = 1,\ 2,\ 3)}$ son, según ya aprendimos a calcular,

$$\mathbf{r_1} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\nu_1} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$$

$$\mathbf{r_2} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\nu_2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

$$\mathbf{r_3} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\nu_3} = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

En forma análoga, para el haz de vértice el punto $\mathbf{Q}(\mathbf{4},\ \mathbf{2})$ dado por

$$\mathbf{M'_x} + \boldsymbol{\nu'} \cdot \mathbf{N'_x} = \mathbf{0}$$

es decir

$$\mathbf{2} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{3} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{2} + \boldsymbol{\nu'} \cdot (\mathbf{2} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{3} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{14}) = \mathbf{0}$$

los valores de los correspondientes parámetros que nos proporcionan las anteriores tres rectas $\mathbf{r'_i}(\mathbf{i} = \mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3})$ son

$$\mathbf{r'_1} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\nu'_1} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}$$

$$\mathbf{r'_2} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\nu'_2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$$

$$\mathbf{r'_3} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\nu'_3} = \mathbf{5}$$

Con estos datos podemos establecer fácilmente una proyectividad entre los dos haces dados. Si la ecuación de la proyectividad es

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu'} + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\nu} + \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\nu'} + \mathbf{d} = \mathbf{0} \qquad (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \neq \mathbf{0})$$

vamos a establecer como correspondientes:

$$\mathbf{r_1}\left(\boldsymbol{\nu_1} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\right) \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{r'_1}\left(\boldsymbol{\nu'_1} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}\right)$$

$$\mathbf{r_2}\left(\boldsymbol{\nu_2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right) \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{r'_2}\left(\boldsymbol{\nu'_2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\right)$$

$$\mathbf{r_3}\left(\boldsymbol{\nu_3} = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right) \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{r'_3}\left(\boldsymbol{\nu'_3} = \mathbf{5}\right)$$

aunque la correspondencia hubiera podido ser otra y por tanto la proyectividad sería también otra. Supuesto que $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, por ejemplo $\mathbf{a} = \mathbf{1}$, vamos a determinar los valores **b**, **c** y **d** que nos determinarán la ecuación de la proyectividad, a base de sustituir los valores $\boldsymbol{\nu_i}$ y $\boldsymbol{\nu'_i}$ **(i=1, 2, 3)** resolviendo el sistema correspondiente:

$$\left.\begin{array}{l} \left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\right) \cdot \left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}\right) + \mathbf{b} \cdot \left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\right) + \mathbf{c} \cdot \left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}\right) + \mathbf{d} = \mathbf{0} \\ \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right) \cdot \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\right) + \mathbf{b} \cdot \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right) + \mathbf{c} \cdot \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\right) + \mathbf{d} = \mathbf{0} \\ \left(-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right) \cdot (\mathbf{5}) + \mathbf{b} \cdot \left(-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right) + \mathbf{c} \cdot (\mathbf{5}) + \mathbf{d} = \mathbf{0} \end{array}\right\}$$

es decir

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{1} - \mathbf{7} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{6} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{42} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{0} \\ \mathbf{1} + \mathbf{5} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{3} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{15} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{0} \\ -\mathbf{10} - \mathbf{2} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{15} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{3} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{0} \end{array}\right\}$$

sistema compatible y determinado, puesto que:

$$\begin{vmatrix} -7 & -6 & 42 \\ 5 & 3 & 15 \\ -2 & 15 & 3 \end{vmatrix} = 5184 \neq 0$$

cuyas soluciones son:

$$\mathbf{b} = -\frac{1}{2} \quad , \quad \mathbf{c} = \frac{29}{48} \quad , \quad \mathbf{d} = -\frac{1}{48}$$

Luego la ecuación de la proyectividad establecida será:

$$\boxed{\nu \cdot \nu' - \frac{1}{2} \cdot \nu + \frac{29}{48} \cdot \nu' - \frac{1}{48} = 0}$$

A partir de aquí, la determinación de los rayos homólogos no presentará ninguna dificultad. Veamos un ejemplo sencillo: Para hacer corresponder al valor $\nu = \frac{1}{48}$, que determinará una recta del primer haz, el valor de ν' que nos dará la recta homóloga de ella en el segundo haz, bastará sustituir $\nu = \frac{1}{48}$ en la ecuación de la proyectividad y despejar ν'. Así,

$$\frac{1}{48} \cdot \nu' - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{48} + \frac{29}{48} \cdot \nu' - \frac{1}{48} = 0$$

luego, operando

$$\nu' \cdot \left(\frac{1}{48} + \frac{29}{48} \right) = \frac{1}{48} \cdot \left(\frac{1}{2} + 1 \right),$$

$$30 \cdot \nu' = \frac{3}{2}$$

es decir

$$\nu' = \frac{1}{20}$$

En consecuencia

$$\nu = \frac{1}{48} \quad \longleftrightarrow \quad \nu' = \frac{1}{20}$$

Las rectas homólogas correspondientes serán, por tanto,

- En el primer haz

  $$\mathbf{x} + \frac{1}{48} \cdot (3 \cdot \mathbf{x} + 2 \cdot \mathbf{y} - 6) = 0$$

  es decir

  $$\mathbf{r} \equiv 51 \cdot \mathbf{x} + 2 \cdot \mathbf{y} - 6 = 0$$

- En el segundo haz

  $$(2 \cdot \mathbf{x} - 3 \cdot \mathbf{y} - 2) + \frac{1}{20} \cdot (2 \cdot \mathbf{x} + 3 \cdot \mathbf{y} - 14) = 0$$

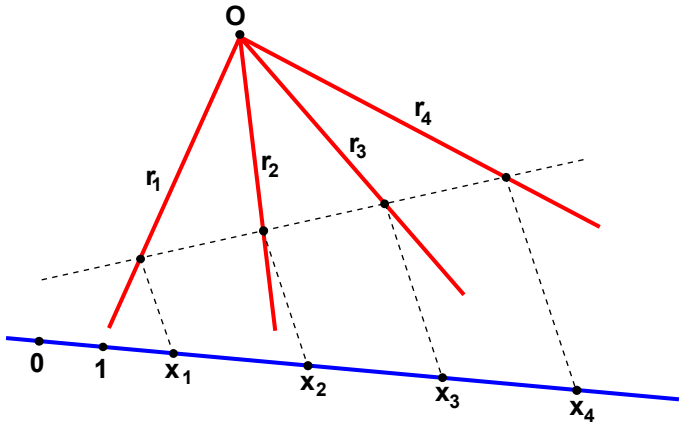
  es decir

  $$\mathbf{r}' \equiv 14 \cdot \mathbf{x} - 19 \cdot \mathbf{y} - 18 = 0$$

Ejemplo 2. Una ecuación tal como la siguiente

$$\nu \cdot x - \frac{1}{2} \cdot \nu + \frac{29}{48} \cdot x - \frac{1}{48} = 0$$

puede también interpretarse como una proyectividad entre las rectas de un haz, de parámetro ν, y una serie rectilínea en la que las x representan la coordenada cartesiana de sus puntos.



8.3 Haz de planos. Razón doble de cuatro planos de un haz

En el espacio, y según sabemos, una recta r queda representada por la ecuación de dos planos distintos cualesquiera que la contengan:

$$\begin{cases} M_x \equiv a_1 \cdot x_1 + b_1 \cdot x_2 + c_1 \cdot x_3 + d_1 = 0 \\ N_x \equiv a_2 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + c_2 \cdot x_3 + d_2 = 0 \end{cases}$$

Para todo valor de ν, la ecuación:

$$M_x + \nu \cdot N_x = 0$$

representa, evidentemente, un plano del haz de arista r.

Recíprocamente, si un plano contiene a r, su ecuación es de la forma

$$M_x + \nu \cdot N_x = 0$$

pues si su ecuación es

$$a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 + d = 0$$

el sistema formado por las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \cdot x_1 + b_1 \cdot x_2 + c_1 \cdot x_3 + d = 0 \\ a_2 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + c_2 \cdot x_3 + d = 0 \\ a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 + d = 0 \end{array}\right\}$$

tiene como soluciones todos los puntos de $\mathbf{r}$, luego el rango de la matriz correspondiente es 2, igual al correspondiente a las ecuaciones

$$\begin{cases} \mathbf{M_x} = \mathbf{0} \\ \mathbf{N_x} = \mathbf{0} \end{cases}$$

de donde deducimos la existencia de valores $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$ tales que

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{a_1} + \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{a_2}$$

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{b_1} + \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{b_2}$$

$$\mathbf{c} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{c_1} + \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{c_2}$$

$$\mathbf{d} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{d_1} + \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{d_2}$$

y supuesto $\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0}$, basta poner $\boldsymbol{\nu} = \dfrac{\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\lambda}}$ para identificar la ecuación

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{x_2} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{x_3} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$$

con la que resulta de la

$$\mathbf{M_x} + \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{N_x} = \mathbf{0}$$

al tomar $\boldsymbol{\nu} = \dfrac{\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\lambda}}$

En el caso de ser $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$, el plano

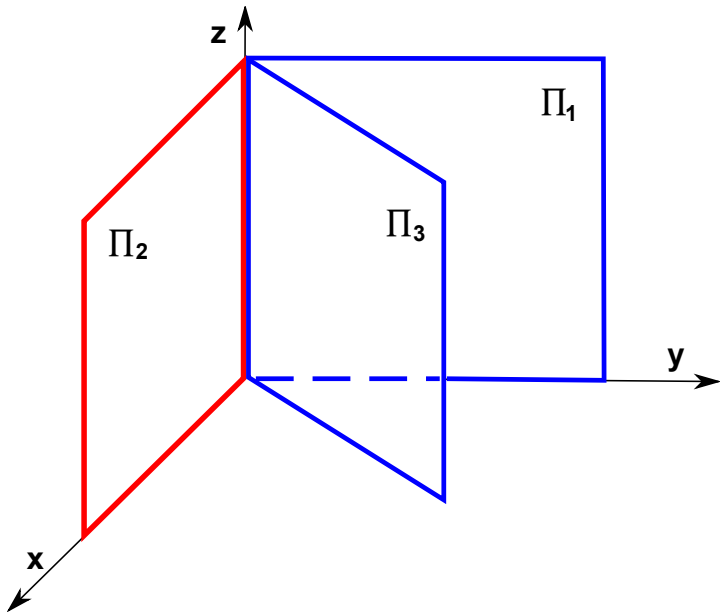
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{x_2} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{x_3} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$$

coincide con el $\mathbf{N_x} = \mathbf{0}$.

Ejemplo 1. Consideremos, en el espacio ordinario, los dos planos siguientes:

$$\boldsymbol{\Pi_1} \equiv \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\Pi_2} \equiv \mathbf{y} = \mathbf{0}$$



El haz de planos de arista

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{x = 0} \\ \mathbf{y = 0} \end{array}\right\}$$

vendrá dado por la ecuación

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{x} + \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{0}$$

El plano correspondiente a $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\mu} = \mathbf{1}$ será el

$$\boldsymbol{\Pi_3} \equiv \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$$

Consideremos ahora los cuatro planos $\boldsymbol{\Pi_1},\ \boldsymbol{\Pi_2},\ \boldsymbol{\Pi_3},\ \boldsymbol{\Pi_4}$ del haz

$$\mathbf{M_x} + \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{N_x} = \mathbf{0}$$

que obtenemos para $\boldsymbol{\nu}$ igual a $\boldsymbol{\nu_1}, \boldsymbol{\nu_2}, \boldsymbol{\nu_3}, \boldsymbol{\nu_4}$, respectivamente, y sea la recta determinada por los puntos **P**, **Q**, de ecuaciones paramétricas.

$$\mathbf{x_i} = \mathbf{p_i} + (\mathbf{q_i} - \mathbf{p_i}) \cdot \mathbf{t} \qquad , \qquad \mathbf{i = 1,\ 2,\ 3}$$

en la que el parámetro

$$\mathbf{t} = \frac{\overline{\mathbf{PX}}}{\overline{\mathbf{PQ}}}$$

es la abscisa cartesiana, sobre la recta $\overline{\mathbf{PQ}}$, del punto **X**, respecto del origen **P** y punto unidad **Q**.

Supondremos que la recta $\overline{\mathbf{PQ}}$ ni corta ni es paralela a la recta **r**.

Determinemos la intersección, **R** de la recta

$$\mathbf{x_i} = \mathbf{p_i} + (\mathbf{q_i} - \mathbf{p_i}) \cdot \mathbf{t} \qquad , \qquad \mathbf{i} = \mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3}$$

con el plano

$$\mathbf{M_x} + \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{N_x} = \mathbf{0}$$

Procediendo por sustitución y ordenando convenientemente obtendremos la siguiente relación bilineal entre **t** y $\boldsymbol{\nu}$, a la que llamaremos relación homográfica entre **t** y $\boldsymbol{\nu}$:

$$\mathbf{M(P)} + (\mathbf{M(Q)} - \mathbf{M(P)}) \cdot \mathbf{t} + \mathbf{N(P)} \cdot \boldsymbol{\nu} + (\mathbf{N(Q)} - \mathbf{N(P)}) \cdot \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}$$

en la que **M(P)**, **M(Q)**, **N(P)** y **N(Q)** simbolizan los valores que toman los primeros miembros de las ecuaciones

$$\begin{cases} \mathbf{M_x} \equiv \mathbf{a_1} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{b_1} \cdot \mathbf{x_2} + \mathbf{c_1} \cdot \mathbf{x_3} + \mathbf{d_1} = \mathbf{0} \\ \mathbf{N_x} \equiv \mathbf{a_2} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{b_2} \cdot \mathbf{x_2} + \mathbf{c_2} \cdot \mathbf{x_3} + \mathbf{d_2} = \mathbf{0} \end{cases}$$

en los puntos **P** y **Q**.
La denominada relación homográfica entre **t** y $\boldsymbol{\nu}$ tiene el siguiente módulo:

$$\mathbf{N(P)} \cdot \mathbf{M(Q)} - \mathbf{M(P)} \cdot \mathbf{N(Q)},$$

cuya anulación equivale a la compatibilidad de las ecuaciones

$$\mathbf{M(P)} + \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{N(P)} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M(Q)} + \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{N(Q)} = \mathbf{0}$$

es decir, a la existencia de un plano del haz

$$\mathbf{M_x} + \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{N_x} = \mathbf{0}$$

que contiene a la recta $\overline{\mathbf{PQ}}$, o sea que éste corte a la recta **r**, caso que excluimos por la forma en que elegimos la recta $\overline{\mathbf{PQ}}$.
En consecuencia, la que hemos denominado relación homográfica entre **t** y $\boldsymbol{\nu}$ prueba que la razón doble de los cuatro puntos de intersección de la recta $\overline{\mathbf{PQ}}$ con los cuatro planos considerados vale:

$$(\boldsymbol{\Pi_1},\ \boldsymbol{\Pi_2},\ \boldsymbol{\Pi_3},\ \boldsymbol{\Pi_4}) = (\mathbf{R_1},\ \mathbf{R_2},\ \mathbf{R_3},\ \mathbf{R_4}) = (\mathbf{t_1},\ \mathbf{t_2},\ \mathbf{t_3},\ \mathbf{t_4}) = (\boldsymbol{\nu_1},\ \boldsymbol{\nu_2},\ \boldsymbol{\nu_3},\ \boldsymbol{\nu_4})$$

lo que constituye la definición de **razón doble de cuatro planos de un haz**, puesto que este valor sólo depende de éstos, y no de la recta $\overline{\mathbf{PQ}}$, así como tampoco de la particular representación del haz.

Ejemplo 2. Consideremos el haz de planos siguientes:

$$\lambda \cdot x + \mu \cdot y = 0$$

o lo que es lo mismo, haciendo $\nu = \dfrac{\mu}{\lambda}$

$$x + \nu \cdot y = 0$$

Los cuatro planos correspondientes a los valores

$$\nu_1 = 0 \quad , \quad \nu_2 = -2 \quad , \quad \nu_3 = -1 \quad , \quad \nu_4 = \infty$$

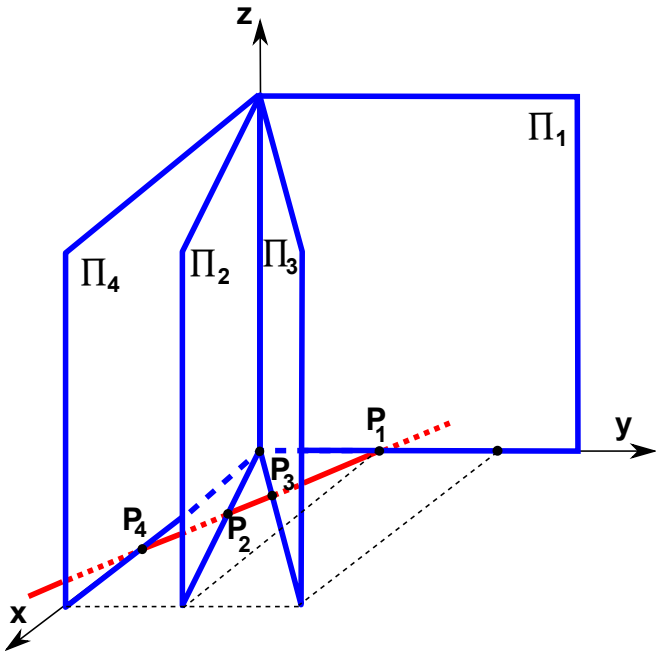
serán, respectivamente

$$\begin{aligned} \Pi_1 &\equiv x = 0 \\ \Pi_2 &\equiv x - 2 \cdot y = 0 \\ \Pi_3 &\equiv x - y = 0 \\ \Pi_4 &\equiv y = 0 \end{aligned}$$

y su razón doble será

$$(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4) = (0, -2, -1, \infty) =$$

$$= \frac{(0, -2, -1)}{(0, -2, \infty)} = \frac{\dfrac{-1-0}{-1+2}}{\dfrac{\infty - 0}{\infty + 2}} = \frac{\dfrac{-1}{1}}{\dfrac{1}{1}} = -1$$



Si cortamos estos planos por la recta de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

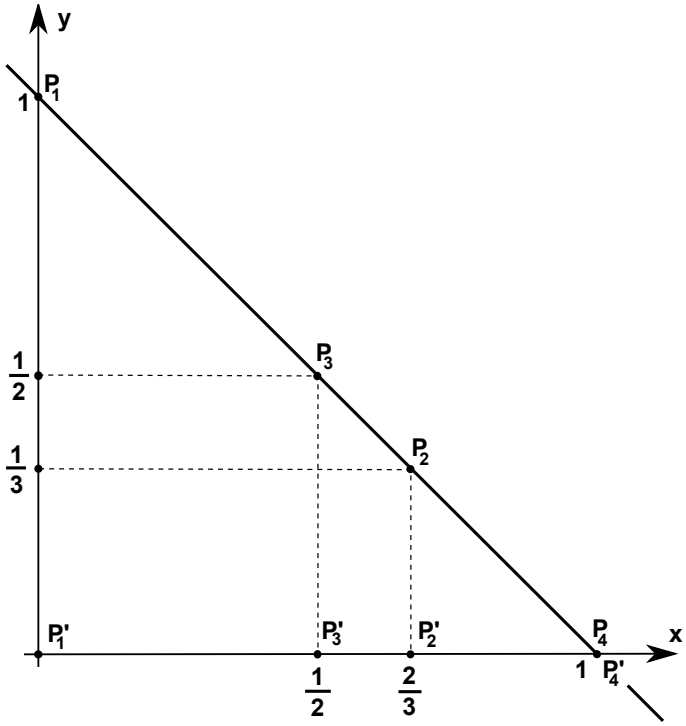
sus puntos de intersección, todos de coordenada **z=0**, tendrán como coordenada **x**, **y** respectivas

$$\mathbf{P_1} \implies \mathbf{x = 0} \quad , \quad \mathbf{y = 1}$$

$$\mathbf{P_2} \implies \mathbf{x = \frac{2}{3}} \quad , \quad \mathbf{y = \frac{1}{3}}$$

$$\mathbf{P_3} \implies \mathbf{x = \frac{1}{2}} \quad , \quad \mathbf{y = \frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{P_4} \implies \mathbf{x = 1} \quad , \quad \mathbf{y = 0}$$



siendo por tanto

$$(\mathbf{\Pi_1}, \mathbf{\Pi_2}, \mathbf{\Pi_3}, \mathbf{\Pi_4}) = (\mathbf{P_1}, \mathbf{P_2}, \mathbf{P_3}, \mathbf{P_4}) = (\mathbf{P'_1}, \mathbf{P'_2}, \mathbf{P'_3}, \mathbf{P'_4}) =$$

$$= \left(\mathbf{0}, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \mathbf{1}\right) = \frac{\left(\mathbf{0}, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)}{\left(\mathbf{0}, \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}, \mathbf{1}\right)} = \frac{\frac{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - \mathbf{0}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}}}{\frac{\mathbf{1} - \mathbf{0}}{\mathbf{1} - \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}}} = \frac{\frac{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}{\frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{6}}}}{\frac{\mathbf{1}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}}} = \frac{\mathbf{-3}}{\mathbf{3}} = \mathbf{-1}$$

8.4 Proyectividad entre figuras de primera categoría

La definición establecida en el punto anterior de **razón doble de cuatro planos de un haz**, permite extender la noción de **proyectividad** a dos figuras de primera categoría cualesquiera como son: la **serie de puntos**, el **haz plano de rectas** y el **haz de planos**.
Así, tenemos que: **Proyectividad entre figuras de primera categoría** es toda biyección entre dos figuras de primera categoría que conserva la razón doble.

Históricamente la proyectividad entre figuras de primera categoría se ha definido de forma diferente, aunque **todas ellas equivalentes**. Son de destacar las aportaciones que hicieron, en este sentido, tres grandes matemáticos: Jean Victor PONCELET (1788-1867), Michel CHASLES (1793-1880) Y Karl Georg Christian von STAUDT (1798-1867).

- **La proyectividad según PONCELET**. Dos formas de primera categoría se llaman **proyectivas entre sí** cuando pueden obtenerse una de otra por una sucesión de proyecciones y secciones.

- **La proyectividad según CHASLES**. Dos formas de primera categoría se llaman **proyectivas** cuando se corresponden elemento a elemento, de tal modo que la razón doble de cuatro elementos cualesquiera, tomados en una forma, es igual a la razón doble de sus homólogos en la otra.
  Esta definición tiene, sobre la de PONCELET, la ventaja de manejar sólo caracteres intrínsecos de las formas, y el inconveniente de valerse, para la caracterización de la proyectividad, del concepto de medida, innecesario para la edificación de la Geometría Proyectiva.

- **La proyectividad según STAUDT**. Dos formas de primera categoría se llaman **proyectivas** cuando se corresponden elemento a elemento, y a toda cuaterna armónica formada por elementos de la primera figura corresponde una cuaterna armónica formada por sus elementos homólogos.
  Esta definición elimina de la Geometría Proyectiva todo concepto de medida, con la ventaja adicional de que la cuaterna armónica puede definirse, como veremos, gráficamente mediante el cuadrivértice o cuadrilátero, es decir, usando sólo conceptos de incidencia.

Lección 9.- INVOLUCIÓN ENTRE HACES DE RECTAS

9.1 Proyectividad entre haces de rectas
9.2 Involuciones
9.3 Teorema de Frégier
9.4 Aplicaciones del Teorema de Frégier

9.1 Proyectividad entre haces de rectas

En la lección anterior establecimos como proyectividad, entre dos haces, a toda biyección que conserve la razón doble de las cuaternas de rectas, que luego determinábamos analíticamente mediante una ecuación bilineal entre los parámetros $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\nu}'$.

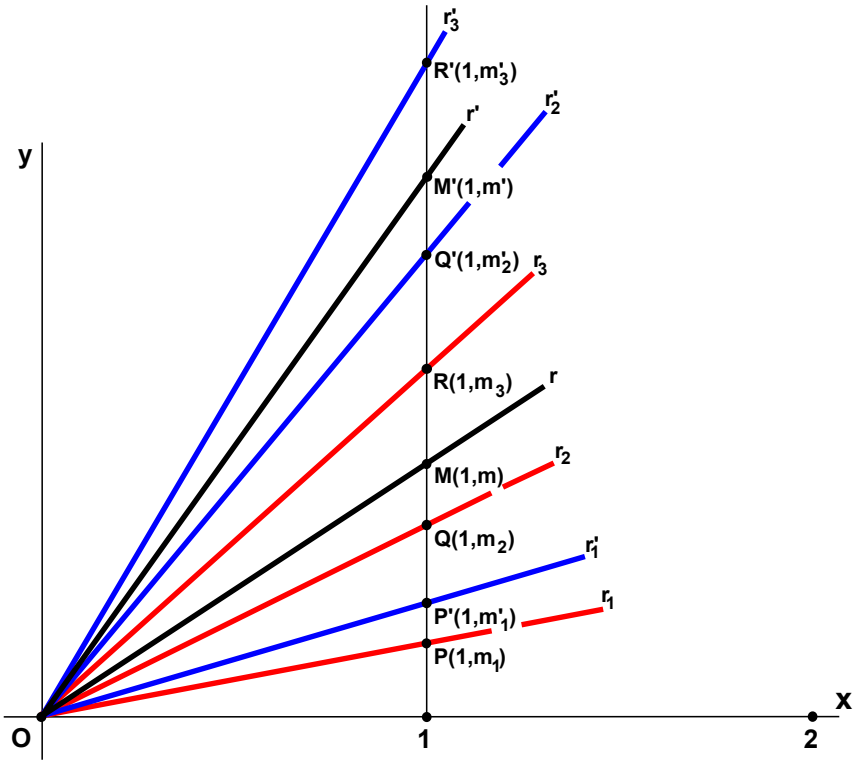
$$\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}'+\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu}+\mathbf{c}\cdot\boldsymbol{\nu}'+\mathbf{d}=\mathbf{0}$$

cada uno de ellos representando a las rectas de ambos haces.
Establezcamos ahora que, para dos haces proyectivos de rectas, superpuestas, las pendientes $\mathbf{m}$, $\mathbf{m}'$ de dos rayos homólogos cualesquiera verifican, también, una relación de la forma

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}'+\mathbf{B}\cdot\mathbf{m}+\mathbf{C}\cdot\mathbf{m}'+\mathbf{D}=\mathbf{0}$$

en la que $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ son constantes.

> En efecto: Sea $\mathbf{O}$ el vértice común, de los dos haces, $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$ tres rectas del primer haz y $\mathbf{r'_1}$, $\mathbf{r'_2}$, $\mathbf{r'_3}$, sus correspondientes homólogas en el segundo haz. Designemos $\mathbf{m_1}$, $\mathbf{m_2}$, $\mathbf{m_3}$ las pendientes de las tres primeras rectas y $\mathbf{m'_1}$, $\mathbf{m'_2}$, $\mathbf{m'_3}$ las pendientes de las tres rectas correspondientes, en la proyectividad que así ha quedado establecida. Asimismo, $\mathbf{m}$ y $\mathbf{m}'$ designarán las pendientes de las rectas homólogas $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$, respectivamente del primer y del segundo haz.
>
> Para establecer lo que nos interesa nos valdremos del siguiente artificio, sin pérdida de generalidad como es fácil de ver. Supondremos que el vértice coincide con el origen de coordenadas, y que ambos haces son cortados por la recta $\mathbf{x}=\mathbf{1}$, lo que supondrá que las ordenadas de sus puntos de intersección con las rectas de dichos haces serán, precisamente, la pendientes respectivas de cada una de las rectas.
> Así, para las rectas $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$ y $\mathbf{r}$, los puntos de intersección serán los $\mathbf{P}(\mathbf{1},\ \mathbf{m_1})$, $\mathbf{Q}(\mathbf{1},\ \mathbf{m_2})$, $\mathbf{R}(\mathbf{1},\ \mathbf{m_3})$, y $\mathbf{M}(\mathbf{1},\ \mathbf{m})$, y para sus correspondientes homólogas, los $\mathbf{P}'(\mathbf{1},\ \mathbf{m'_1})$, $\mathbf{Q}'(\mathbf{1},\ \mathbf{m'_2})$, $\mathbf{R}'(\mathbf{1},\ \mathbf{m'_3})$, y $\mathbf{M}'(\mathbf{1},\ \mathbf{m}')$.



La proyectividad entre los haces dados se traduce entonces en la igualdad de las razones dobles siguientes:

$$(\mathbf{P}\ \mathbf{Q}\ \mathbf{R}\ \mathbf{M}) = (\mathbf{P}'\ \mathbf{Q}'\ \mathbf{R}'\ \mathbf{M}')$$

que se podrá expresar como sigue:

$$(\mathbf{m_1},\ \mathbf{m_2},\ \mathbf{m_3},\ \mathbf{m}) = (\mathbf{m'_1},\ \mathbf{m'_2},\ \mathbf{m'_3},\ \mathbf{m}')$$

igualdad en la pasamos a operar; así tendremos

$$\frac{(\mathbf{m_1},\ \mathbf{m_2},\ \mathbf{m_3})}{(\mathbf{m_1},\ \mathbf{m_2},\ \mathbf{m})} = \frac{(\mathbf{m'_1},\ \mathbf{m'_2},\ \mathbf{m'_3})}{(\mathbf{m'_1},\ \mathbf{m'_2},\ \mathbf{m}')}$$

y como las razones simples de los numeradores son constantes

$$(\mathbf{m_1},\ \mathbf{m_2},\ \mathbf{m_3}) = \mathbf{a}$$

$$(\mathbf{m'_1},\ \mathbf{m'_2},\ \mathbf{m'_3}) = \mathbf{b}$$

podremos escribir

$$\frac{\mathbf{a}}{\dfrac{\mathbf{m}-\mathbf{m_1}}{\mathbf{m}-\mathbf{m_2}}} = \frac{\mathbf{b}}{\dfrac{\mathbf{m}'-\mathbf{m}'_1}{\mathbf{m}'-\mathbf{m}'_2}}$$

igualdad que podemos ir transformando como sigue:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{m}-\mathbf{m_2})\cdot(\mathbf{m}'-\mathbf{m}'_1) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{m}'-\mathbf{m}'_2)\cdot(\mathbf{m}-\mathbf{m_1})$$

$$\mathbf{a\cdot m\cdot m'-a\cdot m\cdot m'_1-a\cdot m_2\cdot m'+a\cdot m_2\cdot m'_1=b\cdot m'\cdot m-b\cdot m'\cdot m_1-b\cdot m'_2\cdot m+b\cdot m'_2\cdot m_1}$$

$$\mathbf{(a-b)\cdot m\cdot m'+(b\cdot m'_2-a\cdot m'_1)\cdot m+(b\cdot m_1-a\cdot m_2)+(a\cdot m_2\cdot m'_1-b\cdot m'_2\cdot m_1)}$$

y sí hacemos

$$\begin{aligned}\mathbf{a-b}&=\mathbf{A}\\ \mathbf{b\cdot m'_2-a\cdot m'_1}&=\mathbf{B}\\ \mathbf{b\cdot m_1-a\cdot m_2}&=\mathbf{C}\\ \mathbf{a\cdot m_2\cdot m'_1-b\cdot m'_2\cdot m_1}&=\mathbf{D}\end{aligned}$$

obtendremos la relación que nos interesaba

$$\mathbf{A\cdot m\cdot m'+B\cdot m+C\cdot m'+D=0}$$

ecuación de la proyectividad de los dos haces superpuestos en la que los parámetros son las pendientes de las correspondientes rectas homólogas.

En ocasiones, diremos que las pendientes de las rectas homólogas están ligadas algebraicamente.

Ejemplo 1. Consideremos los dos haces planos de rectas de vértice común $\mathbf{P(3,\ 4)}$. Vamos a establecer una proyectividad entre ellos, haciendo corresponder a las rectas

$$\begin{aligned}\mathbf{r_1}&\equiv\mathbf{4\cdot x-3\cdot y=0}\\ \mathbf{r_2}&\equiv\mathbf{4\cdot x-y-8=0}\\ \mathbf{r_3}&\equiv\mathbf{4\cdot x+y-16=0}\end{aligned}$$

del primer haz, respectivamente las rectas

$$\begin{aligned}\mathbf{r'_1}&\equiv\mathbf{5\cdot x-2\cdot y-7=0}\\ \mathbf{r'_2}&\equiv\mathbf{4\cdot x+3\cdot y-24=0}\\ \mathbf{r'_3}&\equiv\mathbf{x+3\cdot y-15=0}\end{aligned}$$

del segundo haz.

Puesto que conocemos las pendientes de esas rectas, vamos a establecer la proyectividad a base de relacionar las pendientes de las rectas homólogas, que obtendremos fácilmente. Se trata, pues, de determinar los coeficientes **A**, **B**, **C**, **D** de la ecuación

$$\mathbf{A\cdot m\cdot m'+B\cdot m+C\cdot m'+D=0},$$

y supuesto $\mathbf{A\neq 0}$, dividiremos por él, con lo que en la ecuación tendremos que determinar sólo **B**, **C**, **D**.

Las pendientes de las rectas $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$ serán, respectivamente

$$\mathbf{m_1=\frac{4}{3}}\qquad\mathbf{m_2=4}\qquad\mathbf{m_3=-4}$$

y las de sus rectas homólogas, $\mathbf{r'_1}$, $\mathbf{r'_2}$, $\mathbf{r'_3}$ serán también, respectivamente

$$\mathbf{m'_1=\frac{5}{2}}\qquad\mathbf{m'_2=-\frac{4}{3}}\qquad\mathbf{m'_3=-\frac{1}{3}}$$

Como la correspondencia es

$$\mathbf{m_1\ \longleftrightarrow\ m'_1}\quad,\quad\mathbf{m_2\ \longleftrightarrow\ m'_2}\quad,\quad\mathbf{m_3\ \longleftrightarrow\ m'_3}\ ,$$

al sustituir en la ecuación

$$\mathbf{m\cdot m'+B\cdot m+C\cdot m'+D=0}$$

tendremos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\cdot\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}+\mathbf{B}\cdot\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}+\mathbf{C}\cdot\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}+\mathbf{D}&=\mathbf{0}\\ \mathbf{4}\cdot\left(-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\right)+\mathbf{B}\cdot\mathbf{4}+\mathbf{C}\cdot\left(-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\right)+\mathbf{D}&=\mathbf{0}\\ (-\mathbf{4})\cdot\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)+\mathbf{B}\cdot(-\mathbf{4})+\mathbf{C}\cdot\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)+\mathbf{D}&=\mathbf{0}\end{aligned}\right\}$$

es decir

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{20+8\cdot B+15\cdot C+6\cdot D}&=\mathbf{0}\\ \mathbf{-16+12\cdot B-4\cdot C+3\cdot D}&=\mathbf{0}\\ \mathbf{4-12\cdot B-C+3\cdot D}&=\mathbf{0}\end{aligned}\right\}$$

que resuelto da

$$\mathbf{B}=\frac{\mathbf{38}}{\mathbf{63}}\quad,\quad\mathbf{C}=\frac{\mathbf{-116}}{\mathbf{63}}\quad,\quad\mathbf{D}=\frac{\mathbf{88}}{\mathbf{3\cdot 63}}$$

Luego la ecuación de la proyectividad, en función de las pendientes será:

$$\mathbf{m\cdot m'}+\frac{\mathbf{38}}{\mathbf{63}}\cdot\mathbf{m}-\frac{\mathbf{116}}{\mathbf{63}}\cdot\mathbf{m'}+\frac{\mathbf{88}}{\mathbf{3\cdot 63}}=\mathbf{0}$$

es decir

$$\mathbf{189\cdot m\cdot m'+114\cdot m-348\cdot m'+88=0}$$

Si quisiéramos, ahora, determinar la recta homóloga del primer haz

$$\mathbf{x-y+1=0}$$

de pendiente

$$\mathbf{m=1}$$

tendríamos que sustituir ésta, en la ecuación de la proyectividad en función de las pendientes; así

$$\mathbf{189\cdot 1\cdot m'+114\cdot 1-348\cdot m'+88=0}$$

y operando

$$\mathbf{(189-348)\cdot m'+(114+88)=0}$$

es decir

$$\mathbf{-159\cdot m'+202=0}$$

de donde

$$\mathbf{m'}=\frac{\mathbf{202}}{\mathbf{159}};$$

pendiente ésta de la recta homóloga buscada. Puesto que dicha recta debe pasar por el vértice $\mathbf{P}(\mathbf{3},\ \mathbf{4})$ tendremos

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{202}}{\mathbf{159}} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{h}$$

y sustituyendo **x**, e **y** respectivamente por 3 y 4

$$\mathbf{4} = \frac{\mathbf{202}}{\mathbf{159}} \cdot \mathbf{3} + \mathbf{h}$$

de donde

$$\mathbf{h} = \mathbf{4} - \frac{\mathbf{606}}{\mathbf{159}} = \frac{\mathbf{4 \cdot 159 - 606}}{\mathbf{159}} = \frac{\mathbf{30}}{\mathbf{159}} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{53}}$$

con lo que la recta homóloga, perteneciente al segundo haz será:

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{202}}{\mathbf{159}} \cdot \mathbf{x} + \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{53}}$$

es decir

$$\mathbf{202 \cdot x - 159 \cdot y + 30 = 0}$$

Dado que se trata de haces superpuestos tendrá sentido calcular los eventuales rayos dobles de la proyectividad, bastando para ello hacer

$$\mathbf{m = m'}$$

en la ecuación de la proyectividad

$$\mathbf{189 \cdot m \cdot m' + 114 \cdot m - 348 \cdot m' + 88 = 0}$$

Así tendremos

$$\mathbf{189 \cdot m^2 + 114 \cdot m - 348 \cdot m + 88 = 0}$$

es decir

$$\mathbf{189 \cdot m^2 - 234 \cdot m + 88 = 0}$$

ecuación de segundo grado, que resuelta nos da

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \frac{\mathbf{234 \pm \sqrt{234^2 - 4 \cdot 189 \cdot 88}}}{\mathbf{2 \cdot 189}} = \\ &= \frac{\mathbf{234 \pm \sqrt{54756 - 66528}}}{\mathbf{378}} = \\ &= \frac{\mathbf{234 \pm \sqrt{-11772}}}{\mathbf{378}} = \quad (\textbf{soluciones imaginarias conjugadas}) \end{aligned}$$

En consecuencia, la proyectividad establecida es **elíptica**.

El ejemplo anterior nos pone de manifiesto que, la proyectividad en función de las pendientes de las rectas de ambos haces hace caso omiso de cuál es el vértice de los haces superpuestos estudiados, y sólo al establecer las rectas homólogas entra ésta en juego. Esta observación nos va a permitir operar en forma análoga cuando los haces no sean superpuestos; lo único que nos diferenciará del caso de los haces superpuestos, es decir con el vértice común, será que cuando determinemos las rectas homólogas, cada

una de ellas, con las pendientes que hayamos determinado, deberá pasar por el vértice correspondiente de uno y otro haz. Veámoslo en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 2. Consideremos los dos haces planos de rectas de vértices respectivos $\mathbf{P}(\mathbf{0}, \mathbf{3})$ y $\mathbf{Q}(\mathbf{4}, \mathbf{2})$. Vamos a establecer una proyectividad entre ellos, haciendo corresponder a las rectas

$$\mathbf{r_1} \equiv \mathbf{3}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{2}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{6} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{r_2} \equiv \mathbf{3}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{3} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{r_3} \equiv \mathbf{3}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{4}\cdot\mathbf{y} - \mathbf{12} = \mathbf{0}$$

del primer haz, respectivamente las rectas

$$\mathbf{r'_1} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{2}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{r'_2} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{2} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{r'_3} \equiv \mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{6} = \mathbf{0}$$

del segundo haz.

Puesto que conocemos las pendientes de esas rectas, vamos a establecer la proyectividad a base de relacionar las pendientes de las rectas homólogas, dado que como conocemos los vértices de los haces correspondientes la expresión de las rectas homólogas se obtendrá de manera inmediata. Se trata, pues, de determinar los coeficientes **A**, **B**, **C**, **D** de la ecuación

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{m}\cdot\mathbf{m'} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{m} + \mathbf{C}\cdot\mathbf{m'} + \mathbf{D} = \mathbf{0}$$

y, supuesto $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, dividiremos por él, con lo que en la ecuación tendremos que determinar sólo **B**, **C**, **D**.

Las pendientes de las rectas $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$ serán, respectivamente

$$\mathbf{m_1} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \qquad \mathbf{m_2} = -\mathbf{3} \qquad \mathbf{m_3} = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$$

y las de sus rectas homólogas, $\mathbf{r'_1}$, $\mathbf{r'_2}$, $\mathbf{r'_3}$ serán también, respectivamente

$$\mathbf{m'_1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \qquad \mathbf{m'_2} = \mathbf{1} \qquad \mathbf{m'_3} = -\mathbf{1}$$

Como la correspondencia es

$$\mathbf{m_1} \longleftrightarrow \mathbf{m'_1} \quad , \quad \mathbf{m_2} \longleftrightarrow \mathbf{m'_2} \quad , \quad \mathbf{m_3} \longleftrightarrow \mathbf{m'_3} \ ,$$

al sustituir en la ecuación

$$\mathbf{m}\cdot\mathbf{m'} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{m} + \mathbf{C}\cdot\mathbf{m'} + \mathbf{D} = \mathbf{0}$$

tendremos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \mathbf{B}\cdot\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} + \mathbf{C}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \mathbf{D} = \mathbf{0} \\ -\mathbf{3}\cdot\mathbf{1} + \mathbf{B}\cdot(-\mathbf{3}) + \mathbf{C}\cdot\mathbf{1} + \mathbf{D} = \mathbf{0} \\ -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\cdot(-\mathbf{1}) + \mathbf{B}\cdot(-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}) + \mathbf{C}\cdot(-\mathbf{1}) + \mathbf{D} = \mathbf{0} \end{array}\right\}$$

es decir

$$\left.\begin{array}{r} 3\cdot B+C+2\cdot D=-\dfrac{3}{2} \\ -3\cdot B+C+D=3 \\ -3\cdot B-4\cdot C+4\cdot D=-3 \end{array}\right\}$$

que resuelto da

$$B=\frac{-5}{7} \quad , \quad C=\frac{15}{14} \quad , \quad D=-\frac{3}{14}$$

Luego la ecuación de la proyectividad, en función de las pendientes será:

$$m\cdot m'-\frac{5}{7}\cdot m+\frac{15}{14}\cdot m'-\frac{3}{14}=0$$

es decir

$$14\cdot m\cdot m'-10\cdot m+15\cdot m'-3=0$$

Si quisiéramos, ahora, determinar la recta homóloga del primer haz, de vértice $P(0,\ 3)$,

$$r\equiv 51\cdot x+2\cdot y-6=0$$

cuya pendiente es $m=-\dfrac{51}{2}$, tendríamos que, sustituir ésta, en la ecuación de la proyectividad en función de las pendientes; así

$$14\cdot\left(-\frac{51}{2}\right)\cdot m'-10\cdot\frac{-51}{2}+15\cdot m'-3=0$$

y operando

$$\left(-357+15\right)\cdot m'+\left(\frac{510}{2}-3\right)=0$$

$$342\cdot m'+252=0$$

es decir

$$m'=-\frac{14}{19}$$

siendo ésta la pendiente de la recta homóloga que nos interesaba, que al pasar por el vértice $Q(4,\ 2)$, nos dará la recta:

$$y-2=-\frac{14}{19}\cdot(x-4)$$

es decir

$$r'\equiv 14\cdot x-19\cdot y-18=0$$

9.2 Involuciones

Si en la ecuación de la proyectividad entre haces superpuestos

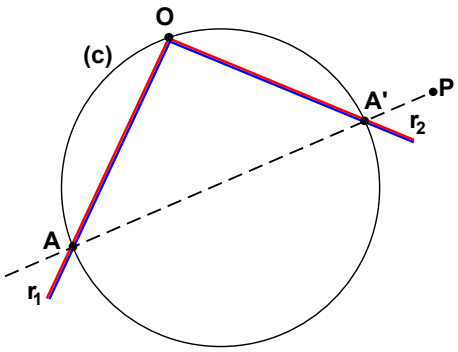
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}'+\mathbf{B}\cdot\mathbf{m}+\mathbf{C}\cdot\mathbf{m}'+\mathbf{D}=\mathbf{0}$$

hacemos **B=C**, la ecuación resultará ser la correspondiente a lo que conocemos como una involución.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}'+\mathbf{B}\cdot(\mathbf{m}+\mathbf{m}')+\mathbf{D}=\mathbf{0},$$

puesto que los rayos homólogos se corresponden doblemente.

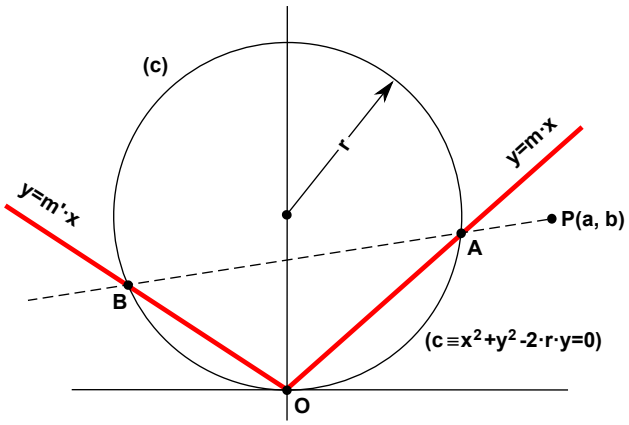
Ejemplo 1. Consideremos una circunferencia **(C)**, siendo **O** uno de los puntos, y **P** un punto no situado sobre la misma



Por el punto **P** se traza una recta variable que corta a la circunferencia en los puntos **A**, **A′**. Sean $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, respectivamente, las rectas $\overline{\mathbf{OA}}$, $\overline{\mathbf{OA'}}$. Así, a toda recta $\mathbf{r_1}$ que pasa por **O** corresponde una única recta $\mathbf{r_2}$ que pasa por el mismo punto, y recíprocamente.

Vamos a ver que esta correspondencia involutiva es efectivamente una **involución**, estableciendo que la relación de sus pendientes responde a la ecuación de la involución.

Sin pérdida de generalidad, vamos a situar la circunferencia con su centro sobre el eje de ordenadas, pasando por el origen, que a su vez identificamos con el punto **O**; su radio valdrá **r**, y el punto **P** tendrá de coordenadas $(\mathbf{a},\ \mathbf{b})$.



Obtención de las coordenadas del punto A:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-2\cdot r\cdot y=0 \\ y=m\cdot x \end{array}\right\} \implies \boxed{\begin{array}{l} x_A=\dfrac{2\cdot r\cdot m}{1+m^2} \\ \\ y_A=\dfrac{2\cdot r\cdot m^2}{1+m^2} \end{array}}$$

Obtención de las coordenadas del punto B:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-2\cdot r\cdot y=0 \\ y=m'\cdot x \end{array}\right\} \implies \boxed{\begin{array}{l} x_B=\dfrac{2\cdot r\cdot m'}{1+m'^2} \\ \\ y_B=\dfrac{2\cdot r\cdot m'^2}{1+m'^2} \end{array}}$$

Impongamos ahora la condición que deben verificar los puntos, **P**, **A**, **B** para estar alineados:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{2\cdot r\cdot m}{1+m^2} & \dfrac{2\cdot r\cdot m^2}{1+m^2} & 1 \\ \\ \dfrac{2\cdot r\cdot m'}{1+m'^2} & \dfrac{2\cdot r\cdot m'^2}{1+m'^2} & 1 \\ \\ a & b & 1 \end{vmatrix}=0$$

es decir

$$\begin{vmatrix} \dfrac{2\cdot r\cdot m-a\cdot(1+m^2)}{1+m^2} & \dfrac{2\cdot r\cdot m^2-b\cdot(1+m^2)}{1+m^2} & 0 \\ \\ \dfrac{2\cdot r\cdot m'-a\cdot(1+m'^2)}{1+m'^2} & \dfrac{2\cdot r\cdot m'^2-b\cdot(1+m'^2)}{1+m'^2} & 0 \\ \\ a & b & 1 \end{vmatrix}=0$$

o lo que es lo mismo:

$$\begin{vmatrix} 2\cdot r\cdot m-a\cdot(1+m^2) & 2\cdot r\cdot m^2-b\cdot(1+m^2) \\ 2\cdot r\cdot m'-a\cdot(1+m'^2) & 2\cdot r\cdot m'^2-b\cdot(1+m'^2) \end{vmatrix}=0$$

operando y simplificando sucesivamente obtenemos:

$$(2\cdot r\cdot m-a-a\cdot m^2)\cdot(2\cdot r\cdot m'^2-b-b\cdot m'^2)-(2\cdot r\cdot m'-a-a\cdot m'^2)\cdot(2\cdot r\cdot m^2-b-b\cdot m^2)=0$$

$$4\cdot r^2\cdot m\cdot m'^2-2\cdot r\cdot b\cdot m-2\cdot r\cdot b\cdot m\cdot m'^2-2\cdot r\cdot a\cdot m'^2-$$

$$-(4\cdot r^2\cdot m'\cdot m^2-2\cdot r\cdot b\cdot m'-2\cdot r\cdot b\cdot m'\cdot m^2-2\cdot r\cdot a\cdot m^2)=0$$

$$4\cdot r^2\cdot m\cdot m'\cdot(m'-m)+2\cdot r\cdot b\cdot(m'-m)-2\cdot r\cdot b\cdot m\cdot m'\cdot(m'-m)-2\cdot r\cdot a\cdot(m+m')\cdot(m'-m)=0$$

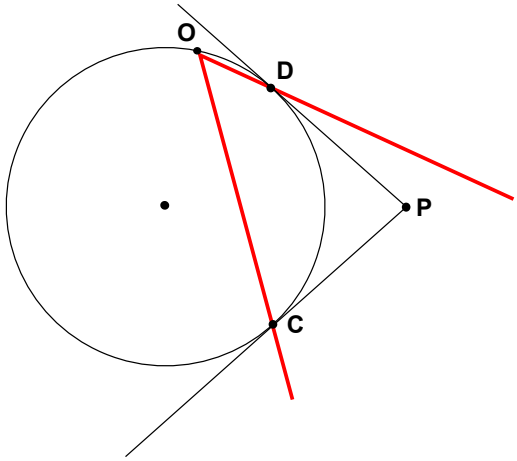
$$2\cdot r\cdot m\cdot m'+b-b\cdot m\cdot m'-a\cdot(m+m')=0$$

y en definitiva

$$\boxed{(2\cdot r-b)\cdot m\cdot m'-a\cdot(m+m')+b=0}$$

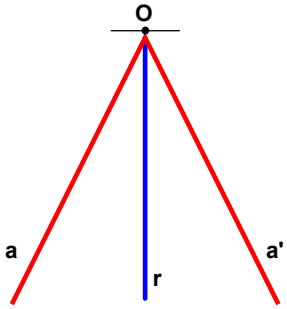
como queríamos establecer.

Evidentemente los rayos dobles de esta involución serán lo que unen el punto **O** con los puntos de contacto **C**, **D**, de las tangentes trazadas a la circunferencia por el punto **P**.

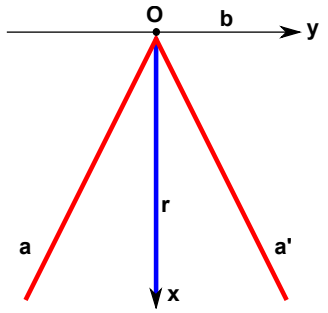


Por tanto, sólo existirán rayos dobles si el punto **P** es exterior a la circunferencia.

Ejemplo 2. Consideremos un punto **O** y una recta **r** que pasa por él. Sean, además, dos rectas variables **a**, **a′**, que pasan también por **O**, siendo simétricas respecto a la recta **r**. Vamos a establecer que las rectas **a**, **a′** son rectas homólogas de dos haces involutivos de vértice **O**. Veámoslo:



En primer lugar, es inmediato ver que a toda recta **a** del primer haz le corresponde una sola recta del segundo, e inversamente.



Por otra parte veamos que se trata efectivamente de una **involución**, estableciendo que la relación de sus pendientes responde a la ecuación de la involución. Basta, para ello, con tomar como eje de abscisas la recta **r** y como eje de

ordenadas la perpendicular **b** a **r**. Las pendientes de **a** y $\mathbf{a}'$, respectivamente **m** y $\mathbf{m}'$, son iguales y de signo contrario, verificando en consecuencia la relación involutiva

$$\mathbf{m}+\mathbf{m}'=\mathbf{0}$$

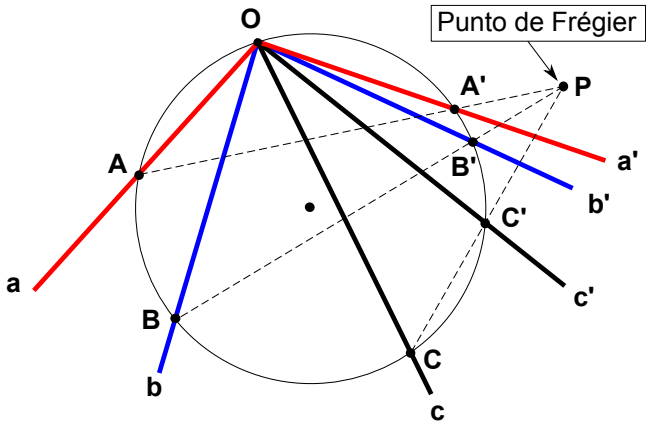
9.3 Teorema de Frégier

La siguiente proposición, conocida como el **Teorema de Frégier** tiene numerosas aplicaciones, y dice así:

Si por el vértice común de dos haces de rectas en involución se hace pasar una circunferencia, las rectas que pasan por los puntos de intersección de dos rectas homólogas cualesquiera con la circunferencia pasan por un punto fijo.

En efecto: Sean **O** el vértice común y ($\overline{\mathbf{OA}}$, $\overline{\mathbf{OA}'}$), ($\overline{\mathbf{OB}}$, $\overline{\mathbf{OB}'}$) dos pares de rectas homólogas que cortan a la circunferencia en los puntos (**A**, $\mathbf{A}'$), (**B**, $\mathbf{B}'$) respectivamente, y sea **P** el punto de intersección de las rectas $\overline{\mathbf{AA}'}$ y $\overline{\mathbf{BB}'}$.

Consideremos ahora dos rectas homólogas cualesquiera $\overline{\mathbf{OC}}$, $\overline{\mathbf{OC}'}$, que cortan a la circunferencia en los puntos **C**, $\mathbf{C}'$. Se trata de demostrar que la recta $\overline{\mathbf{CC}'}$ pasa por el punto **P**, que llamaremos **punto de Frégier**.



Sea **I** la correspondencia involutiva dada entre las rectas que pasan por el punto **O**.

Al unir este punto **O** con los extremos de las cuerdas de la circunferencia que pasan por el punto **P**, queda determinada una nueva correspondencia involutiva, $\mathbf{I}'$.

Ahora bien, estas dos correspondencias, **I** e $\mathbf{I}'$, tienen dos pares de rectas homólogas comunes, a saber ($\overline{\mathbf{OA}}$, $\overline{\mathbf{OA}'}$) y ($\overline{\mathbf{OB}}$, $\overline{\mathbf{OB}'}$), luego por tratarse de involuciones son idénticas. En consecuencia, las rectas ($\overline{\mathbf{OC}}$, $\overline{\mathbf{OC}'}$), homólogas en la correspondencia **I**, son también homólogas en la correspondencia $\mathbf{I}'$, lo que equivale a decir que la recta $\overline{\mathbf{CC}'}$ pasa por el punto **P**.

9.4 Aplicaciones del teorema de Frégier

Son numerosas las aplicaciones del teorema establecido en el apartado anterior; veamos algunas de ellas.

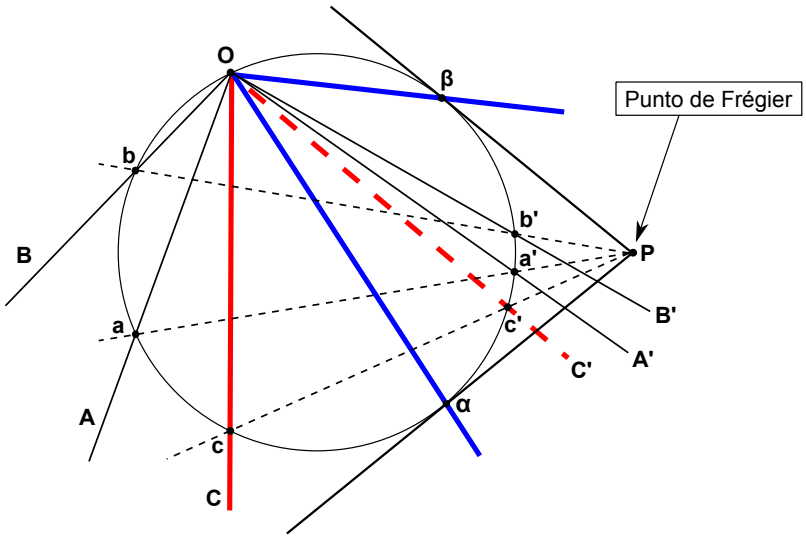
(I) Consideremos dos haces de vértice común **O**, en una involución definida por dos pares de rectas homólogas $(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ y $(\mathbf{b}, \mathbf{b}')$. En lo sucesivo llamaremos **rayos** a las rectas de los haces que manejamos. En estas condiciones vamos a construir:

1.- El homólogo de un rayo cualquiera **c**.

2.- Los rayos dobles.

Para ello trazaremos una circunferencia cualquiera que pasando por el punto **O**, corte a las rectas dadas **a**, $\mathbf{a}'$, **b**, $\mathbf{b}'$, respectivamente en los puntos, **A**, $\mathbf{A}'$, **B**, $\mathbf{B}'$. Las rectas $\overline{\mathbf{AA}'}$, $\overline{\mathbf{BB}'}$ se cortarán en el punto de Frégier **P**.

1.- Unamos el punto **P** con el punto **C**, en el que el rayo **c** corta a la circunferencia; la recta $\overline{\mathbf{PC}}$ cortará a la circunferencia en otro punto **C'**, y la recta $\overline{\mathbf{OC}'}$, es decir la $\mathbf{c}'$, será el rayo homólogo del **c**.



2.- Si por el punto **P** trazamos las tangentes $\overline{\mathbf{P\Sigma}}$, $\overline{\mathbf{P\Delta}}$, a la circunferencia, resultará que las rectas $\overline{\mathbf{O\Sigma}}$, $\overline{\mathbf{O\Delta}}$ son los rayos dobles.

La construcción anterior puede ser utilizada para resolver el problema análogo entre series de puntos en involución; es decir, dados dos pares de puntos homólogos como determinar el homólogo de un punto cualquiera en la involución así determinada.

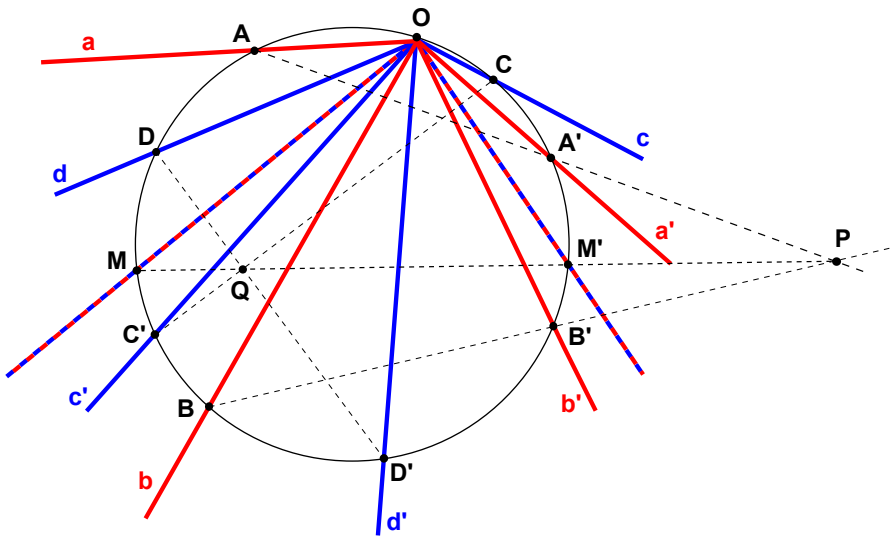
(II) Consideremos dos haces, de vértice común **O**, en una **involución** definida por dos pares de rectas homólogas (**a**, **a**′), (**b**, **b**′), y otro par de haces, también en **involución**, con el mismo vértice **O**, definida por los dos pares de rectas homólogas (**c**, **c**′), (**d**, **d**′). Vamos a ver que existe un par de rayos homólogos comunes a ambas involuciones, construyendo ese par; supondremos que cada una de las involuciones viene dada por dos pares de rayos homólogos. Veámoslo:

Supongamos definida, la primera involución, por los pares de rayos (**a**,**a**′), (**b**, **b**′), y la segunda por los (**c**, **c**′), (**d**, **d**′).

Determinemos, ahora, los puntos de Frégier **P** y **Q**, relativos a cada una de las involuciones; **P** será el punto de intersección de las rectas $\overline{\mathbf{AA}'}$, $\overline{\mathbf{BB}'}$ y **Q** el de las $\overline{\mathbf{CC}'}$, $\overline{\mathbf{DD}'}$.

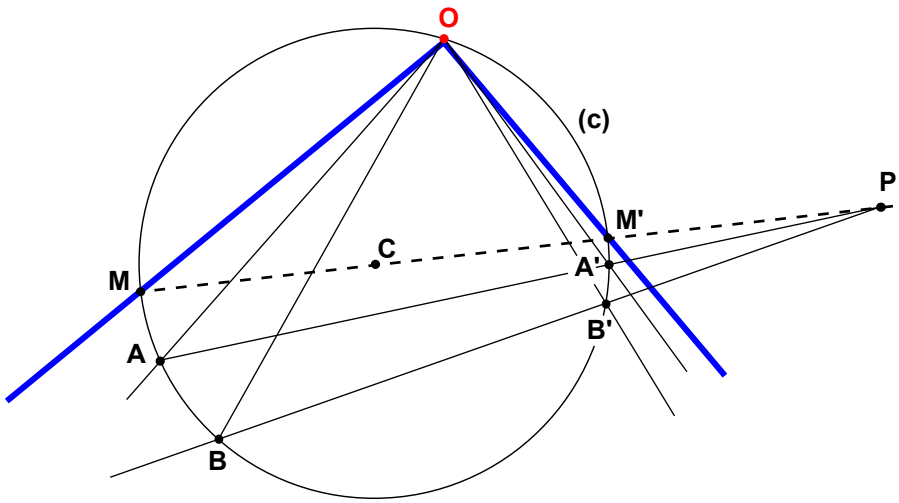
La recta $\overline{\mathbf{PQ}}$ cortará a la circunferencia en los puntos **M**, **M**′, siendo las rectas $\overline{\mathbf{OM}}$, $\overline{\mathbf{OM}'}$ los rayos homólogos comunes a las dos involuciones.

Evidentemente, los dos rayos $\overline{\mathbf{OM}}$, $\overline{\mathbf{OM}'}$ sólo existirán si la recta $\overline{\mathbf{PQ}}$ corta a la circunferencia.



La construcción anterior puede ser utilizada para resolver el problema análogo entre dos series de puntos involutivas superpuestas.

(III) Consideremos dos haces, de vértice común **O**, en una involución. Vamos a ver que, en general, existe una sola pareja de rayos homólogos rectangulares, y que en el caso de que haya más, entonces todos los pares de rayos homólogos son rectangulares. Veámoslo:



En primer lugar, tracemos una circunferencia $(\mathbf{c})$, que pase por el vértice **O**, y determinemos, luego, el punto de Frégier **P**, utilizando dos pares de rayos homólogos cualesquiera. Obtendremos una pareja cualquiera de rayos homólogos, haciendo pasar por el punto **P** una secante cualquiera $\overline{\mathbf{PMM'}}$, y trazando las rectas $\overline{\mathbf{OM}}$, $\overline{\mathbf{OM'}}$.

Para que esas dos rectas, así obtenidas, sean perpendiculares, es necesario que la recta $\overline{\mathbf{MM'}}$ pase por el centro **C** de la circunferencia $(\mathbf{c})$. Por tanto, si el punto **P** no coincide con el punto **C**, existirá un único par de rayos homólogos rectangulares; si el punto **P** coincidiera con el punto **C**, entonces, todo par de rayos homólogos serían perpendiculares.

Lección 10.- PROYECTIVIDAD EN LA GEOMETRIA PLANA

10.1 Formas perspectivas

10.2 Eje proyectivo de dos series y centro proyectivo de dos haces

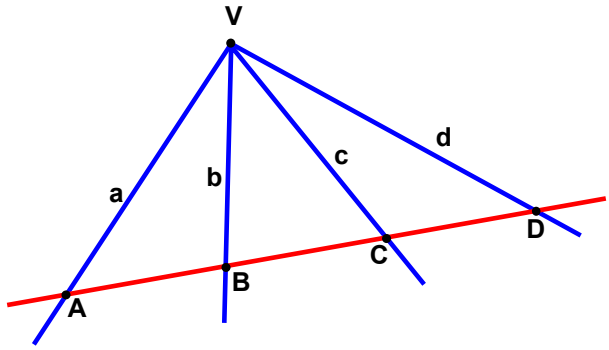
10.3 Puntos límites de dos series proyectivas

10.4 Eje perspectivo de dos series proyectivas superpuestas

10.1 Formas perspectivas

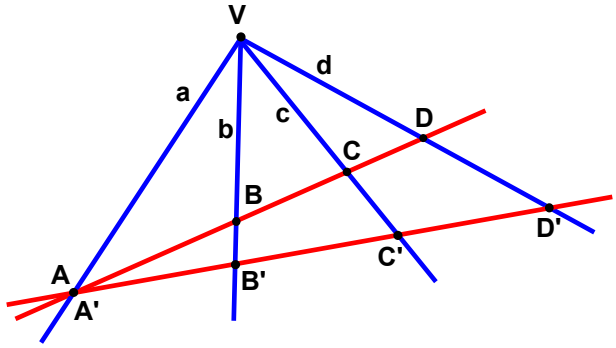
En ésta, y en las dos lecciones siguientes, vamos a aplicar las nociones de proyectiva, que hemos venido desarrollando, a la resolución de problemas de geometría métrica, limitando nuestro estudio al de la proyectividad entre **series de puntos** y **haces de rectas del plano**.

Diremos que una **serie** y un **haz** son **perspectivos**, cuando la serie es una sección del haz.



En este caso la serie **A**, **B**, **C**, **D**, . . . y el haz de vértice **V** y rayos **a**, **b**, **c**, **d**, . . . son perspectivos.

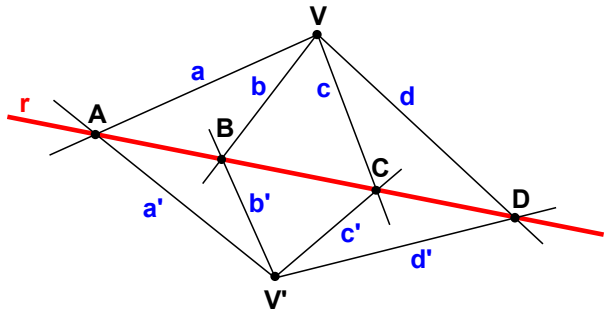
Diremos que **dos series** son **perspectivas** cuando ambas sean secciones del mismo haz.



En este caso, las series **A**, **B**, **C**, **D**,. . . y **A′**, **B′**, **C′**, **D′**,. . . son perspectivas.

Del vértice del haz, **V**, diremos que es el **centro perspectivo** de las series dadas.

Diremos que **dos haces** son **perspectivos** cuando ambos son proyecciones de una misma serie.



En este caso los haces, de vértices **V** y **V′**, son perspectivos.
De la recta **r**, soporte de la serie dada, diremos que es el **eje perspectivo** de los haces considerados.

Así, llamaremos **perspectividad** a toda correspondencia entre formas perspectivas.
De dos formas de primera categoría diremos que son **superpuestas** cuando:

- Si son **series**, tienen la misma recta base.
- Si son **haces de rectas** situados en el mismo plano, tienen el mismo vértice.
- Si son **haces de planos**, tienen la misma arista.

Dado que entre dos formas superpuestas puede, evidentemente, definirse una proyectividad, **el Teorema fundamental de la proyectividad** (Lección 5, apartado 5.3.), puede enunciarse aquí de la siguiente manera: **Si en una proyectividad entre dos formas de primera categoría superpuestas, coinciden tres elementos de una de ellas con sus homólogos de la otra, entonces coinciden los restantes pares de elementos homólogos.**

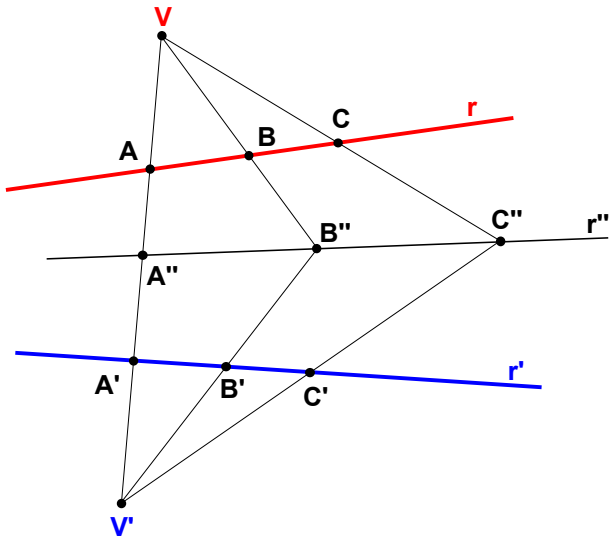
> En efecto: Si, por ejemplo, en la proyectividad
>
> $$\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C},\ \mathbf{D},\cdots \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{A}',\ \mathbf{B}',\ \mathbf{C}',\ \mathbf{D}',\cdots$$
>
> coinciden: **A** con **A′**, **B** con **B′** y **C** con **C′**, deberá verificarse, por la propia definición, que
>
> $$(\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C}\ \mathbf{D}) = (\mathbf{A}'\ \mathbf{B}'\ \mathbf{C}'\ \mathbf{D}') = (\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C}\ \mathbf{D}')$$
>
> lo que exige $\mathbf{D} \equiv \mathbf{D}'$, por no existir más que un punto que forme con otros tres una razón doble determinada.
> Lo establecido para los puntos **D** y **D′** es válido para el resto de pares de puntos homólogos.

Por otra parte es muy interesante para las aplicaciones la propiedad siguiente:

PROPOSICIÓN 1. Dos series proyectivas pueden obtenerse una de la otra por una sucesión de proyecciones y secciones.

En efecto: Razonaremos sobre dos series coplanarias y no superpuestas. En el supuesto de que no fuesen coplanarias, proyectaríamos una de ellas desde un punto exterior a las dos sobre un plano que pasa por la otra, y si fueran superpuestas proyectaríamos una de ellas sobre otra recta coplanaria.

Así, sean **A**, **B**, **C**,... y **A′**, **B′**, **C′**,... las series consideradas, de rectas bases respectivas **r** y **r′**. Elijamos, ahora en la recta $\overline{\mathbf{AA'}}$, dos puntos cualesquiera **V** y **V′**, y cortemos los haces proyectivos **V′(A′**, **B′**, **C′**,...) y **V(A, B, C, ...)** por la recta **r″** determinada por los puntos **B″** y **C″**, siendo **B″** la intersección de $\overline{\mathbf{VB}}$ y $\overline{\mathbf{V'B'}}$, y el **C″** la intersección de $\overline{\mathbf{VC}}$ y $\overline{\mathbf{V'C'}}$, siendo **A″** la intersección de la recta **r″** con la $\overline{\mathbf{AA'}}$.



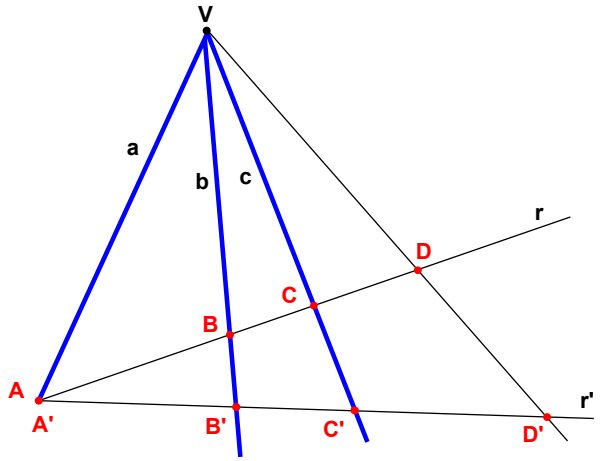
Las secciones de estos haces, de vértices **V** y **V′**, por la recta **r″** serán dos series proyectivas con tres elementos **A″**, **B″**, **C″** coincidentes, luego, en virtud del teorema fundamental de la proyectividad, coincidirán todos los demás.

Resulta, entonces, que en la recta **r″** se cortarán los pares de rayos homólogos de los haces proyectivos **V**(**A**, **B**, **C**, ...) y **V′**(**A′**, **B′**, **C′**, ...), quedando de este modo ligadas las series dadas **A**, **B**, **C**,... y **A′**, **B′**, **C′**,... , por una sucesión de proyecciones y secciones.

Así, proyectando **A**, **B**, **C**,... desde **V** y cortando por la recta **r″** obtenemos **A″**, **B″**, **C″**,... , y proyectando esta serie desde **V′** y cortando por la recta **r′**, obtenemos **A′**, **B′**, **C′**.

La proposición que acabamos de establecer nos permite afirmar que: **Toda proyectividad es un producto de perspectividades**.

Ejemplo 1. Veamos que, si consideramos dos series proyectivas **A**, **B**, **C**,... y **A**′, **B**′, **C**′,... situadas sobre dos rectas distintas, **r** y **r**′, de forma que un punto sea el **A** = **A**′, común a ambas rectas, luego homólogo de sí mismo, se verifica que **las series dadas son perspectivas**.

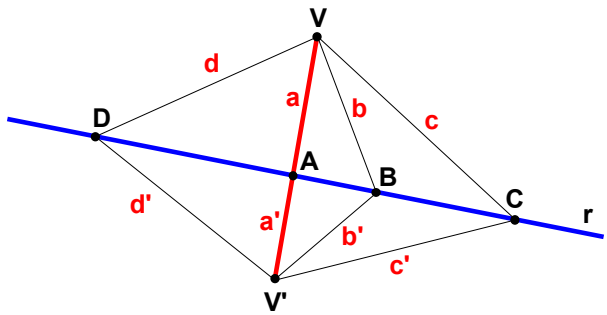


Basta proyectar las dos series desde el punto **V** de intersección de $\overline{\mathbf{BB}'}$ y $\overline{\mathbf{CC}'}$ para obtener dos haces proyectivos superpuestos, con tres rayos dobles: **a**, **b**, **c**, de lo que deducimos, en virtud del **Teorema fundamental de la proyectividad** que serán dobles todos los demás.

Del punto **V**, así determinado, diremos que es el **centro perspectivo** de las series dadas.

Ejemplo 2. En el caso de considerar dos haces proyectivos **a**, **b**, **c**,... y **a**′, **b**′, **c**′, ... de vértices distintos, de forma que un rayo, sea el **a** ≡ **a**′, común a ambos haces, es homólogo de sí mismo, se verificará que **los dos haces dados son perspectivos**.

Basta cortar los dos haces por la recta **r** que pasa por los puntos de intersección de los rayos **b** y **b**′, **c** y **c**′, para obtener dos series proyectivas superpuestas, con tres puntos dobles: **A**, **B**, **C**, de lo que deducimos, en virtud del **teorema fundamental de la proyectividad** que serán dobles todos los demás.

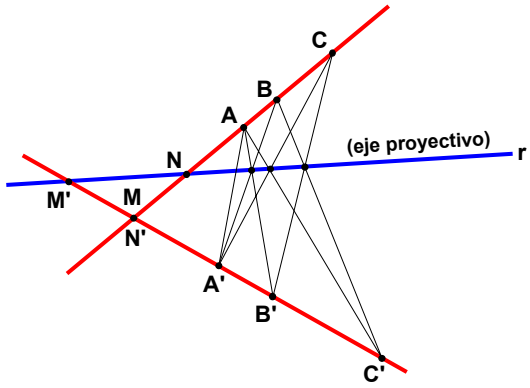


De la recta **r**, así determinada, diremos que es el **eje perspectivo** de los haces dados.

10.2 Eje proyectivo de dos series y centro proyectivo de dos haces

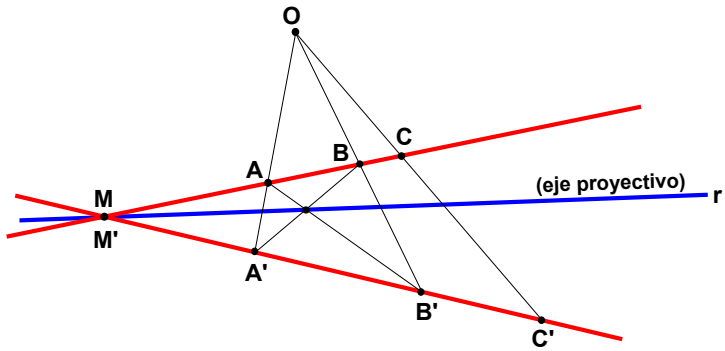
Dado que la perspectividad es la correspondencia proyectiva más fácil de construir, es por lo que resulta interesante reducir toda proyectividad a un producto de perspectividades, y en ese sentido apunta la propiedad siguiente.

PROPOSICIÓN 1. Si consideramos dos series proyectivas no superpuestas A, B, C, ... y $\mathbf{A'}$, $\mathbf{B'}$, $\mathbf{C'}$, ... , resulta que, los haces que las proyectan, respectivamente desde dos puntos homólogos cualesquiera A y $\mathbf{A'}$, tomados cada uno en la otra serie, son perspectivos. Al eje **r** de esta perspectividad se la llama **eje proyectivo** de las series dadas.



En efecto: Los haces $\mathbf{A}(\mathbf{A'}, \mathbf{B'}, \mathbf{C'}, \dots)$ y $\mathbf{A'}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots)$ son proyectivos y además tienen el rayo común $\overline{\mathbf{AA'}}$ homólogo de sí mismo. Razonando como hicimos en el último ejemplo del apartado anterior resultará que los haces dados son perspectivos. El eje proyectivo **r** de los haces dados permite construir fácilmente puntos homólogos; para hallar el homólogo de un punto **D** de la primera serie, bastará proyectarlo desde $\mathbf{A'}$ sobre **r** y proyectar luego el punto obtenido desde el **A** sobre la base de la segunda serie. El procedimiento es el análogo si queremos determinar el homólogo de un punto $\mathbf{D'}$ de la otra serie.

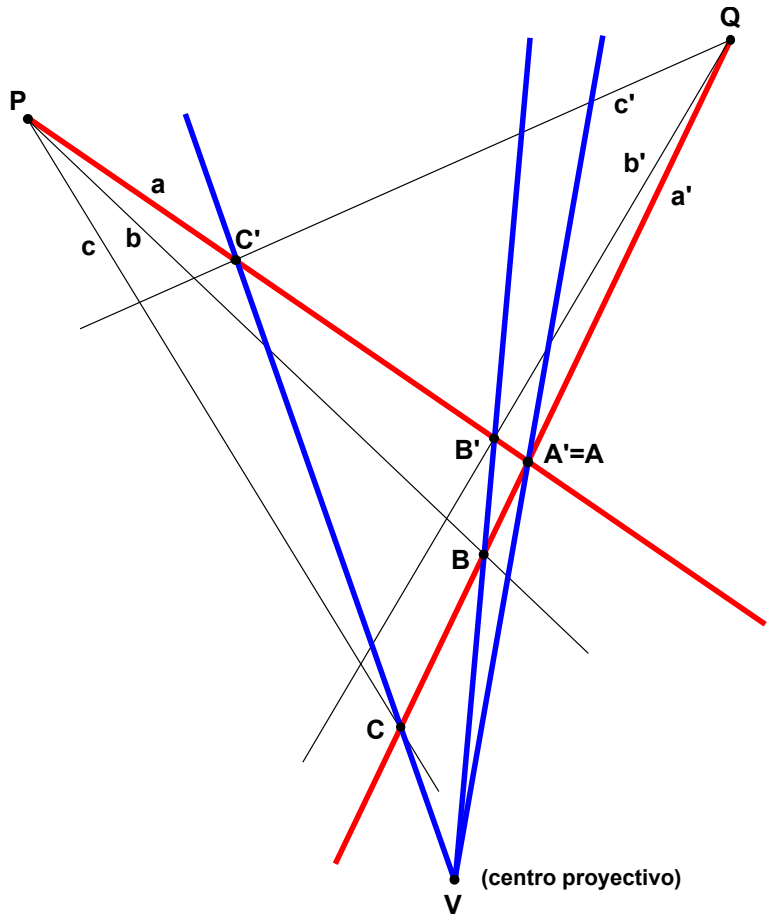
Al aplicar la construcción anterior al punto de intersección de las bases resultarán como homólogos los **M** y $\mathbf{M'}$, y los **N** y $\mathbf{N'}$. Si los puntos $\mathbf{M'}$ y $\mathbf{N'}$ son distintos (figura anterior) significa que las series dadas no son perspectivas, y ellos bastan para determinar el eje proyectivo, el cual será, por tanto, independiente del par de puntos elegido, **A** y $\mathbf{A'}$.



Si las series fuesen perspectivas, el eje proyectivo pasaría por el punto común a las dos series, siendo por tanto, el punto $\mathbf{M} = \mathbf{M}'$ doble; también pasaría por el punto de intersección de $\overline{\mathbf{AB}'}$ y $\overline{\mathbf{BA}'}$. Así tomando como nuevos vértices de proyección los $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B}'$, el eje pasaría por los dos mismos puntos, luego coincidiría con el anterior lo que nos dice que la proposición es cierta en todo caso.

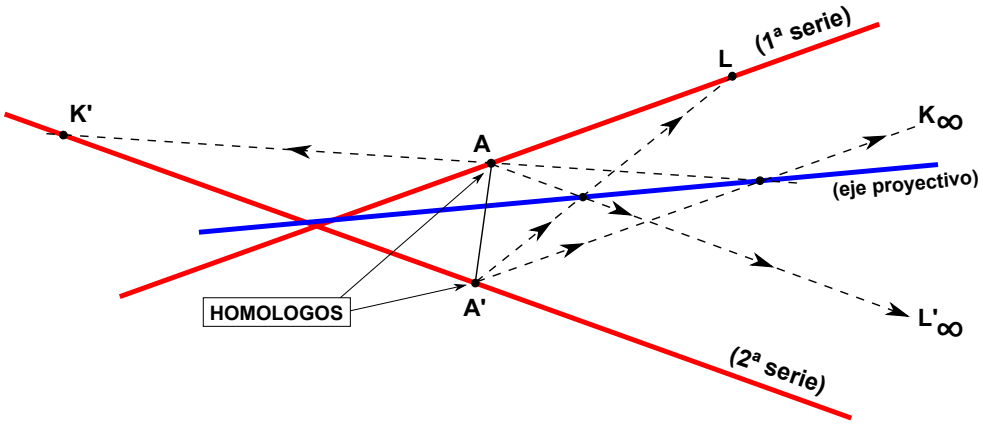
Dual de la anterior sería la propiedad siguiente:

PROPOSICIÓN 2. Si consideramos dos haces proyectivos no superpuestos a, b, c, … y $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$, … de vértices respectivos P y Q, resultará que, las series que se obtienen al cortarlos, respectivamente, por dos rayos homólogos cualesquiera a y $\mathbf{a}'$ tomados cada uno en el otro haz, son perspectivas. Al centro **V** de esta perspectividad se la llama **centro proyectivo** de los haces dados.



10.3 Puntos límites de dos series proyectivas

Los puntos impropios de dos series proyectivas pueden no ser homólogos entre sí. Así, en el caso de que no lo sean, cada uno de ellos tendrá un homólogo propio en la otra serie, que recibirá el nombre de **punto límite** de la misma. Este concepto ya fue manejado analíticamente en el apartado 6.3 de la lección 6.
Si llamamos **L** al punto límite de la primera serie, es decir, al homólogo del punto impropio de la segunda, y $\mathbf{K}'$ al punto límite de la segunda serie, es decir al homólogo del punto impropio de la primera serie, su determinación utilizando el eje proyectivo se hará como se indica en la figura siguiente.



La figura anterior nos va a ayudar a establecer la propiedad siguiente:

PROPOSICIÓN 1. Dadas dos series proyectivas, se verifica que: el producto de distancias de dos puntos homólogos cualesquiera a los puntos límites respectivos es constante.

En efecto: La igualdad de las razones dobles siguientes:

$$(\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{L}\ \mathbf{K}_\infty) = (\mathbf{A}'\ \mathbf{B}'\ \mathbf{L}'_\infty\ \mathbf{K}')\ ,$$

siendo, tanto **A** y $\mathbf{A}'$ como **B** y $\mathbf{B}'$, pares de puntos homólogos y, **L** y $\mathbf{K}'$ los puntos límites de las series dadas, nos permite escribir.

$$\frac{(\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{L})}{(\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{K}_\infty)} = \frac{(\mathbf{A}'\ \mathbf{B}'\ \mathbf{L}'_\infty)}{(\mathbf{A}'\ \mathbf{B}'\ \mathbf{K}')}$$

es decir

$$\frac{\overline{\mathbf{AL}}}{\overline{\mathbf{BL}}} = \frac{\overline{\mathbf{B}'\mathbf{K}'}}{\overline{\mathbf{A}'\mathbf{K}'}}$$

y en definitiva

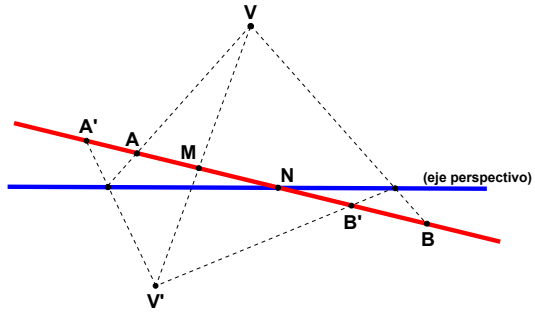
$$\overline{\mathbf{AL}} \cdot \overline{\mathbf{A}'\mathbf{K}'} = \overline{\mathbf{BL}} \cdot \overline{\mathbf{B}'\mathbf{K}'}$$

10.4 Eje perspectivo de dos series proyectivas superpuestas

Dadas dos series proyectivas superpuestas: **A, B, C,...** y $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'$, ... al proyectarlas desde dos puntos, situados fuera de sus bases, obtendremos dos haces proyectivos no superpuestos a los que se podrán aplicar la segunda proposición del apartado 10.2, la que denominamos **dual**. Esta práctica no es, en general, recomendable, salvo si conocemos un punto doble, en cuyo caso la construcción se simplifica mucho.

> En el caso de que las series sean superpuestas el eje proyectivo pasará a denominarse **eje perspectivo**.

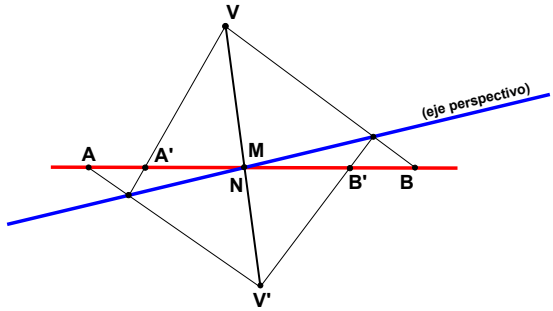
Supongamos, por tanto, que se conoce un punto doble de las series, sea el **M**, homólogo de sí mismo. En este caso proyectaremos las dos series desde dos puntos, **V** y $\mathbf{V}'$, alineados con **M**. Los dos haces obtenidos serán perspectivos por tener el rayo $\overline{\mathbf{VV}'}$ común, lo que facilitará la construcción de puntos homólogos en las series



Así, dado el punto doble **M**, y dos pares de puntos homólogos **A**, $\mathbf{A}'$ y **B**, $\mathbf{B}'$, podemos determinar el eje perspectivo, que pasará por las intersecciones de $\overline{\mathbf{VA}}$ y $\overline{\mathbf{V}'\mathbf{A}'}$, y de $\overline{\mathbf{VB}}$ y $\overline{\mathbf{V}'\mathbf{B}'}$, y en consecuencia la proyectividad, unívocamente determinada.

Así mismo, la intersección del eje perspectivo con la base de las series nos determinará el otro punto doble, el **N**.

En el caso de que sólo exista un punto doble, es decir **M** y **N** coincidan, para hallar el eje, y en consecuencia construir la proyectividad, bastará dar este único punto doble y otro par de puntos homólogos **A**, $\mathbf{A}'$.



Las proyectividades hiperbólicas, para las que existen dos puntos dobles, poseen lo que se puede denominar un invariante absoluto o **característica** como establece la propiedad siguiente:

PROPOSICIÓN 1. Dada una proyectividad hiperbólica, la razón doble formada por los dos puntos dobles M y N, y dos puntos homólogos cualesquiera, A y A′ es constante, y se le llama **característica** de la proyectividad.

En efecto: Si **B** y **B′** son otro par de puntos homólogos podemos igualar la razón doble de la cuaterna **M**, **N**, **A**, **B** con la de la **M**, **N**, **A′**, **B′**, así

$$(\mathbf{M}\,\mathbf{N}\,\mathbf{A}\,\mathbf{B}) = (\mathbf{M}\,\mathbf{N}\,\mathbf{A}'\,\mathbf{B}')$$

es decir

$$\frac{(\mathbf{M}\,\mathbf{N}\,\mathbf{A})}{(\mathbf{M}\,\mathbf{N}\,\mathbf{B})} = \frac{(\mathbf{M}\,\mathbf{N}\,\mathbf{A}')}{(\mathbf{M}\,\mathbf{N}\,\mathbf{B}')}$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{\dfrac{\overline{\mathbf{MA}}}{\overline{\mathbf{NA}}}}{\dfrac{\overline{\mathbf{MB}}}{\overline{\mathbf{NB}}}} = \frac{\dfrac{\overline{\mathbf{MA'}}}{\overline{\mathbf{NA'}}}}{\dfrac{\overline{\mathbf{MB'}}}{\overline{\mathbf{NB'}}}}$$

que puede escribirse como sigue

$$\frac{\dfrac{\overline{\mathbf{MA}}}{\overline{\mathbf{NA}}}}{\dfrac{\overline{\mathbf{MA'}}}{\overline{\mathbf{NA'}}}} = \frac{\dfrac{\overline{\mathbf{MB}}}{\overline{\mathbf{NB}}}}{\dfrac{\overline{\mathbf{MB'}}}{\overline{\mathbf{NB'}}}}$$

de donde resulta la igualdad

$$(\mathbf{M}\,\mathbf{N}\,\mathbf{A}\,\mathbf{A}') = (\mathbf{M}\,\mathbf{N}\,\mathbf{B}\,\mathbf{B}')$$

valor éste al que hemos llamado **característica** de la proyectividad hiperbólica dada.

La proposición anterior admite la recíproca siguiente:

PROPOSICIÓN 2. Los pares de puntos A y A′, B y B′, . . . que forman con dos fijos, M y N, razones dobles de valor constante, son homólogos en una proyectividad hiperbólica en la que son dobles los puntos M y N.

En efecto: De la igualdad

$$(\mathbf{M}\,\mathbf{N}\,\mathbf{A}\,\mathbf{A}') = (\mathbf{M}\,\mathbf{N}\,\mathbf{B}\,\mathbf{B}')$$

resulta, al recorrer en sentido inverso la cadena de transformaciones de la demostración anterior,

$$(\mathbf{M}\,\mathbf{N}\,\mathbf{A}\,\mathbf{B}) = (\mathbf{M}\,\mathbf{N}\,\mathbf{A}'\,\mathbf{B}')$$

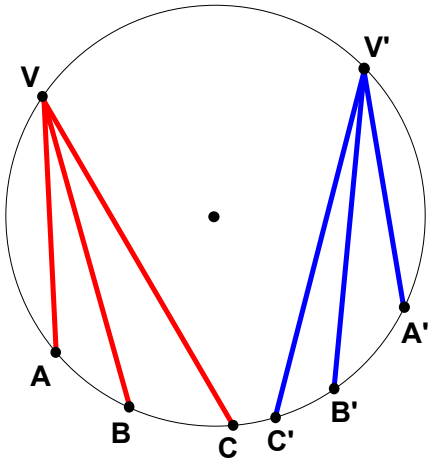
y lo mismo para todos los pares.

Lección 11.- PROYECTIVIDAD ENTRE SERIES CIRCULARES

11.1 Series y haces circulares
11.2 Eje de dos series circulares proyectivas
11.3 Construcción de puntos homólogos y de puntos dobles
11.4 Involución entre series circulares

11.1 Series y haces circulares

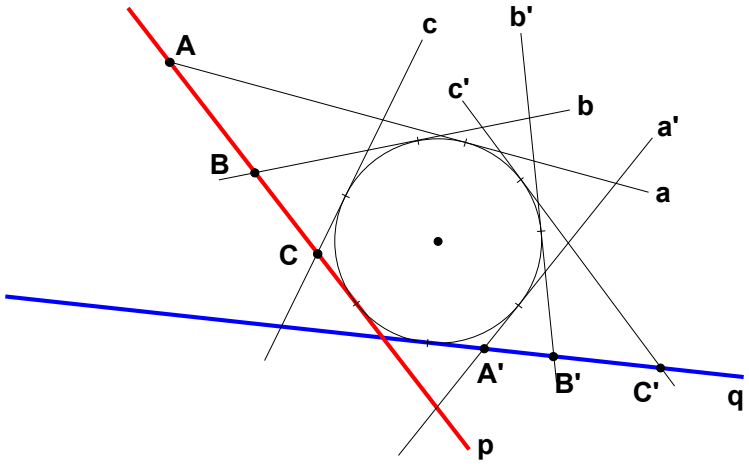
Vamos a trasladar, ahora, algunos conceptos estudiados en la lección anterior, en lo que se refiere a las series de puntos, considerando series de puntos situados sobre una circunferencia. Así, al conjunto de puntos de una circunferencia le llamaremos **serie circular**, y al de las tangentes a la misma **haz circular**. No producirá confusión alguna utilizar simplemente los términos **serie** y **haz**.



De dos series de puntos de una circunferencia **A**, **B**, **C**,... y **A**′, **B**′, **C**′,... diremos que son **proyectivas** cuando lo son los haces que las proyectan desde dos puntos cualesquiera **V** y **V**′ de la misma, o desde un mismo punto de la circunferencia.

En consecuencia, para definir dos series circulares proyectivas bastará con dar tres pares de puntos (**A**, **A**′), (**B**, **B**′) y (**C**, **C**′) en la circunferencia, puesto que el proyectarlos desde cualquier punto, o puntos, se tendrá definida la proyectividad entre los haces proyectantes, como es fácil comprobar.

De dos haces de tangentes a una circunferencia **a**, **b**, **c**,... y **a**′, **b**′, **c**′,... diremos que son proyectivos cuando lo son las secciones producidas en ellos por dos tangentes cualesquiera **p** y **q**, o por una única.



En consecuencia, para definir dos haces proyectivos bastará con dar tres pares de tangentes a la circunferencia, (**a**, **a**′), (**b**, **b**′) y (**c**, **c**′).

11.2 Eje de dos series circulares proyectivas

El concepto de eje proyectivo de dos series circulares proyectivas dadas se establece como consecuencia de las dos propiedades siguientes, visualizadas en la figura que sigue:

PROPOSICIÓN 1. Dadas dos series circulares proyectivas A, B, C,... y A′, B′, C′,... sobre una misma circunferencia, los haces que las proyectan desde los puntos homólogos A, A′, tomados cada uno de ellos en la otra serie, son perspectivos.

En efecto: Los haces proyectivos **A**(**A**′, **B**′, **C**′,...) y **A**′(**A**, **B**, **C**,...) tienen el rayo común $\overline{\mathbf{AA'}}$ doble, luego son perspectivos. Significa esto que, los pares de rectas homólogos $\overline{\mathbf{AB'}}$ y $\overline{\mathbf{A'B}}$, $\overline{\mathbf{AC'}}$ y $\overline{\mathbf{A'C}}$, se cortan en los puntos **R**, **S** del eje perspectivo **e**.

PROPOSICIÓN 2. El eje e, de la perspectividad anterior, es independiente del par de puntos homólogos A, A′ elegidos, y recibe el nombre de **eje proyectivo** de las series dadas.

En efecto: Al tomar como vértices de los nuevos haces los puntos **B** y **B**′, resultará que el nuevo eje proyectivo pasa por **R**, por ser intersección de $\overline{\mathbf{BA'}}$ con $\overline{\mathbf{B'A}}$, y también por **T**, intersección de $\overline{\mathbf{BC'}}$ y $\overline{\mathbf{B'C}}$, quedando por ver que también pasa por **S**, intersección de $\overline{\mathbf{AC'}}$ y $\overline{\mathbf{A'C}}$; en definitiva, que los puntos **R**, **S** y **T** están alineados.

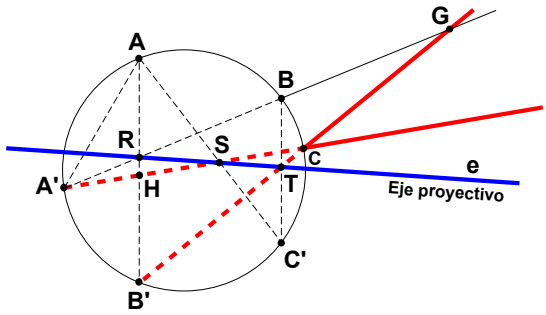
Proyectando, desde **A** y **B**, los puntos **A**′, **B**′, **C**′, **C** sobre las rectas $\overline{\mathbf{CA'}}$ y $\overline{\mathbf{CB'}}$, se obtienen las dos cuaternas proyectivas

$$\mathbf{A'},\ \mathbf{H},\ \mathbf{S},\ \mathbf{C} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{G},\mathbf{B'},\mathbf{T},\mathbf{C}$$

que, por tener en común el punto **C**, resultan ser perspectivas; así, las tres rectas que unen sus pares de puntos homólogos

$$\overline{\mathbf{A'G}} \equiv \overline{\mathbf{A'B}} \quad , \quad \overline{\mathbf{HB'}} \equiv \overline{\mathbf{AB'}} \quad , \quad \overline{\mathbf{ST}}$$

son concurrentes en un punto, el **R**. en consecuencia la recta $\overline{\mathbf{ST}}$ pasa por **R**, lo que establece la proposición.



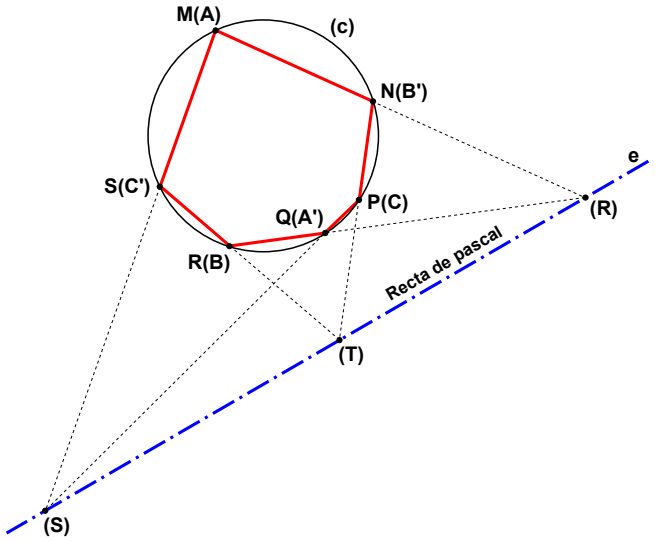
Las proposiciones anteriores que determinan la existencia del eje proyectivo, admiten el enunciado equivalente siguiente;

TEOREMA DE PASCAL. Dada una línea quebrada hexagonal inscrita en una circunferencia $(\mathbf{c})$**,** $\overline{\mathbf{MNPQRS}}$**, los puntos de intersección de los pares de lados opuestos** $\overline{\mathbf{MN}}$ **y** $\overline{\mathbf{RQ}}$**,** $\overline{\mathbf{NP}}$ **y** $\overline{\mathbf{SR}}$**,** $\overline{\mathbf{PQ}}$ **y** $\overline{\mathbf{MS}}$**, están en línea recta**.

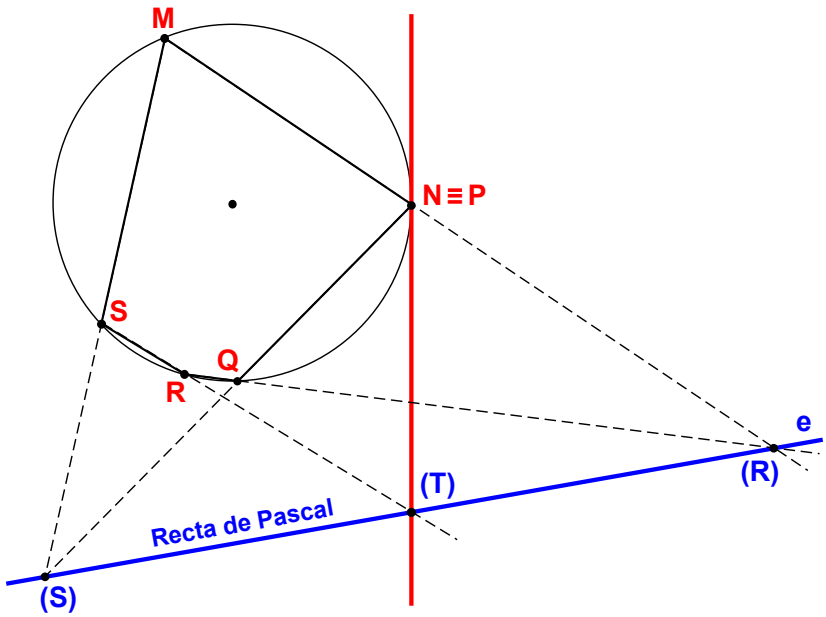
En efecto: Basta con identificar los vértices de la hexagonal, con los correspondientes de la figura anterior, como sigue:

$$\mathbf{M} \longleftrightarrow \mathbf{A} \quad , \quad \mathbf{N} \longleftrightarrow \mathbf{B'} \quad , \quad \mathbf{P} \longleftrightarrow \mathbf{C} \quad , \quad \mathbf{Q} \longleftrightarrow \mathbf{A'} \quad , \quad \mathbf{R} \longleftrightarrow \mathbf{B} \quad , \quad \mathbf{S} \longleftrightarrow \mathbf{C'}$$

y aplicar las proposiciones anteriores a la proyectividad definida por las de puntos **A**, **B**, **C** y sus correspondientes homólogos $\mathbf{A'}$, $\mathbf{B'}$, $\mathbf{C'}$.

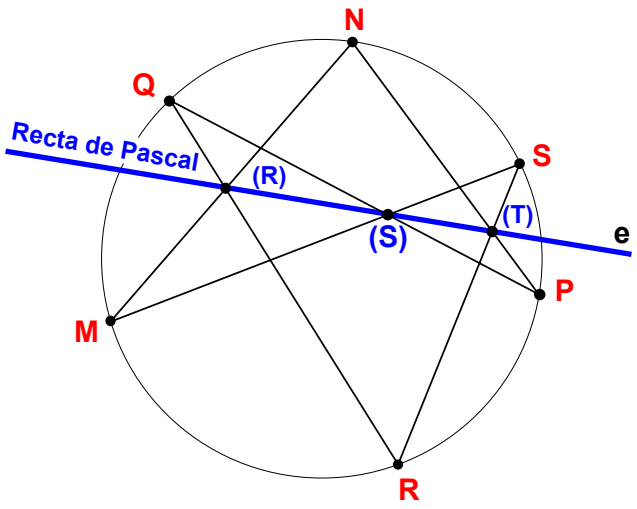


Ejemplo 1. El Teorema de Pascal sigue siendo aplicable cuando dos vértices del hexágono se confunden en uno, lo que significará que el lado que los unía se convertirá en la tangente a la circunferencia. Veámoslo en la siguiente construcción.



Ejemplo 2. El Teorema de Pascal siendo aplicable cuando la quebrada hexagonal no sea convexa. En este caso bastará considerar como lados opuestos los que se hallan separados por otros dos. Veámoslo en la siguiente construcción en la que serán opuestos los lados:

$$\overline{\mathbf{MN}} \text{ y } \overline{\mathbf{QR}} \quad ; \quad \overline{\mathbf{NP}} \text{ y } \overline{\mathbf{RS}} \quad ; \quad \overline{\mathbf{MS}} \text{ y } \overline{\mathbf{PQ}}.$$

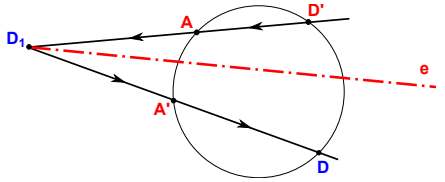


11.3 Construcción de puntos homólogos y de los puntos dobles

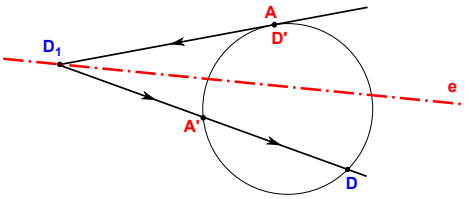
En el apartado anterior vimos como, conocidos tres pares de puntos homólogos, se puede construir el eje proyectivo.

Asimismo, conocidos un par de puntos homólogos y el eje proyectivo se pueden determinar fácilmente nuevos pares de puntos homólogos. Veámoslo con la siguiente cadena de ejemplos.

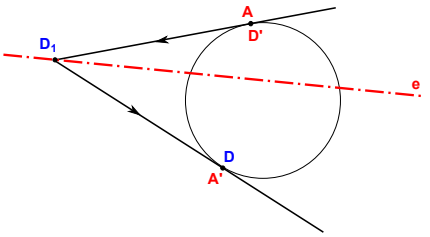
Ejemplo 1. Dados los puntos homólogos **A**, $\mathbf{A}'$ y el eje proyectivo, para hallar el homólogo del $\mathbf{D}'$ bastará proyectar este punto desde el **A** sobre el eje y unir su intersección $\mathbf{D_1}$ con el $\mathbf{A}'$; la intersección con la circunferencia nos determinará el punto **D**, homólogo del $\mathbf{D}'$.



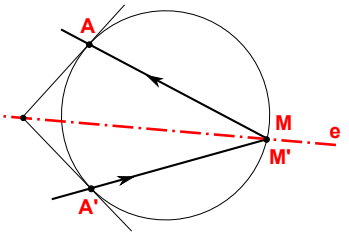
Ejemplo 2. Cuando los puntos **A** y $\mathbf{D}'$ coinciden, la recta $\overline{\mathbf{AD}'}$ resultará ser la tangente a la circunferencia en el punto **A**, y la construcción anterior se transforma en la siguiente:



Ejemplo 3. En el caso de que **A** y $\mathbf{A}'$ se correspondan doblemente, en cuyo caso también se confundirán **D** con $\mathbf{A}'$, las tangentes en **A** y $\mathbf{A}'$ se cortarán en el eje proyectivo.



Ejemplo 4. Si un punto **M** es homólogo de sí mismo, es decir se trata de un punto doble $\mathbf{M} \equiv \mathbf{M}'$, deberá estar situado en el eje proyectivo. Por otra parte, todo punto común al eje y a la circunferencia es un punto doble.

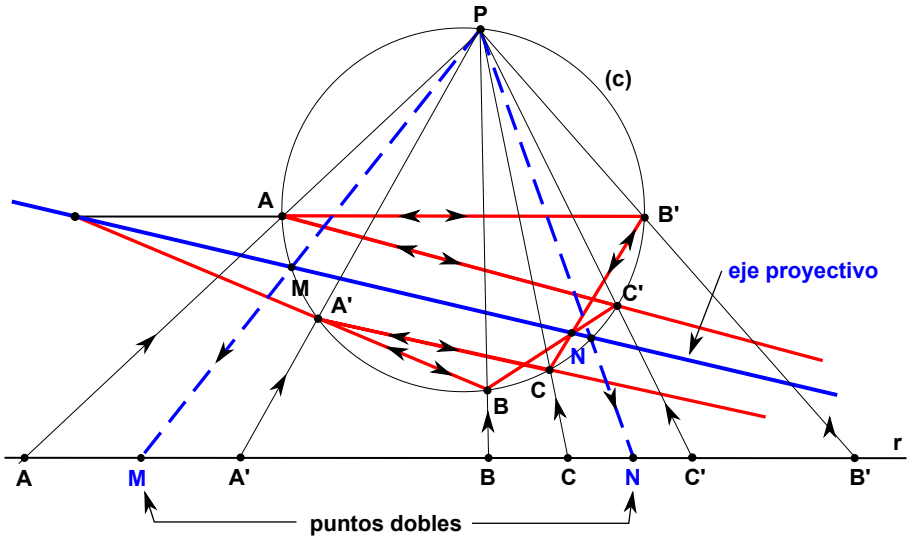


Por tanto, si el eje es secante, la proyectividad tendrá dos puntos dobles, y se llamará **hiperbólica**; si es tangente, tendrá un único punto doble, y se llamará **parabólica**; por último, si es exterior, carecerá de puntos dobles y se llamará **elíptica**.

Observemos que, el problema de la determinación de los puntos dobles que en el caso de las series rectilíneas se planteaba como un problema de segundo grado, se resuelve con toda facilidad en el caso de las series circulares.

La aplicación de lo que acabamos de ver al problema de la determinación de los eventuales puntos dobles, en el caso de dos series rectilíneas superpuestas, pasaría por proyectar, desde un punto cualquiera, ambas series, trazando luego una circunferencia que pasa por él; de esta manera podríamos llevar los puntos de ambas series a la circunferencia, y procediendo como hemos visto, es decir determinando su eje proyectivo, determinar los posibles puntos dobles, que proyectaríamos luego a la recta soporte de las series superpuestas dadas.

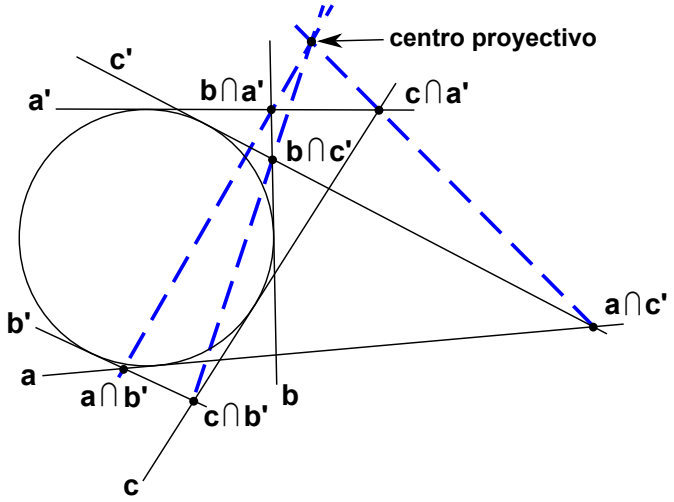
Ejemplo 5. Consideremos sobre la recta **r** las dos series proyectivas dadas por los puntos **A**, **B**, **C**, de la primera y sus correspondientes homólogos **A′**, **B′**, **C′**, de la segunda. Para la determinación de sus eventuales puntos dobles proyectaremos los puntos dados desde el **P**, por el que haremos pasar la circunferencia **(c)**. La intersección de los rayos $\overline{\mathbf{PA}}$, $\overline{\mathbf{PB}}$, . . . , $\overline{\mathbf{PC'}}$, con la circunferencias determinan sobre ésta la correspondiente proyectividad circular, para la que construimos su eje proyectivo, cuya intersección con la circunferencia nos determina los puntos dobles **M**, **N**, cuyas proyecciones desde **P** sobre **r**, nos resuelve el problema planteado.



En este caso, el eje proyectivo corta a la circunferencia en dos puntos, **M** y **N**, luego la proyectividad dada será **hiperbólica**.

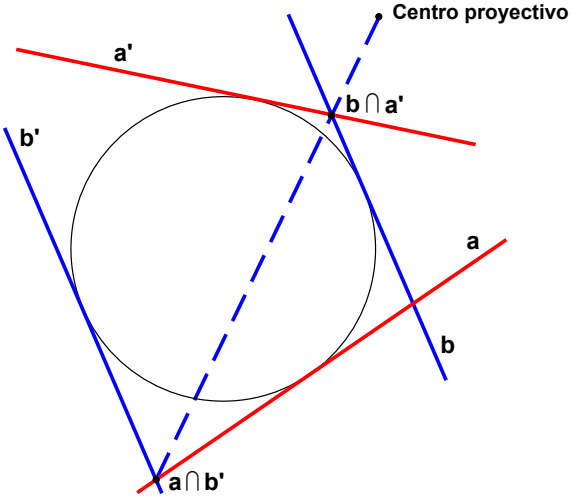
Las proposiciones del anterior apartado 11.2, que establecieron el eje proyectivo para las series proyectivas circulares, admiten otra para los haces, proporcionándonos como concepto correlativo el de centro proyectivo. Así, se verifica que: **Dados dos haces proyectivos de tangentes a una misma circunferencia; a, b, c, . . . y a′, b′, c′, los pares de puntos intersección de las rectas a, b′ y a′, b ; a, c′ y a′, c ; b, c′ y c′, b, en definitiva intersecciones de**

pares de rayos no homólogos y de sus correspondientes homólogos, están alineados con un punto fijo llamado centro proyectivo de los haces.



Conocido el centro proyectivo de dos haces proyectivos de tangentes a una misma circunferencia es fácil construir rayos homólogos, conocidos un par de ellos.

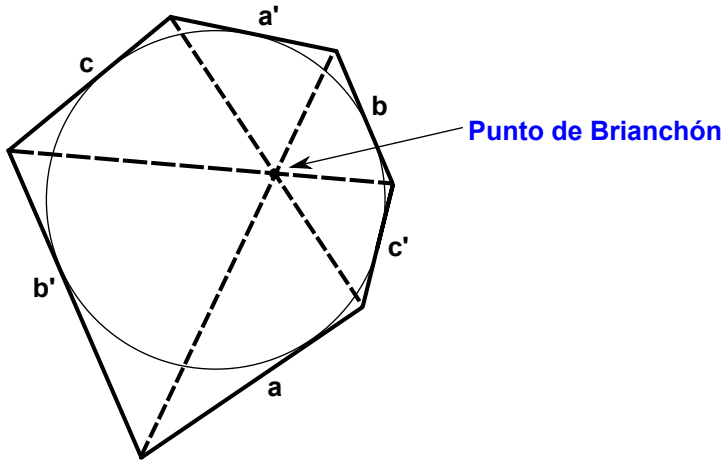
Ejemplo 6. Dado el centro proyectivo y un par de rayos homólogos, **a** y $\mathbf{a}'$ determinar el rayo homólogo del **b**.



Se determina el punto de intersección de los rayos **b** y $\mathbf{a}'$, es decir $\mathbf{b}\cap\mathbf{a}'$, uniéndose después este punto con el centro proyectivo; su intersección con el rayo **a** nos determina el punto $\mathbf{a}\cap\mathbf{b}'$. La tangente a la circunferencia desde este último punto, resultará ser el rayo $\mathbf{b}'$, homólogo del **b** dado.

La existencia del centro proyectivo, nos permite, en forma análoga a como hicimos con el **Teorema de Pascal**, respecto al eje proyectivo, enunciar la proposición siguiente.

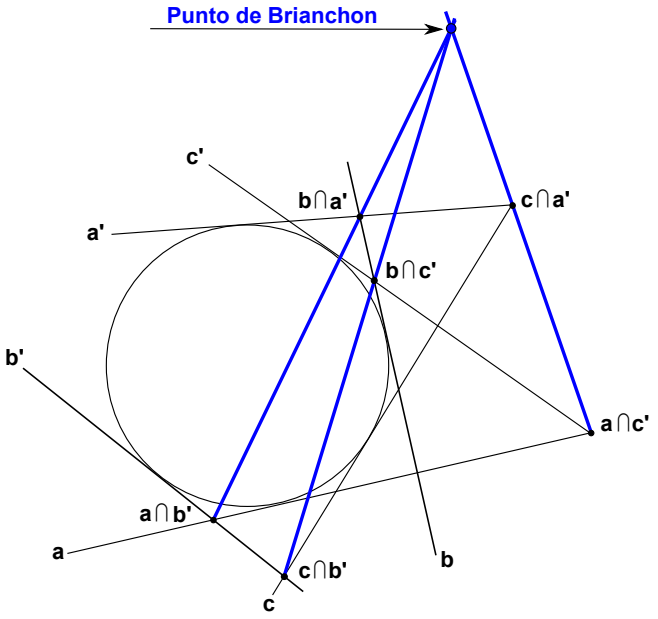
TEOREMA DE BRIANCHON. Dado un hexágono circunscrito a una circunferencia, las rectas que unen sus vértices opuestos se cortan en un punto.



Aplazamos su demostración a la Lección 32, mientras que en la Lección 33, ambas en el Tomo II, estableceremos una relación directa con el Teorema de Pascal, establecido en el anterior apartado 11.2 de la lección que nos ocupa.

Los haces proyectivos de tangentes a la circunferencia, en la figura anterior, que hemos considerado para determinar su centro proyectivo (PUNTO DE BRIANCHON), han sido los **a**, **b**, **c**,... y $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$,...

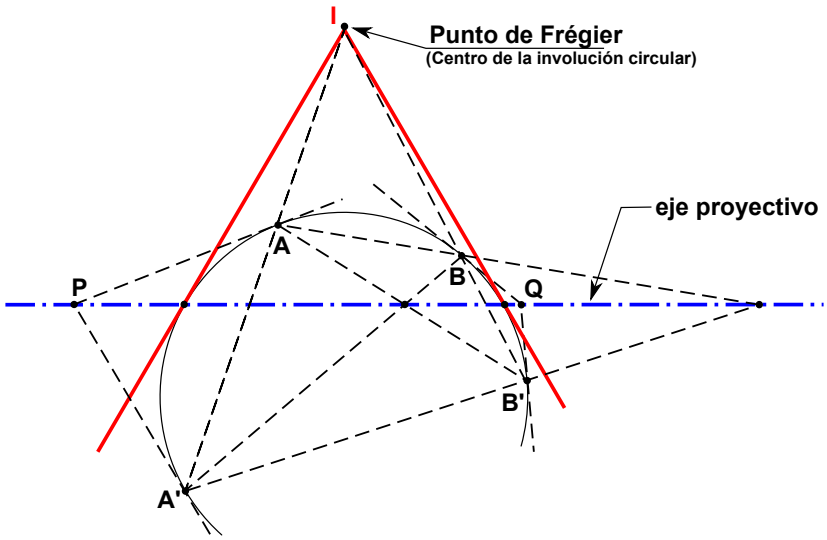
Ejemplo 7. El Teorema de Brianchon es aplicable a los distintos haces proyectivos que podamos formar con las seis tangentes a una circunferencia dada.



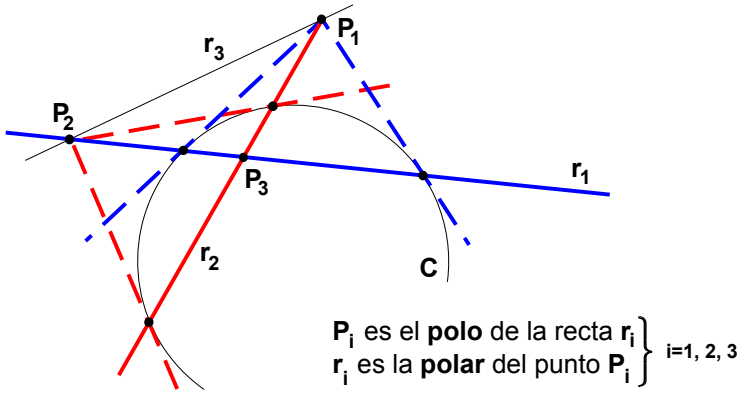
11.4 Involución entre series circulares

Lo mismo que ocurría en el caso de las series rectilíneas superpuestas, puede ocurrir que dos puntos, **A** y **A′**, homólogos en una proyectividad circular, se correspondan doblemente, en cuyo caso se corresponderán doblemente todos los demás pares homólogos y lo mismo ocurrirá en la proyectividad entre los haces proyectantes, desde un punto cualquiera de la circunferencia. La tal proyectividad recibirá, entonces, el nombre de **involución**.

Así, en una involución, la doble correspondencia de los puntos implica que el eje proyectivo de la misma no sólo contenga la intersección de $\overline{\mathbf{AB'}}$ y $\overline{\mathbf{A'B}}$, siendo homólogos **A**, **A′**, y **B**, **B′**, sino también la de $\overline{\mathbf{AB}}$ y $\overline{\mathbf{A'B'}}$, así como la intersección de las tangentes a la circunferencia en los puntos **A**, **A′** y **B**, **B′**.



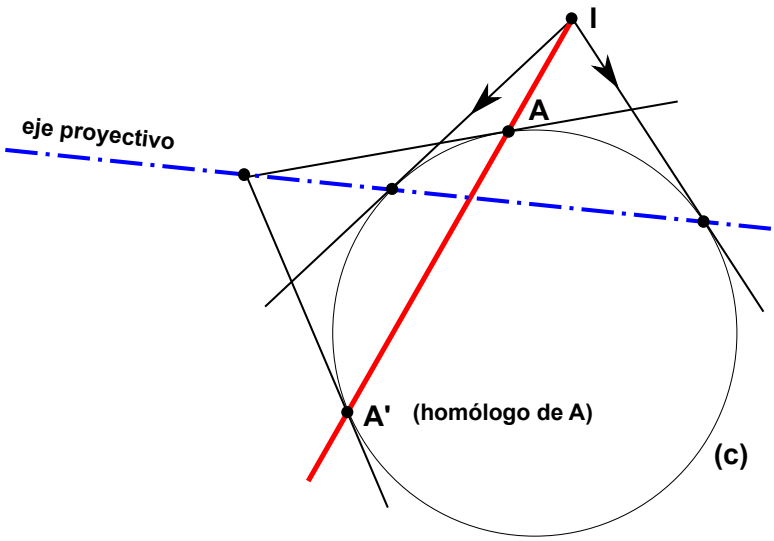
A efectos de justificar la comprobación de la construcción del ejemplo que seguirá, anticipemos, geométricamente, los conceptos de **polar** de un punto y **polo** de una recta, respecto de una circunferencia, que desarrollaremos con detalle en la lección 21, cuya lectura podríamos incluso permitirnos en este momento sin alterar para nada el orden lógico del estudio que venimos realizando.



Ejemplo 1. Dada la involución circular, sobre **(c)**, por su centro de involución, **I** determinemos:

a) El homólogo del punto **A**.

b) El eje proyectivo.



El homólogo del punto **A** resultará ser el de intersección del rayo $\overline{\mathbf{IA}}$ con **(c)**.

El eje proyectivo será la recta que pasa por los de contacto con **(c)** de las tangentes a la misma desde el punto **I**; es decir la polar de **I** respecto **(c)**.

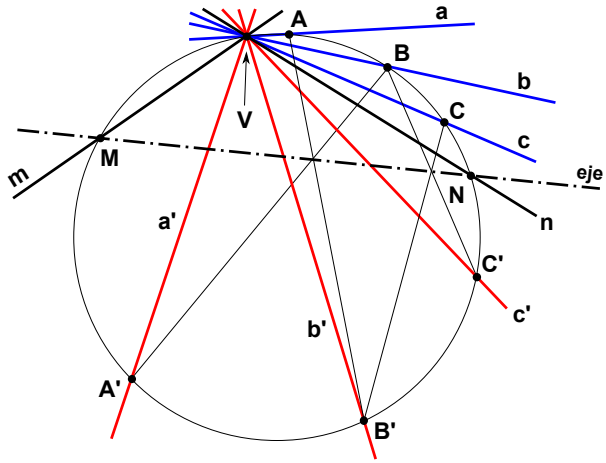
Lección 12.- EL PROBLEMA DE CASTILLÓN

12.1 Series y haces superpuestos
12.2 Prospectividades
12.3 El problema de Castillón

12.1 Series y haces superpuestos

En la lección anterior vimos con qué facilidad se resuelve el problema de la determinación de los puntos dobles en una proyectividad circular, de lo cual vamos a aprovecharnos para obtener tanto los rayos dobles de una proyectividad entre haces superpuestos como los puntos dobles de una proyectividad entre series superpuestas.

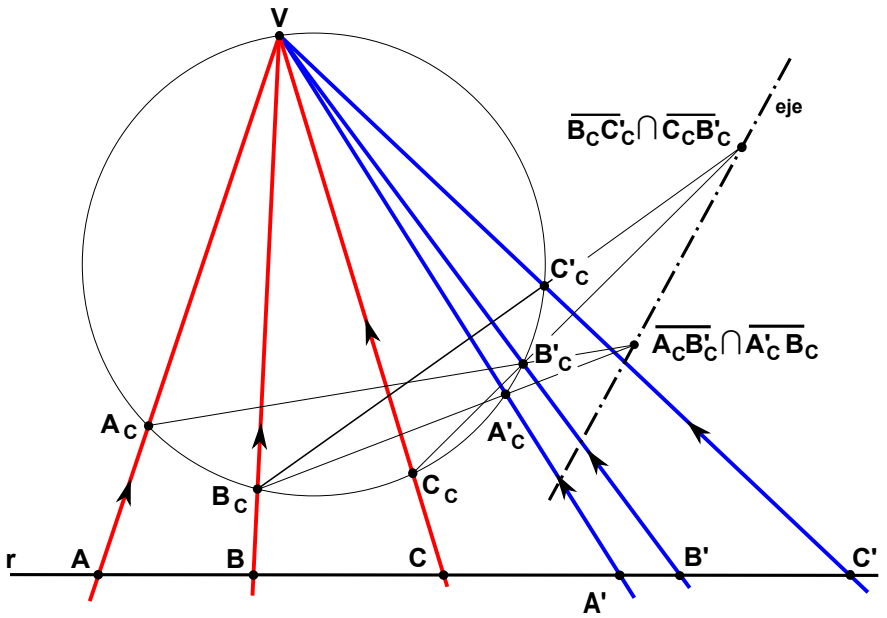
Veamos primero cómo determinamos los rayos dobles de una proyectividad, o de una involución, entre dos haces superpuestos siendo éstos los **a**, **b**, **c**, **...** y **a′**, **b′**, **c′**, **...** de vértice **V**, mostrados en la figura adjunta.



Trazamos una circunferencia, cualquiera, con la condición de que pase por **V**, la cual cortará a los haces dados según dos series circulares proyectivas. Determinado su eje proyectivo, como ya sabemos hacer, su intersección con la circunferencia nos dará los puntos dobles, **M** y **N**, que proyectados desde **V** determinarán los rayos dobles, **m** y **n**, de la proyectividad entre los haces superpuestos dados.

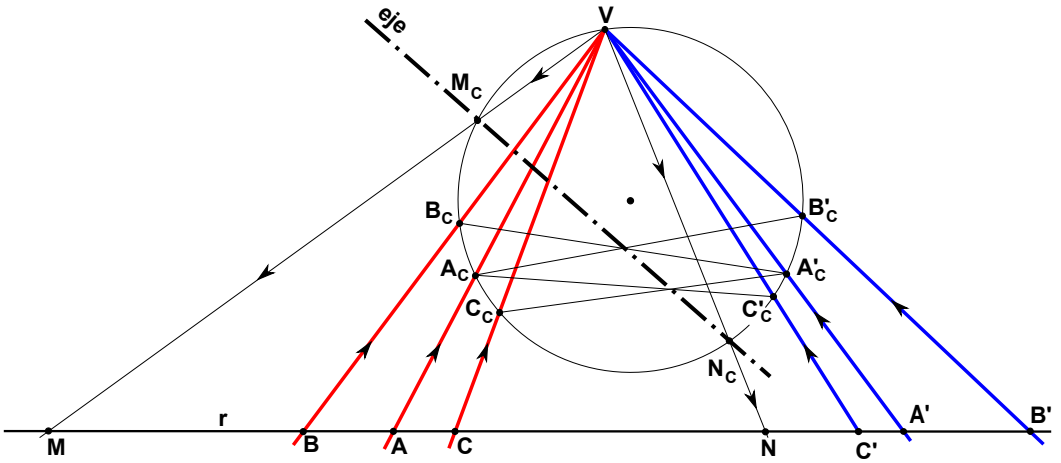
Si de lo que se trata es de determinar los puntos dobles de una proyectividad, o de una involución, entre dos series superpuestas, bastaría con proyectar las series dadas desde un punto cualquiera y resolverlo aplicando el razonamiento anterior.

Ejemplo 1. Dadas, sobre **r**, las series superpuestas proyectivas, **A, B, C, …** $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'$, …, para determinar sus puntos dobles aplicaremos lo indicado más arriba:



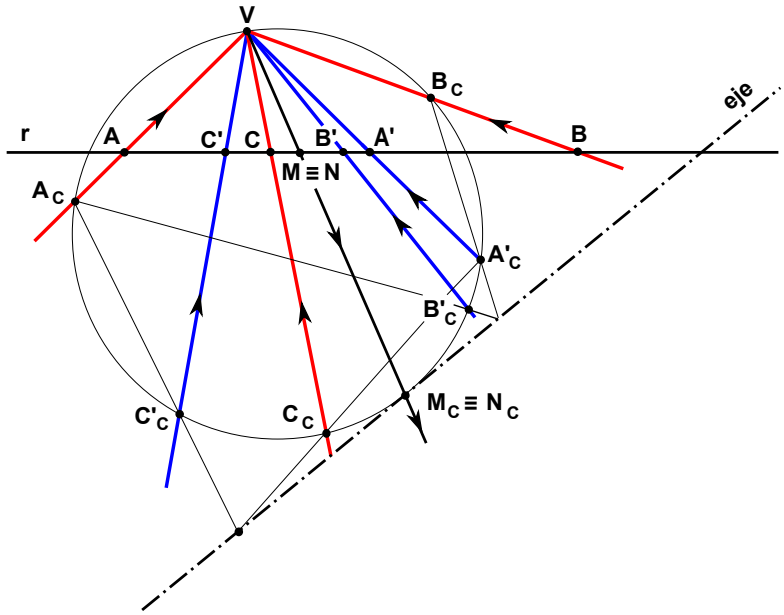
El eje no corta a la circunferencia, luego no existen puntos dobles; se trata de una **proyectividad elíptica**.

Ejemplo 2. Dadas, sobre **r**, las series superpuestas proyectivas **A, B, C, …** $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'$, …, determinemos sus puntos dobles, siguiendo el procedimiento del ejemplo anterior.



El eje corta en dos puntos a la circunferencia, luego existen dos puntos dobles, **M** y **N**; se trata de una **proyectividad hiperbólica**.

Ejemplo 3. Dadas, sobre **r**, las series superpuestas proyectivas **A, B, C, ...** $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'$, ..., se trata de determinar sus puntos dobles, siguiendo el procedimiento de los ejemplos anteriores.



El eje es tangente a la circunferencia, luego existe un único punto doble; se trata de una **proyectividad parabólica**.

12.2 Prospectividades

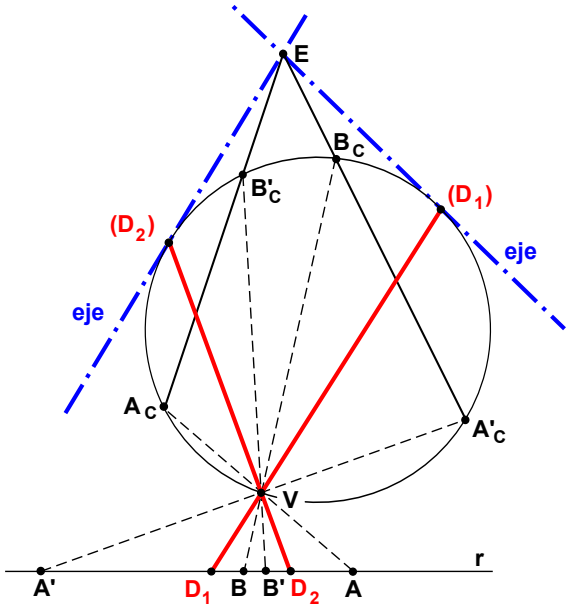
Recordemos que, si una proyectividad entre series superpuestas admite dos puntos dobles recibe el nombre de **hiperbólica**, si uno solo **parabólica**, y en el caso de no admitir ninguno **elíptica**.

En particular, a una proyectividad parabólica se le suele llamar, también, **prospectividad**.

Planteémonos ahora el problema de construir una prospectividad, entre dos series rectilíneas superpuestas, definida por dos pares de puntos homólogos $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$ y $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}'$. Significa esto establecer el procedimiento para determinar tanto pares de puntos homólogos como el único punto doble.

Para su resolución aplicaremos la técnica utilizada en el apartado anterior; es decir, trabajar sobre la proyectividad circular que resulta de proyectar desde un punto de la circunferencia, sobre la misma, los datos conocidos de la prospectividad que nos está interesando.

La solución es muy sencilla puesto que, según sabemos, el eje proyectivo de las series circulares debe pasar por el punto **E**, intersección de $\overline{\mathbf{A_c B'_c}}$ y $\overline{\mathbf{A'_c B_c}}$, y además ser tangente a la circunferencia, tal como se muestra en la figura siguiente. El punto de contacto del eje y la circunferencia proporcionará el único punto doble de la prospectividad.

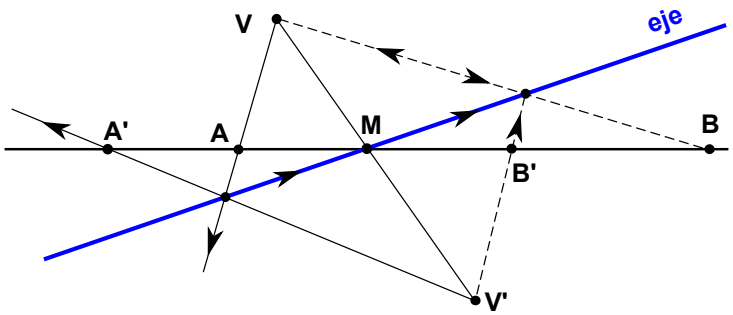


Observemos que, si el punto **E** es exterior a la circunferencia el problema tendrá dos soluciones, y si es interior no tendrá solución. Cuando el punto **E** pertenezca a la circunferencia, la solución será única, y dicho punto coincidirá con el punto doble.

En el caso de la figura anterior, para la primera solución será punto doble el $\mathbf{D_1}$, y para la segunda $\mathbf{D_2}$

Ejemplo 1. Si de la prospectividad conocemos un par de puntos homólogos y su único punto doble, lo que la determina completamente, la construcción del eje es muy sencilla, como ya vimos en el apartado 10.4, de la Lección 10.

Así, dados el par de puntos homólogos **A**, $\mathbf{A'}$ y el punto doble **M**, cualesquiera que sean los puntos **V** y $\mathbf{V'}$, con la condición de estar alineados con **M**, la construcción será la siguiente:

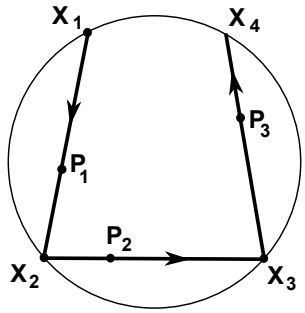


Una vez determinado el eje, el homólogo de cualquier punto **B** se obtiene como muestra la figura.
Observemos que aquí, en lugar de suponer conocidos dos pares de puntos homólogos e imponer que se trata de una prospectividad, lo que hemos hecho es suponer conocido un solo par de puntos homólogos, y un único punto doble.

12.3 El problema de Castillón

Vamos a ver ahora, fuera del tema de las prospectividades, como el método proyectivo resuelve, con extraordinaria facilidad, un problema métrico que fue objeto de discusión de grandes geómetras. Se trata del famoso **problema de Castillón**, cuyo planteamiento es el siguiente:

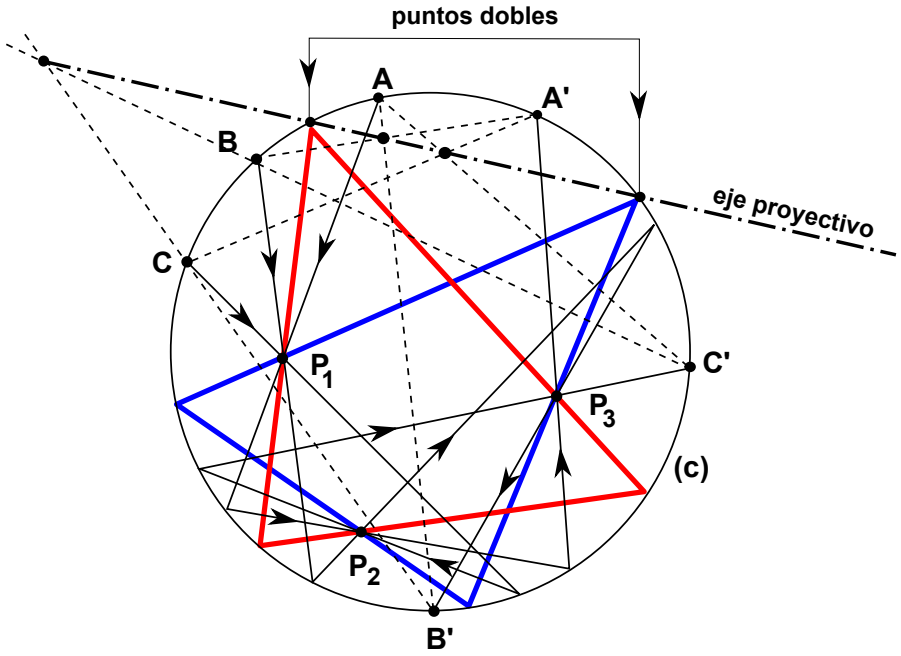
Inscribir en una circunferencia un triángulo cuyos lados pasen ordenadamente por tres puntos dados, P_1, P_2, P_3, ninguno de ellos situado sobre dicha circunferencia.



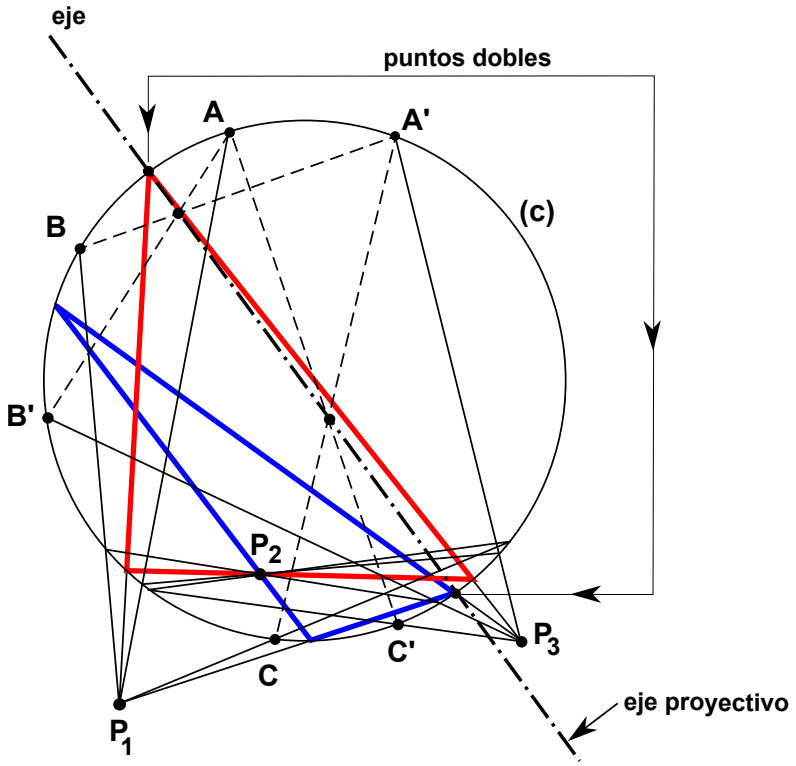
La solución es sencilla: Fijado un punto cualquiera, $\mathbf{X_1}$, sobre la circunferencia, se traza la recta $\overline{\mathbf{X_1P_1}}$, que cortará a la circunferencia en el punto $\mathbf{X_2}$; por éste se traza la recta $\overline{\mathbf{X_2P_2}}$, que cortará a la circunferencia en el punto $\mathbf{X_3}$. Por último, se traza la recta $\overline{\mathbf{X_3P_3}}$, que cortará a la circunferencia en el punto $\mathbf{X_4}$. Esta manera de proceder establece una proyectividad circular en la que al punto $\mathbf{X_1}$ le corresponde el $\mathbf{X_4}$. Para establecer completamente la proyectividad bastará con repetir lo que hemos hecho con el punto $\mathbf{X_1}$, con dos nuevos puntos $\mathbf{Y_1}$, $\mathbf{Z_1}$. Los puntos dobles de la proyectividad resultante, entre $\mathbf{X_1}$ y $\mathbf{X_4}$ darán los puntos **X** con los que se cierra el triángulo.

Tal como ya sabemos los eventuales puntos dobles que nos interesan resultarán ser los de intersección con la circunferencia del eje proyectivo, que determinaremos como hacíamos en el apartado 11.3 de la Lección 11. En consecuencia el número de soluciones, dependerá de que el tal eje corte, sea tangente o exterior a la circunferencia, es decir dos, uno o ningún triángulo que cumpla lo pedido. Veámoslo con unos ejemplos:

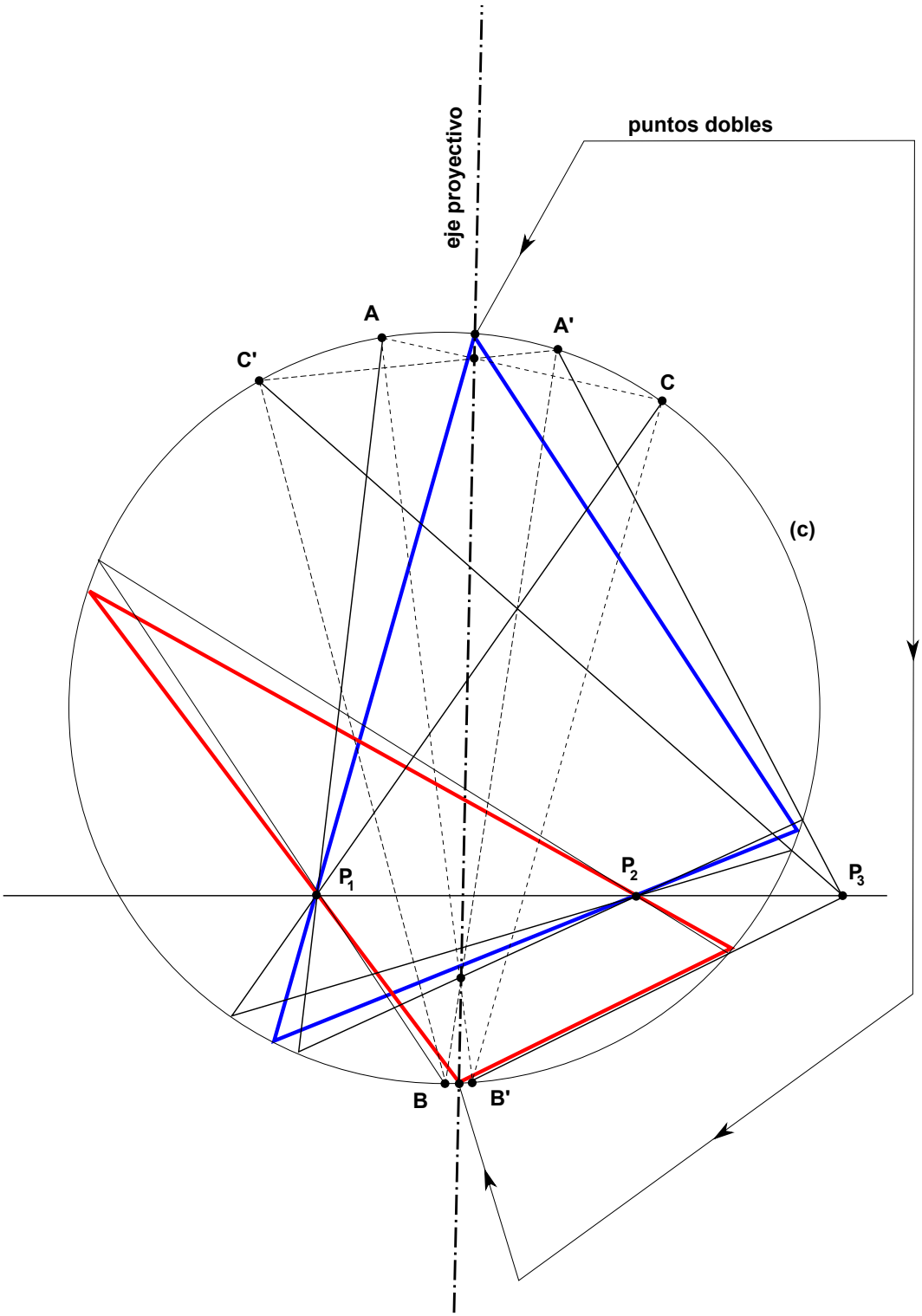
Ejemplo 1. Inscribir, en la circunferencia (**c**), un triángulo cuyos lados pasen por los puntos $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$.



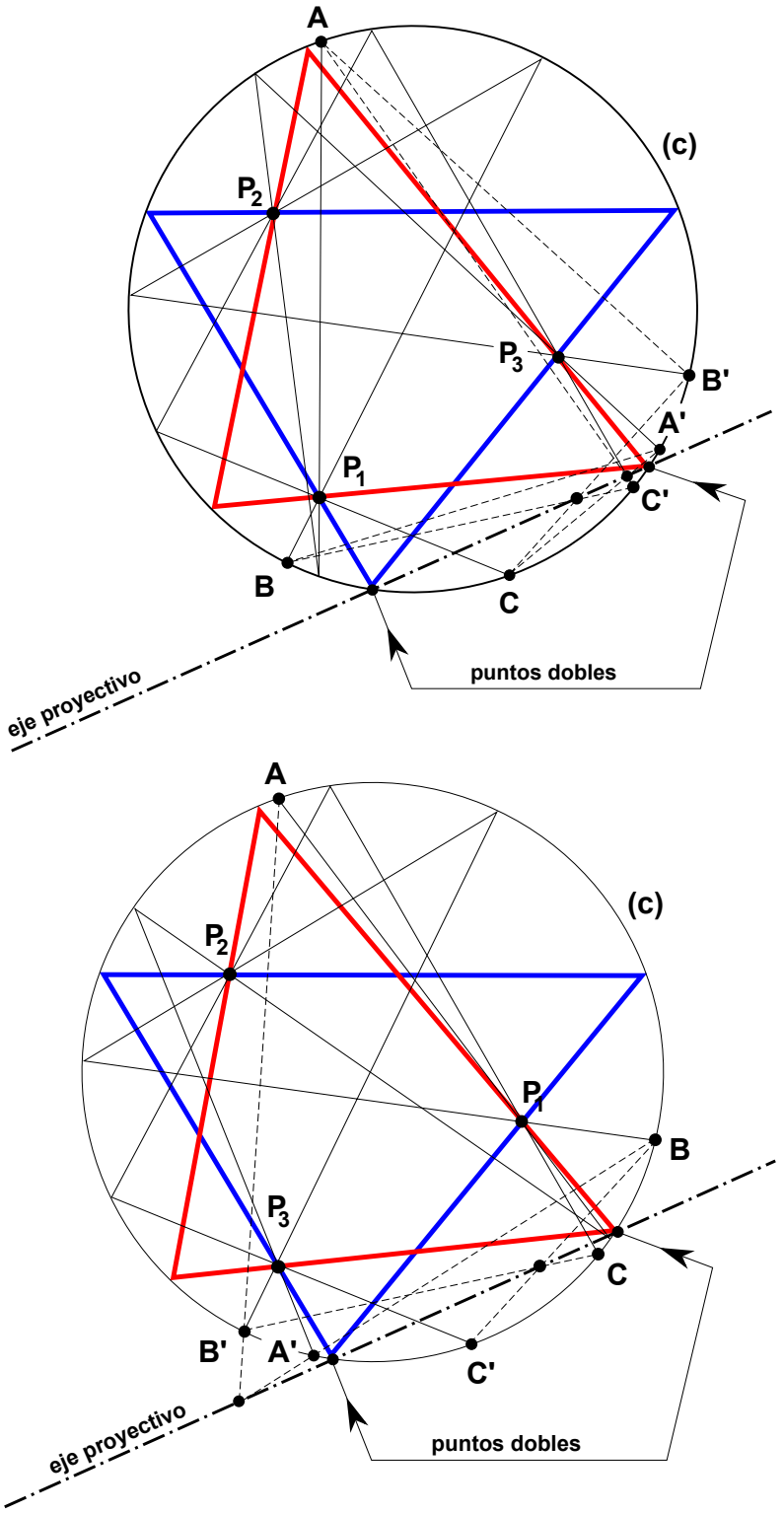
Ejemplo 2. Inscribir en la circunferencia (**c**), un triángulo cuyos lados pasen por los puntos $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$.



Ejemplo 3. Inscribir en la circunferencia (**c**), un triángulo cuyos lados pasen por los puntos $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$.

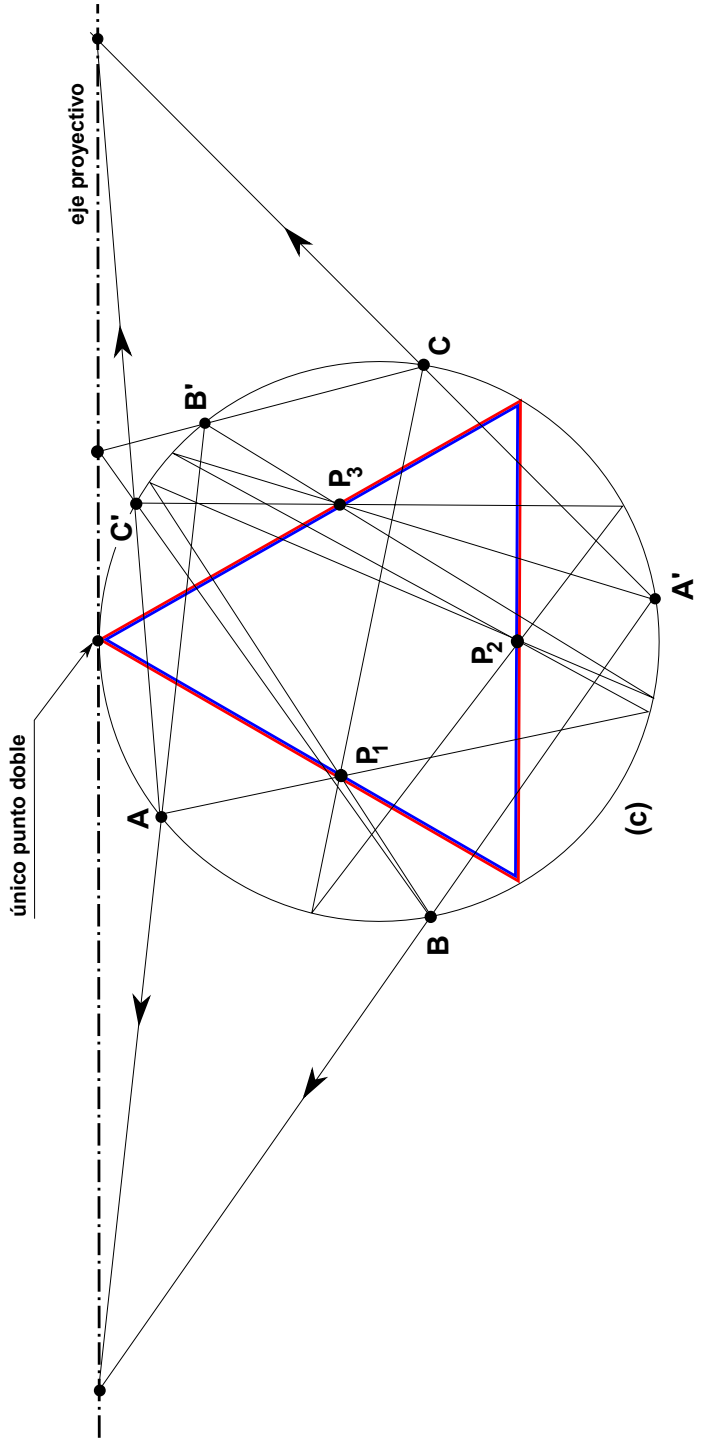


Ejemplo 4. Inscribir en la circunferencia (**c**), un triángulo cuyos lados pasen por los puntos $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$.

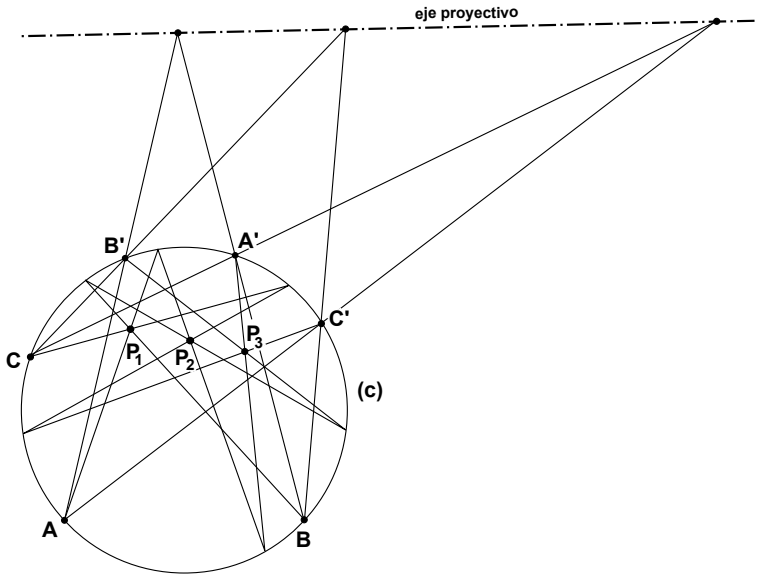


Ejemplo 5. Inscribir en la circunferencia $(\mathbf{c})$, un triángulo cuyos lados pasen por los puntos $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$.

Dado que el eje proyectivo es tangente a la circunferencia, sólo existirá un triángulo.

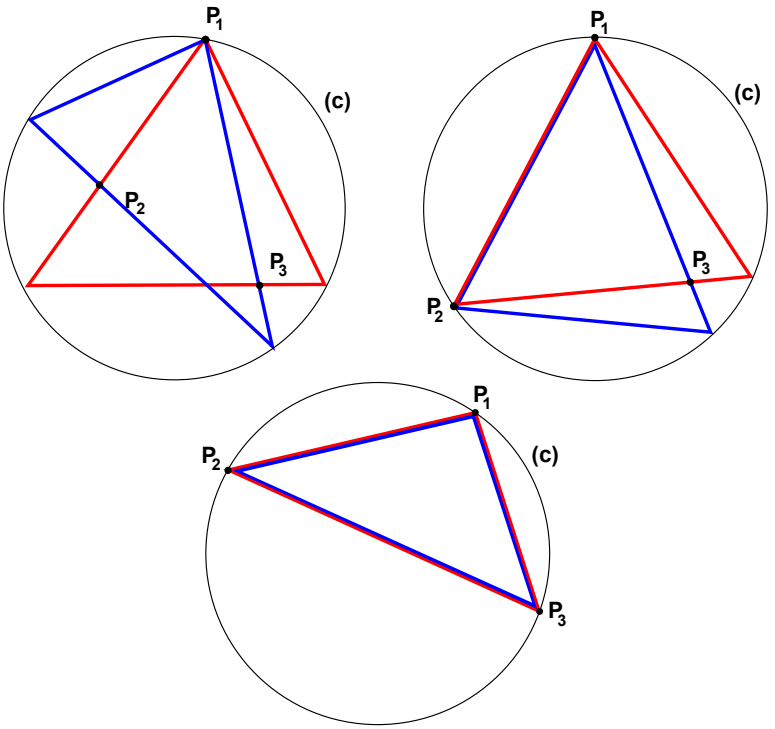


Ejemplo 6. Inscribir en la circunferencia $(\mathbf{c})$, un triángulo cuyos lados pasen por los puntos $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$.



Dado que el eje proyectivo no corta a la circunferencia, y en consecuencia no habrá puntos dobles, resultará que no existirá ningún triángulo que cumpla.

Observemos que, si al menos uno de los puntos $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$ estuviesen sobre la circunferencia **(c)**, el problema no sería tal, puesto que la solución sería inmediata, como ponen de manifiesto las siguientes figuras.



CAPÍTULO V

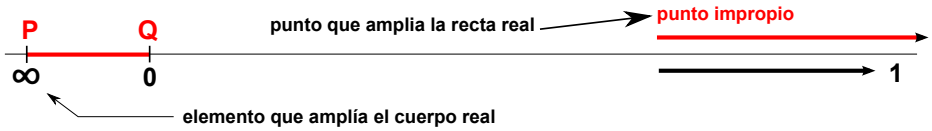
13.- COORDENADAS EN EL PLANO

13.1 Coordenadas homogéneas. Plano proyectivo
13.2 Coordenadas proyectivas puntuales

13.1 Coordenadas homogéneas. Plano proyectivo

La introducción, en la recta euclídea, de las abscisas baricéntricas, en la Lección 3, y luego, en la Lección 4, las abscisas proyectivas, nos condujeron, de una manera natural, a la ampliación con un punto, que llamamos impropio, de dicha recta, dando lugar a la recta proyectiva; asimismo tuvimos que ampliar el cuerpo real con un elemento que llamamos ∞, con el que operábamos como se hace en Cálculo. Sólo de esta manera las abscisas baricéntricas, y las proyectivas, establecían una biyección entre los puntos de la recta y los elementos del cuerpo real ampliado.

El esquema que manejamos fue el siguiente:



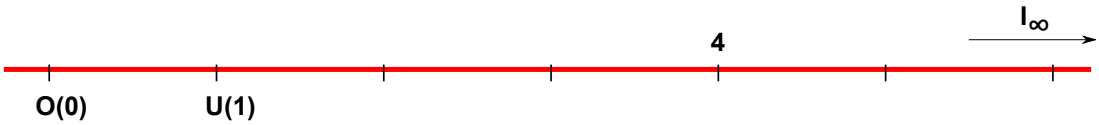
Podemos llegar, también de una manera natural, al mismo resultado partiendo de las abscisas cartesianas, a base de sustituir las coordenadas $\mathbf{x}$ por la pareja $(\mathbf{X_1},\ \mathbf{X_2})$ de sus coordenadas homogéneas, ligadas por la condición

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{X_1}}{\mathbf{X_2}}$$

y definidas, por tanto, a menos de un factor no nulo; así $(\mathbf{X_1},\ \mathbf{X_2})$ y $(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{X_1},\ \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{X_2})$, con $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, son parejas que representan un mismo punto.

Observamos entonces que, a todo $\mathbf{X}$ de la recta ordinaria referida a un sistema cartesiano, corresponde una pareja $(\mathbf{X_1},\ \mathbf{X_2})$ de elementos determinados a menos de un factor no nulo, tal que $\mathbf{X_2}\neq\mathbf{0}$. Al pasar de la recta euclídea a la recta proyectiva añadiendo el punto impropio de abscisa $\mathbf{x}=\boldsymbol{\infty}$, obtenemos en correspondencia para el mismo las coordenadas homogéneas **(1, 0)**.

Ejemplo 1. Consideremos la recta **r**, referida a un sistema cartesiano **(0, u)**



Al punto **P** de abscisa **x=4**, le corresponderán las coordenadas homogéneas $(\mathbf{4}, \mathbf{1})$, así como las

$$(-\mathbf{8},\ -\mathbf{2})\ ,\ (\mathbf{8},\ \mathbf{2})\ ,\ (-\mathbf{12},\ -\mathbf{3}),\ \cdots\cdots$$

y al punto impropio $\mathbf{I_\infty}$, le corresponderán las $(\mathbf{1},\ \mathbf{0})$, así como las

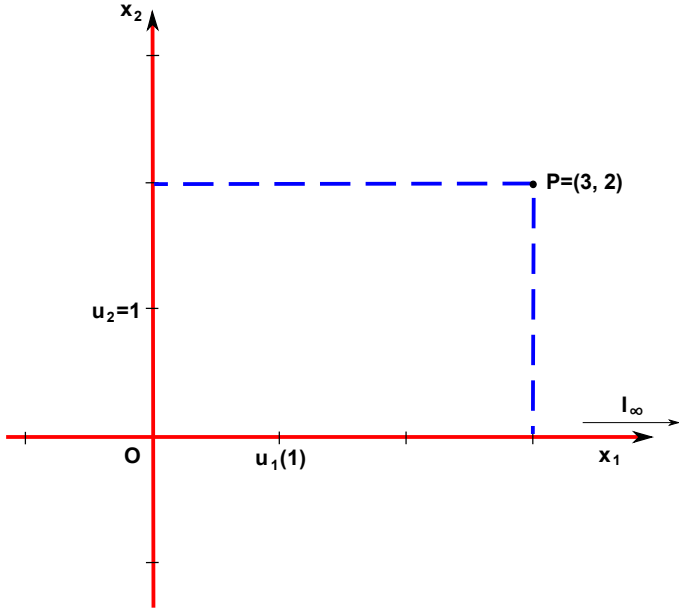
$$(\mathbf{5},\ \mathbf{0})\ ,\ (\mathbf{7},\ \mathbf{0})\ ,\ (-\mathbf{9},\ \mathbf{0}),\ \cdots\cdots$$

En forma análoga, en el plano euclídeo referido a las coordenadas cartesianas $(\mathbf{x_1},\ \mathbf{x_2})$ introducimos las coordenadas homogéneas $(\mathbf{X_1},\ \mathbf{X_2},\ \mathbf{X_3})$ definidas a menos de un factor no nulo, por las condiciones.

$$\mathbf{x_1} = \frac{\mathbf{X_1}}{\mathbf{X_3}} \quad , \quad \mathbf{x_2} = \frac{\mathbf{X_2}}{\mathbf{X_3}}$$

Al punto de coordenadas $(\mathbf{x_1},\ \mathbf{x_2})$ del plano euclídeo, corresponden todas las ternas de números reales $(\mathbf{X_1},\ \mathbf{X_2},\ \mathbf{X_3})$ que satisfacen las relaciones anteriores. Todas esas ternas verificando que $\mathbf{X_3} \neq \mathbf{0}$.

Ejemplo 2. Consideremos un plano $\mathbf{\Pi}$, referido a un sistema cartesiano $(\mathbf{0},\ \mathbf{u_2},\ \mathbf{u_3})$



Al punto **P** de coordenadas $(\mathbf{x_1 = 3},\ \mathbf{x_2 = 2})$ le corresponderán las coordenadas homogéneas **(3, 2, 1)** y también las

$$(\mathbf{9},\ \mathbf{6},\ \mathbf{3})\ ,\ (\mathbf{6},\ \mathbf{4},\ \mathbf{2})\ ,\ (-\mathbf{12},\ -\mathbf{8},\ -\mathbf{4}),\ \cdots$$

al punto **O** las $(\mathbf{0},\ \mathbf{0},\ \mathbf{1})$ y también las

$$(\mathbf{0},\ \mathbf{0},\ \mathbf{3})\ ,\ (\mathbf{0},\ \mathbf{0},\ \mathbf{7})\ ,\ (\mathbf{0},\ \mathbf{0},\ -\mathbf{2}),\ \cdots$$

y al punto impropio $\mathbf{I_\infty}$ las $(\mathbf{1},\ \mathbf{0},\ \mathbf{0})$ y también las

$$(\mathbf{2},\ \mathbf{0},\ \mathbf{0})\ ,\ (\mathbf{5},\ \mathbf{0},\ \mathbf{0})\ ,\ (-\mathbf{3},\ \mathbf{0},\ \mathbf{0}),\cdots$$

Así, convenimos en ampliar el plano euclídeo con las ternas $(\mathbf{X_1},\ \mathbf{X_2},\ \mathbf{0})$, con $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$ no simultáneamente nulos, definidas a menos de un factor no nulo; llamaremos **puntos impropios** a los puntos así introducidos. De esta manera obtenemos lo que llamaremos el **plano proyectivo**, en el que desaparece la excepción que en el plano euclídeo representan dos rectas paralelas, en cuanto a la incidencia de dos rectas.

En efecto: Si consideramos el sistema formado por las ecuaciones cartesianas de dos rectas distintas **r** y **s**:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{r} \equiv \mathbf{a_1} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{a_2} \cdot \mathbf{x_2} + \mathbf{a_3} = \mathbf{0} \\ \mathbf{s} \equiv \mathbf{b_1} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{b_2} \cdot \mathbf{x_2} + \mathbf{b_3} = \mathbf{0} \end{array}\right\}$$

al pasar a utilizar coordenadas homogéneas, haciendo la sustitución

$$\mathbf{x_1} = \frac{\mathbf{X_1}}{\mathbf{X_3}} \quad , \quad \mathbf{x_2} = \frac{\mathbf{X_2}}{\mathbf{X_3}} \ ,$$

y teniendo en cuenta que en el plano euclídeo es $\mathbf{X_3} \neq \mathbf{0}$, obtenemos como sistema equivalente el siguiente

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{a_1} \cdot \mathbf{X_1} + \mathbf{a_2} \cdot \mathbf{X_2} + \mathbf{a_3} \cdot \mathbf{X_3} = \mathbf{0} \\ \mathbf{b_1} \cdot \mathbf{X_1} + \mathbf{b_2} \cdot \mathbf{X_2} + \mathbf{b_3} \cdot \mathbf{X_3} = \mathbf{0} \end{array}\right\}$$

cuyas soluciones pueden expresarse así.

$$\frac{\mathbf{X_1}}{\begin{vmatrix} \mathbf{a_2} & \mathbf{a_3} \\ \mathbf{b_2} & \mathbf{b_3} \end{vmatrix}} = \frac{\mathbf{X_2}}{\begin{vmatrix} \mathbf{a_3} & \mathbf{a_1} \\ \mathbf{b_3} & \mathbf{b_1} \end{vmatrix}} = \frac{\mathbf{X_3}}{\begin{vmatrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{a_2} \\ \mathbf{b_1} & \mathbf{b_2} \end{vmatrix}}$$

Por ser las rectas **r** y **s** distintas, los determinantes que figuran en los denominadores anteriores no son simultáneamente nulos; en consecuencia la solución es un punto del plano proyectivo, común a **r** y **s**, que sólo sería un punto impropio cuando, y sólo cuando, $\mathbf{X_3} = \mathbf{0}$, es decir en el caso de ser

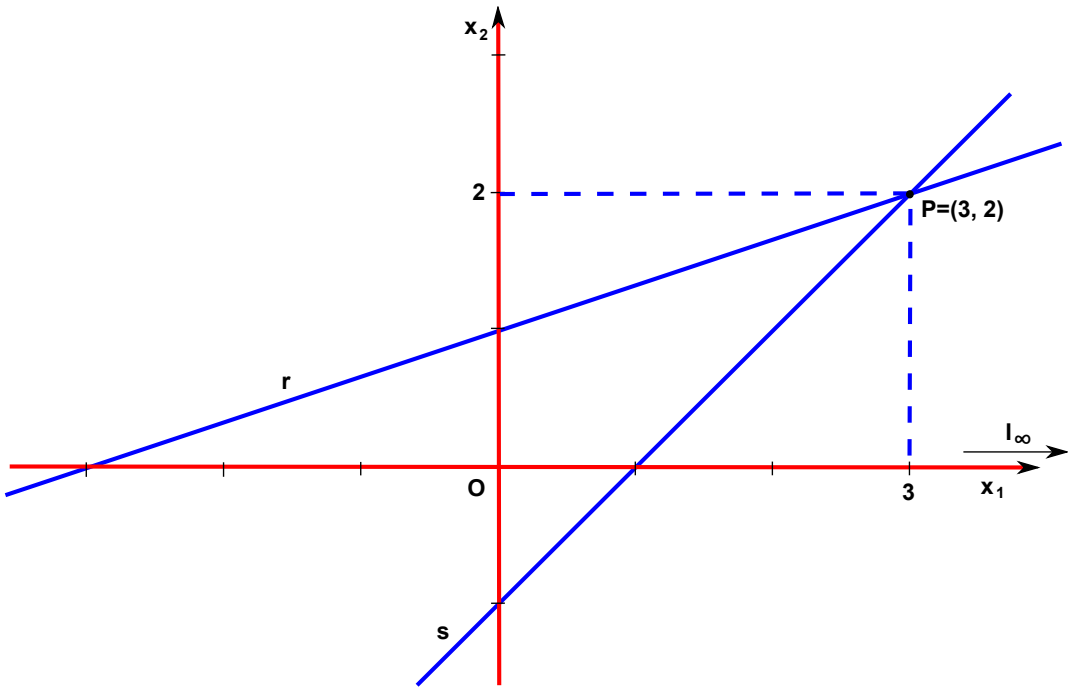
$$\begin{vmatrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{a_2} \\ \mathbf{b_1} & \mathbf{b_2} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

es decir, cuando las rectas dadas fuesen paralelas.

Ejemplo 3. Consideremos las rectas **r** y **s** dadas por sus ecuaciones cartesianas

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{x_1} - \mathbf{3} \cdot \mathbf{x_2} + \mathbf{3} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{s} \equiv \mathbf{x_1} - \quad \mathbf{x_2} - \mathbf{1} = \mathbf{0}$$



Expresadas éstas utilizando coordenadas homogéneas tendremos como sistema equivalente el siguiente

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{X_1} - \mathbf{3} \cdot \mathbf{X_2} + \mathbf{3} \cdot \mathbf{X_3} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{s} \equiv \mathbf{X_1} - \quad \mathbf{X_2} - \quad \mathbf{X_3} = \mathbf{0}$$

cuyas soluciones pueden expresarse como sigue:

$$\frac{\mathbf{X_1}}{\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\mathbf{X_2}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\mathbf{X_3}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}$$

y puesto que

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 3 = 2 \neq 0$$

el punto de intersección **P**, será propio. Haciendo $\mathbf{X_3} = \mathbf{1}$ será

$$\frac{\mathbf{X_1}}{\mathbf{6}} = \frac{\mathbf{X_2}}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x_1} = \mathbf{3} \quad , \quad \mathbf{x_2} = \mathbf{2}$$

Luego el punto de intersección de las rectas **r** y **s**, será, en coordenadas homogéneas: $\mathbf{P}(\mathbf{3},\ \mathbf{2},\ \mathbf{1})$, mientras en coordenadas no homogéneas será $\mathbf{P}(\mathbf{3},\ \mathbf{2})$.

Si observamos que en el plano proyectivo una recta viene representada por una ecuación lineal homogénea en las coordenadas homogéneas $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$, $\mathbf{X_3}$, y que los puntos impropios satisfacen a:

$$\mathbf{X_3 = 0},$$

que no es más que un caso particular de la ecuación general, para $\mathbf{a_1 = a_2 = 0}$, parece natural decir que el plano proyectivo se obtiene añadiendo la **recta impropia**, $\mathbf{X_3 = 0}$, al plano euclídeo.

Así, la recta impropia tendrá en común con cualquier recta propia el punto impropio de ésta.

Ejemplo 4. Consideremos las rectas **r** y **s** dadas por sus ecuaciones cartesianas:

$$\mathbf{r \equiv x_1 - 3 \cdot x_2 - 3 = 0}$$
$$\mathbf{s \equiv x_1 - 3 \cdot x_2 + 6 = 0}$$

Las rectas en cuestión son paralelas, luego su punto de intersección será impropio. Para su obtención, utilizaremos coordenadas homogéneas; así sus ecuaciones serán.

$$\mathbf{r \equiv X_1 - 3 \cdot X_2 - 3 \cdot X_3 = 0}$$
$$\mathbf{s \equiv X_1 - 3 \cdot X_2 + 6 \cdot X_3 = 0}$$

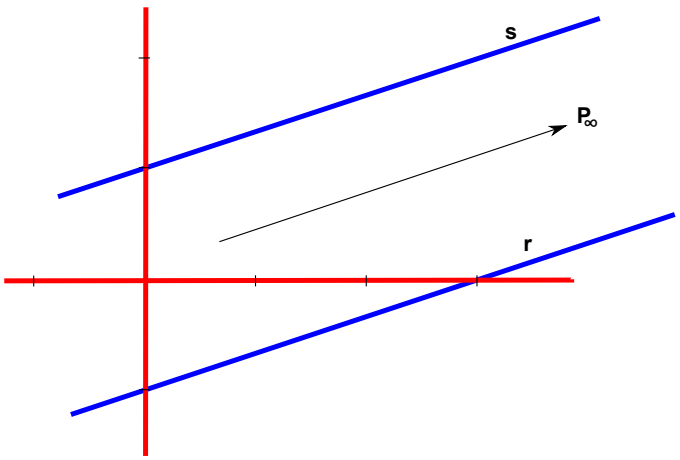
Las soluciones se expresarán como sigue:

$$\frac{\mathbf{X_1}}{\begin{vmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{6} \end{vmatrix}} = \frac{\mathbf{X_2}}{\begin{vmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{6} & \mathbf{1} \end{vmatrix}} = \frac{\mathbf{X_3}}{\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} \end{vmatrix}}$$

es decir

$$\frac{\mathbf{X_1}}{\mathbf{-27}} = \frac{\mathbf{X_2}}{\mathbf{-9}} = \frac{\mathbf{X_3}}{\mathbf{0}}$$

El punto **P** de intersección será el $\mathbf{P_\infty}(\mathbf{-27},\ \mathbf{-9},\ \mathbf{0})$, o lo que es lo mismo el $\mathbf{P_\infty}(\mathbf{3},\ \mathbf{1},\ \mathbf{0})$ y también el $\mathbf{P_\infty}(\mathbf{1},\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\ \mathbf{0})$.



13.2 Coordenadas proyectivas puntuales

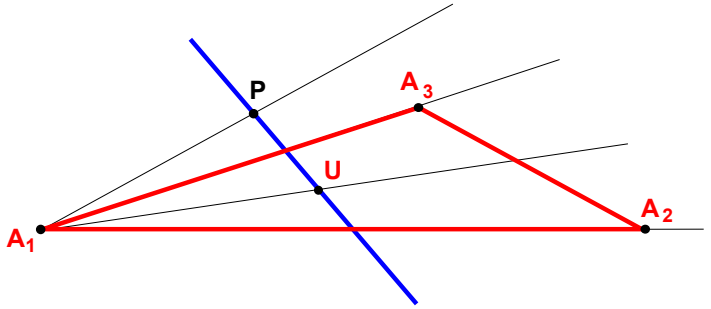
Consideremos en el plano proyectivo los cuatro puntos $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$, $\mathbf{U}$ no alineados de tres en tres. Los tres primeros nos definen lo que llamaremos el **triángulo fundamental**, y del punto $\mathbf{U}$ diremos que es el **punto unidad**.

Sea, ahora, $\mathbf{P}$, un punto genérico, es decir en principio no situado sobre los lados del triángulo fundamental, ni coincidente con el punto unidad, y consideremos las siguientes razones dobles, en los haces de vértices $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$, respectivamente

$$\boldsymbol{\lambda_1} = \mathbf{A_1}(\mathbf{A_2}\ \mathbf{A_3}\ \mathbf{U}\ \mathbf{P})$$

$$\boldsymbol{\lambda_2} = \mathbf{A_2}(\mathbf{A_3}\ \mathbf{A_1}\ \mathbf{U}\ \mathbf{P})$$

$$\boldsymbol{\lambda_3} = \mathbf{A_3}(\mathbf{A_1}\ \mathbf{A_2}\ \mathbf{U}\ \mathbf{P})$$



Llamaremos **coordenadas proyectivas absolutas** del punto $\mathbf{P}$, en el sistema de referencia $(\mathbf{A_1},\ \mathbf{A_2},\ \mathbf{A_3},\ \mathbf{U})$, a las $\boldsymbol{\lambda_i}$ $(\mathbf{i} = \mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3})$

Para las coordenadas que acabamos de definir se verifica la propiedad siguiente:

PROPOSICIÓN 1. Las coordenadas proyectivas absolutas de un punto están ligadas por la relación

$$\boldsymbol{\lambda_1} \cdot \boldsymbol{\lambda_2} \cdot \boldsymbol{\lambda_3} = \mathbf{1}$$

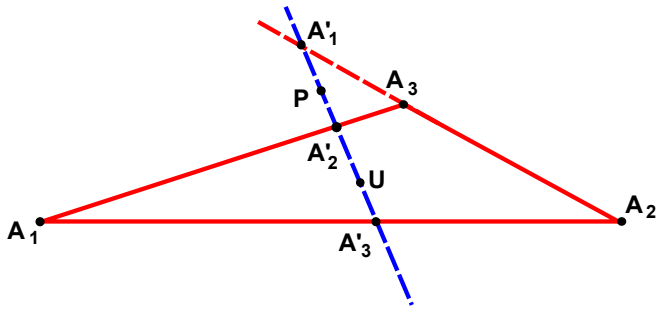
En efecto: Si cortamos las cuaternas de rectas

$$\boldsymbol{\lambda_1} = \mathbf{A_1}(\mathbf{A_2}\ \mathbf{A_3}\ \mathbf{U}\ \mathbf{P})$$

$$\boldsymbol{\lambda_2} = \mathbf{A_2}(\mathbf{A_3}\ \mathbf{A_1}\ \mathbf{U}\ \mathbf{P})$$

$$\boldsymbol{\lambda_3} = \mathbf{A_3}(\mathbf{A_1}\ \mathbf{A_2}\ \mathbf{U}\ \mathbf{P})$$

por la recta $\overline{\mathbf{PU}}$, y designamos por $\mathbf{A'_1}$, $\mathbf{A'_2}$, $\mathbf{A'_3}$ los puntos en que $\overline{\mathbf{PU}}$ corta a los lados del triángulo fundamental, respectivamente opuestos a $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$, según se muestra en la figura, tendremos:



$$\boldsymbol{\lambda_1} = (\mathbf{A'_3\ A'_2\ U\ P}) = (\mathbf{U\ P\ A'_3\ A'_2}) = \frac{(\mathbf{U\ P\ A'_3})}{(\mathbf{U\ P\ A'_2})}$$

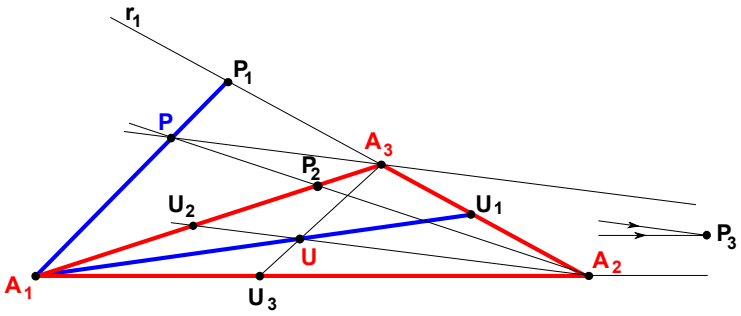
$$\boldsymbol{\lambda_2} = (\mathbf{A'_1\ A'_3\ U\ P}) = (\mathbf{U\ P\ A'_1\ A'_3}) = \frac{(\mathbf{U\ P\ A'_1})}{(\mathbf{U\ P\ A'_3})}$$

$$\boldsymbol{\lambda_3} = (\mathbf{A'_2\ A'_1\ U\ P}) = (\mathbf{U\ P\ A'_2\ A'_1}) = \frac{(\mathbf{U\ P\ A'_2})}{(\mathbf{U\ P\ A'_1})}$$

de las que, multiplicando, resulta

$$\boldsymbol{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3} = \frac{(\mathbf{U\ P\ A'_3})}{(\mathbf{U\ P\ A'_2})} \cdot \frac{(\mathbf{U\ P\ A'_1})}{(\mathbf{U\ P\ A'_3})} \cdot \frac{(\mathbf{U\ P\ A'_2})}{(\mathbf{U\ P\ A'_1})} = \mathbf{1}$$

Para el cálculo de las coordenadas proyectivas puntuales podemos proceder, además de como lo hemos hecho para establecer la proposición anterior, de la manera siguiente:



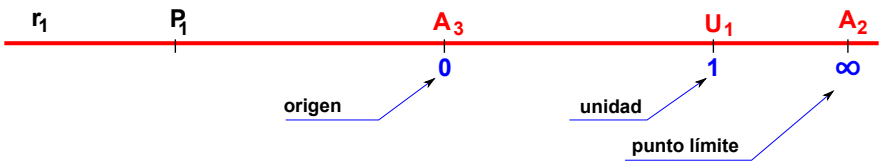
$$\boldsymbol{\lambda_1} = \mathbf{A_1}(\mathbf{A_2\ A_3\ U\ P}) = (\mathbf{A_2\ A_3\ U_1\ P_1})$$

$$\boldsymbol{\lambda_2} = \mathbf{A_2}(\mathbf{A_3\ A_1\ U\ P}) = (\mathbf{A_3\ A_1\ U_2\ P_2})$$

$$\boldsymbol{\lambda_3} = \mathbf{A_3}(\mathbf{A_1\ A_2\ U\ P}) = (\mathbf{A_1\ A_2\ U_3\ P_3})$$

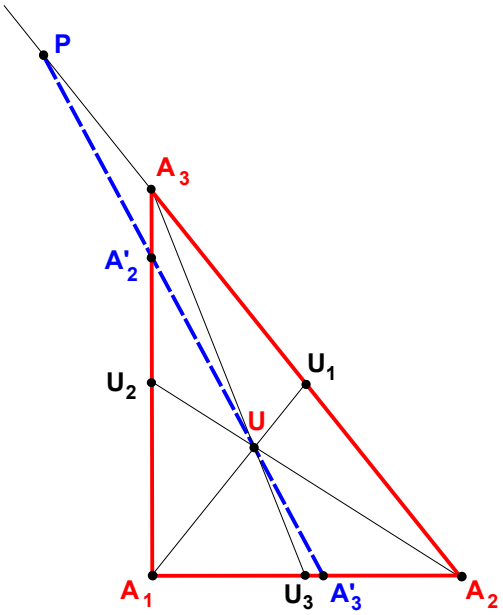
Observemos, entonces, que $\boldsymbol{\lambda}_1$, resulta ser la coordenada proyectiva del punto $\mathbf{P_1}$, proyección del $\mathbf{P}$ sobre la recta $\mathbf{r_1}$, determinada por los puntos $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$, en el sistema de referencia que tiene $\mathbf{A_2}$ como punto

límite, el $\mathbf{A_3}$ como origen y el $\mathbf{U_1}$ como unidad, tal como se indica en el esquema siguiente:



La interpretación para $\boldsymbol{\lambda_2}$ y $\boldsymbol{\lambda_3}$ es en todo análoga a la de $\boldsymbol{\lambda_1}$

Ejemplo 1. Consideremos el siguiente esquema:



Las coordenadas proyectivas puntuales del punto **P** serán las siguientes:

$$\boldsymbol{\lambda_1 = A_1(A_2\ A_3\ U\ P) = (A_3'\ A_2'\ U\ P) = \frac{(A_3'\ A_2'\ U)}{(A_3'\ A_2'\ P)} = \frac{\overline{A_3'U}}{\overline{A_2'U}} : \frac{\overline{A_3'P}}{\overline{A_2'P}} = -\frac{1}{3}}$$

$$\boldsymbol{\lambda_2 = A_2(A_3\ A_1\ U\ P) = (P\ A_3'\ U\ P) = \frac{(P\ A_3'\ U)}{(P\ A_3'\ P)} = \frac{\overline{PU}}{\overline{A_3'U}} : \frac{\overline{PP}}{\overline{A_3'P}} = \infty}$$

$$\boldsymbol{\lambda_3 = A_3(A_1\ A_2\ U\ P) = (A_2'\ P\ U\ P) = \frac{(A_2'\ P\ U)}{(A_2'\ P\ P)} = \frac{\overline{A_2'U}}{\overline{PU}} : \frac{\overline{A_2'P}}{\overline{PP}} = 0}$$

Si planteamos el producto de las $\boldsymbol{\lambda_i}$ $(\mathbf{i = 1,\ 2,\ 3})$, que debiera valer **1**, nos encontramos con lo siguiente:

$$\boldsymbol{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = -\frac{1}{3} \cdot \infty \cdot 0}$$

Este resultado está, en principio, indeterminado: Resolvemos la indeterminación como sigue:

$$\boldsymbol{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3} = \underbrace{\left(\frac{\overline{A'_3U}}{\overline{A'_2U}} : \frac{\overline{A'_3P}}{\overline{A'_2P}} \right)}_{\boldsymbol{\lambda_1 = -\frac{1}{3}}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\overline{PU}}{\overline{A'_3U}} : \frac{\overline{PP}}{\overline{A'_3P}} \right)}_{\boldsymbol{\lambda_2 = \infty}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\overline{A'_2U}}{\overline{PU}} \right) : \frac{\overline{A'_2P}}{\overline{PP}}}_{\boldsymbol{\lambda_3 = 0}} = \mathbf{1}$$

$$\underbrace{\underbrace{\frac{\overline{PU}}{\overline{PU}} \cdot \frac{\overline{A'_2U}}{\overline{A'_3U}} \cdot \frac{\overline{PP}}{\overline{PP}} \cdot \frac{\overline{A'_3P}}{\overline{A'_2P}}}_{\frac{\overline{A'_2U}}{A'_2P} \cdot \frac{\overline{A'_3P}}{\overline{A'_3U}} = \frac{-4,6}{6,9} \cdot \frac{14,8}{3,3} = -3}}_{\boldsymbol{\lambda_2 \cdot \lambda_3 = -3}}$$

Si hacemos, ahora

$$\boldsymbol{\lambda_1 = \frac{x_2}{x_3} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{x_3}{x_1} \quad , \quad \lambda_3 = \frac{x_1}{x_2}}$$

nos quedará definida una terna $(\mathbf{x_1},\ \mathbf{x_2},\ \mathbf{x_3})$ a menos de un factor no nulo, lo que nos permitirá establecer la definición siguiente:

Llamaremos **coordenadas proyectivas homogéneas** del punto **P**, en el sistema de referencia $(\mathbf{A_1},\ \mathbf{A_2},\ \mathbf{A_3},\ \mathbf{U})$, a las $\mathbf{x_i}$ $(\mathbf{i = 1,\ 2,\ 3})$

Ejemplo 2. Si en un determinado sistema de referencia $(\mathbf{A_1},\ \mathbf{A_2},\ \mathbf{A_3},\ \mathbf{U})$ el punto **P** tuviera como coordenadas proyectivas puntuales

$$\boldsymbol{\lambda_1 = 3 \quad , \quad \lambda_2 = \frac{2}{3} \quad , \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}}$$

sus coordenadas proyectivas homogéneas $(\mathbf{x_1},\ \mathbf{x_2},\ \mathbf{x_3})$ se obtendrían haciendo

$$\mathbf{3} = \frac{\mathbf{x_2}}{\mathbf{x_3}} \quad , \quad \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{x_3}}{\mathbf{x_1}} \quad , \quad \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{x_1}}{\mathbf{x_2}}$$

Una terna de valores que verificaría las igualdades anteriores sería la siguiente:

$$\mathbf{x_1 = \frac{3}{2} \quad , \quad x_2 = 3 \quad , \quad x_3 = 1\ ;}$$

también verificarían las siguientes:

$$(\mathbf{3},\ \mathbf{6},\ \mathbf{2}) \quad , \quad (\mathbf{-6},\ \mathbf{-12},\ \mathbf{-4}) \quad , \quad \cdots\cdots$$

Como podríamos elegir cualquiera de ellas, sería correcto decir que:

$$\left(\mathbf{\frac{3}{2}},\ \mathbf{3},\ \mathbf{1}\right) \quad \textbf{son las coordenadas proyectivas del punto P.}$$

Si el punto **P** coincide con uno de los puntos $\mathbf{A_i}$, la $\boldsymbol{\lambda_i}$ correspondiente es indeterminada. Por ejemplo, si es $\mathbf{P = A_1}$, $\boldsymbol{\lambda_1}$ no estará definida puesto que la recta $\overline{\mathbf{A_1A_1}}$ no está determinada; además serán $\boldsymbol{\lambda_2 = 0}$ y $\boldsymbol{\lambda_3 = \infty}$, con lo cual tendremos:

$$\mathbf{x_2 = 0} \quad , \quad \mathbf{x_3 = 0} \quad , \quad \mathbf{x_1 \neq 0}$$

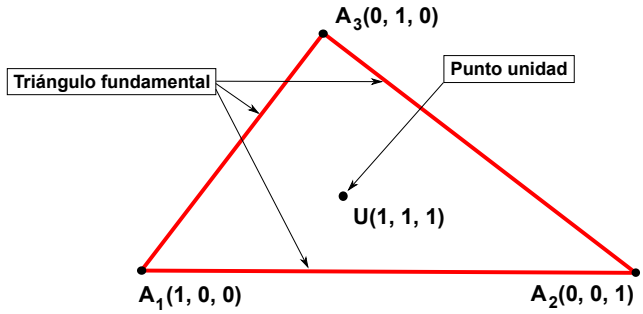
Así podremos tomar, para $\mathbf{A_1}$, las coordenadas $(\mathbf{1},\ \mathbf{0},\ \mathbf{0})$.

Procediendo en forma análoga tomaríamos para $\mathbf{A_2}$ las coordenadas $(\mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{0})$ y para $\mathbf{A_3}$ las $(\mathbf{0},\ \mathbf{0},\ \mathbf{1})$.

En el caso de ser **P=U**, resultará que $\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1}$ luego

$$\mathbf{x_1 = x_2 = x_3}$$

y en consecuencia podríamos asignar, al punto **U**, las coordenadas homogéneas $(\mathbf{1},\ \mathbf{1},\ \mathbf{1})$, lo cual justifica el haberle llamado **punto unidad**.



Así, a todo punto del plano proyectivo corresponde una terna $(\mathbf{x_1},\ \mathbf{x_2},\ \mathbf{x_3})$, definida a menos de un factor no nulo, distinta de la terna $(\mathbf{0},\ \mathbf{0},\ \mathbf{0})$; y recíprocamente, a toda la terna $(\mathbf{x_1},\ \mathbf{x_2},\ \mathbf{x_3})$, distinta de la $(\mathbf{0},\ \mathbf{0},\ \mathbf{0})$, corresponde un único punto determinado por las igualdades

$$\boldsymbol{\lambda_1} = \frac{\mathbf{x_2}}{\mathbf{x_3}} \quad , \quad \boldsymbol{\lambda_2} = \frac{\mathbf{x_3}}{\mathbf{x_1}} \quad , \quad \boldsymbol{\lambda_3} = \frac{\mathbf{x_1}}{\mathbf{x_2}}$$

y las

$$\boldsymbol{\lambda_1} = \mathbf{A_1(A_2\ A_3\ U\ P)} \quad , \quad \boldsymbol{\lambda_2} = \mathbf{A_2(A_3\ A_1\ U\ P)} \quad , \quad \boldsymbol{\lambda_3} = \mathbf{A_3(A_1\ A_2\ U\ P)}\ .$$

Observemos que, como resulta de las primeras igualdades, ternas que difieran por un factor constante no nulo representan el mismo punto.

Ejemplo 3. Consideremos un plano proyectivo en el que se ha definido un triángulo fundamental y un punto unidad. Dado un punto **P** de dicho plano, de coordenadas proyectivas puntuales $\left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}},\ \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}},\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$, para la determinación de sus coordenadas homogéneas procederíamos como sigue:

Puesto que

$$\boldsymbol{\lambda_1} = \frac{\mathbf{x_2}}{\mathbf{x_3}} \quad , \quad \boldsymbol{\lambda_2} = \frac{\mathbf{x_3}}{\mathbf{x_1}} \quad , \quad \boldsymbol{\lambda_3} = \frac{\mathbf{x_1}}{\mathbf{x_2}}$$

sustituyendo

$$\boldsymbol{\lambda_1} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}} \quad , \quad \boldsymbol{\lambda_2} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \quad , \quad \boldsymbol{\lambda_3} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

resultará el sistema

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{4}{3} = \dfrac{x_2}{x_3} \\ \\ \dfrac{3}{2} = \dfrac{x_3}{x_1} \\ \\ \dfrac{1}{2} = \dfrac{x_1}{x_2} \end{array}\right\}$$

es decir

$$\left.\begin{array}{rrr} & 3\cdot x_2 - 4\cdot x_3 = 0 \\ 3\cdot x_1 & - 2\cdot x_3 = 0 \\ 2\cdot x_1 - x_2 & = 0 \end{array}\right\}$$

cuya solución, a menos de un factor no nulo, será.

$$x_1 = 4 \quad , \quad x_2 = 8 \quad , \quad x_3 = 6$$

Más inmediato resultaría determinar las λ_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$, conocidas las coordenadas homogéneas $(x_1,\ x_2,\ x_3)$.

Vamos a ver, ahora, como de las anteriores razones dobles

$$\lambda_1 = A_1(A_2\ A_3\ U\ P)$$

$$\lambda_2 = A_2(A_3\ A_1\ U\ P)$$

$$\lambda_3 = A_3(A_1\ A_2\ U\ P)$$

deducimos la ecuación de uno cualquiera de los lados del triángulo fundamental.
Supongamos que se trata de $\overline{A_2A_3}$. Si P está alineado con A_2 y A_3, y es distinto de estos, estarán definidas λ_2 y λ_3, y se tendrá

$$\lambda_2 = \infty \quad , \quad \lambda_3 = 0$$

lo que obliga a que sea

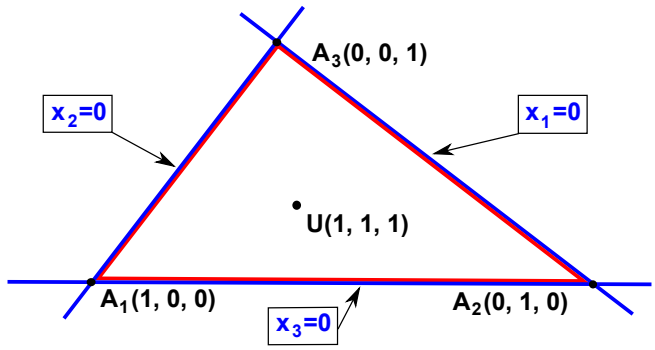
$$x_1 = 0$$

Puesto que A_2 y A_3 tienen su primera coordenada nula, resulta que todos los puntos de la recta $\overline{A_2A_3}$ satisfacen con sus coordenadas la ecuación

$$x_1 = 0$$

Recíprocamente, si el punto P tiene su primera coordenada $x_1 = 0$, al menos una de las otras dos no es nula. Si es $x_3 \neq 0$, entonces $\lambda_2 = \infty$, y por tanto la recta $\overline{A_2P}$ coincide con la $\overline{A_2A_3}$; es decir, P está alineado con A_2 y A_3. Si fuese $x_2 \neq 0$, entonces $\lambda_1 = 0$, y por tanto la recta $\overline{A_3P}$ coincide con la $\overline{A_3A_2}$; la conclusión es, por tanto, la misma.

El mismo razonamiento prueba que los lados del triángulo fundamental, opuestos a $\mathbf{A_2}$ y $\mathbf{A_3}$, tienen por ecuaciones $\mathbf{x_2 = 0}$ y $\mathbf{x_3 = 0}$ respectivamente.

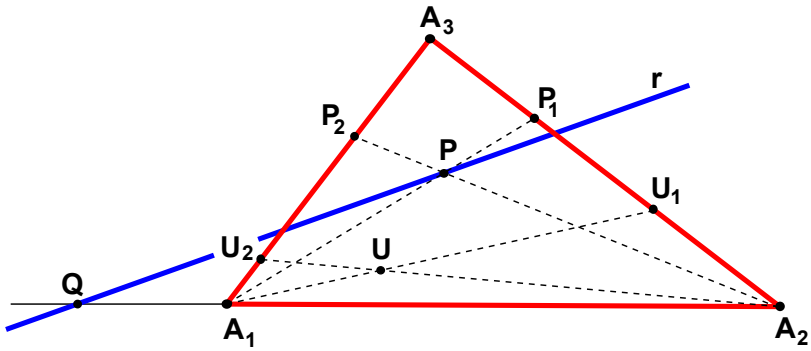


Consideremos, ahora, una recta cualquiera, $\mathbf{r}$, distinta de los lados del triángulo fundamental. En este caso, al menos dos de los vértices no pertenecen a ella; sean por ejemplo $\mathbf{A_1}$ y $\mathbf{A_2}$. Al proyectar, desde $\mathbf{A_1}$ y $\mathbf{A_2}$ los puntos de $\mathbf{r}$, queda definida una proyectividad entre los haces de vértices $\mathbf{A_1}$ y $\mathbf{A_2}$, es decir, una biyección que a toda cuaterna de rectas de un haz le hace corresponder otra cuaterna de la misma razón doble, igual a la razón doble de la sección común, sobre $\mathbf{r}$, de ambas.

La proyectividad así definida quedará determinada analíticamente por una ecuación bilineal en $\boldsymbol{\lambda_1}$, $\boldsymbol{\lambda_2}$. Basta observar que, en efecto, al cortar el haz de vértice $\mathbf{A_1}$ por la recta $\overline{\mathbf{A_2A_3}}$ resulta que:

$$\boldsymbol{\lambda_1} = (\mathbf{A_2\ A_3\ U_1\ P_1})$$

siendo $\mathbf{U_1}$, $\mathbf{P_1}$ las intersecciones de las rectas $\overline{\mathbf{A_1U}}$, $\overline{\mathbf{A_1P}}$ con $\overline{\mathbf{A_2A_3}}$, luego $\boldsymbol{\lambda_1}$ es la coordenada proyectiva de $\mathbf{P_1}$ en el sistema de puntos límite $\mathbf{A_2}$, origen $\mathbf{A_3}$ y unidad $\mathbf{U_1}$.



Tiene un significado análogo $\boldsymbol{\lambda_2} = (\mathbf{A_3\ A_1\ U_2\ P_2})$.

Además, la proyectividad entre los haces equivale a la proyectividad entre las series sección por los lados opuestos del triángulo fundamental; es decir, tiene una ecuación de la forma:

$$\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\lambda_1}\cdot\boldsymbol{\lambda_2} + \mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\lambda_1} + \mathbf{c}\cdot\boldsymbol{\lambda_2} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$$

en la que se deben corresponder $\boldsymbol{\lambda_1 = \infty}$ y $\boldsymbol{\lambda_2 = 0}$, puesto que la recta $\overline{\mathbf{A_1A_2}}$, que desde $\mathbf{A_1}$ y $\mathbf{A_2}$ proyecta el punto **Q**, es doble, lo que significa que la proyectividad es una perspectividad. Se verifica que, en la ecuación anterior

$$(\boldsymbol{\lambda_1 = \infty} \text{ y } \boldsymbol{\lambda_2 = 0}) \implies \mathbf{b = 0}\ .$$

Así resulta que, dicha ecuación se convierte, utilizando ya coordenadas homogéneas, en la siguiente:

$$\mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{x_2}}{\mathbf{x_3}} \cdot \frac{\mathbf{x_3}}{\mathbf{x_1}} + \mathbf{c} \cdot \frac{\mathbf{x_3}}{\mathbf{x_1}} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$$

que reducida a la forma entera se expresará así:

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{x_2} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{x_3} = \mathbf{0}$$

ecuación, ésta, **de la recta r en coordenadas homogéneas.**

Recíprocamente, dada una ecuación lineal, tal como la anterior, y supuesto $\mathbf{d \neq 0}$, resultará, al dividir por $\mathbf{x_1}$, una ecuación como la

$$\mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{x_2}}{\mathbf{x_1}} + \mathbf{c} \cdot \frac{\mathbf{x_3}}{\mathbf{x_1}} + \mathbf{d} = \mathbf{0}\ ,$$

para la que se nos pueden presentar dos casos:

1.- a = 0 ; deducimos entonces que $\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\lambda_2} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$, es decir $\boldsymbol{\lambda_2} = \dfrac{-\mathbf{d}}{\mathbf{c}}$; se tratará, por tanto, de una recta que pasa por $\mathbf{A_2}$, cuyos puntos tienen coordenada proyectiva constante e igual a $\dfrac{-\mathbf{d}}{\mathbf{c}}$.

2.- a $\neq$ 0 ; resultará entonces, a través de la ecuación

$$\mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{x_2}}{\mathbf{x_3}} \cdot \frac{\mathbf{x_3}}{\mathbf{x_1}} + \mathbf{c} \cdot \frac{\mathbf{x_3}}{\mathbf{x_1}} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$$

una ecuación tal como la siguiente

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\lambda_1} \cdot \boldsymbol{\lambda_2} + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\lambda_1} + \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\lambda_2} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$$

con **b=0**, la cual representa una proyectividad entre los haces de puntos base $\mathbf{A_1}$ y $\mathbf{A_2}$, en la que la recta $\overline{\mathbf{A_1A_2}}$ es doble.

Los puntos comunes a rectas homólogas de los haces estarán sobre el eje perspectivo de los dos haces, eje cuya representación analítica es la ecuación

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{x_2} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{x_3} = \mathbf{0}\ .$$

En forma más simétrica podemos escribir la **ecuación de una recta** como sigue:

$$\mathbf{a_1} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{a_2} \cdot \mathbf{x_2} + \mathbf{a_3} \cdot \mathbf{x_3} = \mathbf{0}\ .$$

donde observamos que los lados del triángulo fundamental, cuyas ecuaciones habíamos determinado directamente, entran en dicha ecuación anulando dos de las $\mathbf{a_i}$.

De una tal recta, expresada por una ecuación lineal, diremos que está expresada en su **forma general** o **implícita.**

Si la recta: $\mathbf{a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 = 0}$, pasa por los dos puntos distintos $(\mathbf{x'_1},\ \mathbf{x'_2},\ \mathbf{x'_3})$ y $(\mathbf{x''_1},\ \mathbf{x''_2},\ \mathbf{x''_3})$, al escribir junto a la

$$\mathbf{a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 = 0}\ ,$$

las dos ecuaciones que expresan el contener dichos puntos

$$\mathbf{a_1 \cdot x'_1 + a_2 \cdot x'_2 + a_3 \cdot x'_3 = 0}$$

$$\mathbf{a_1 \cdot x''_1 + a_2 \cdot x''_2 + a_3 \cdot x''_3 = 0}$$

obtenemos un sistema homogéneo en $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$, cuya compatibilidad equivale a la condición

$$\begin{vmatrix} \mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & \mathbf{x_3} \\ \mathbf{x'_1} & \mathbf{x'_2} & \mathbf{x'_3} \\ \mathbf{x''_1} & \mathbf{x''_2} & \mathbf{x''_3} \end{vmatrix} = 0\ ,$$

que es la **ecuación de la recta** que pasa por dichos puntos.

Observemos que al ser dichos puntos distintos, la ecuación anterior equivale a las siguientes **ecuaciones paramétricas**.

$$\mathbf{x_1 = \lambda \cdot x'_1 + \mu \cdot x''_1}$$

$$\mathbf{x_2 = \lambda \cdot x'_2 + \mu \cdot x''_2}$$

$$\mathbf{x_3 = \lambda \cdot x'_3 + \mu \cdot x''_3}$$

Ejemplo 4. Fijemos un sistema de referencia cualquiera, $(\mathbf{A_1},\ \mathbf{A_2},\ \mathbf{A_3},\ \mathbf{U})$. Utilizando coordenadas homogéneas, sean $\mathbf{P}(-\mathbf{3},\ \mathbf{2},\ \mathbf{1})$ y $\mathbf{Q}(\mathbf{4},\ \mathbf{2},\ \mathbf{2})$ dos puntos del plano proyectivo dado.

La ecuación de la recta **r** que pasa por **P** y **Q**, será, en su **forma general** o **implícita**

$$\begin{vmatrix} \mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & \mathbf{x_3} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{vmatrix} = 0$$

es decir

$$\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{vmatrix} \cdot \mathbf{x_1} - \begin{vmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} \end{vmatrix} \cdot \mathbf{x_2} + \begin{vmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} \end{vmatrix} \cdot \mathbf{x_3} = \mathbf{0}$$

o sea

$$\mathbf{2 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 - 14 \cdot x_3 = 0}$$

Por otra parte, las **ecuaciones paramétricas** de **r** serán:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -3\cdot\lambda + 4\cdot\mu \\ x_2 &= 2\cdot\lambda + 2\cdot\mu \\ x_3 &= \lambda + 2\cdot\mu \end{aligned}\right\}$$

Lección 14.- COORDENADAS TANGENCIALES

14.1 Coordenadas tangenciales
14.2 Cambio de coordenadas proyectivas

14.1 Coordenadas tangenciales

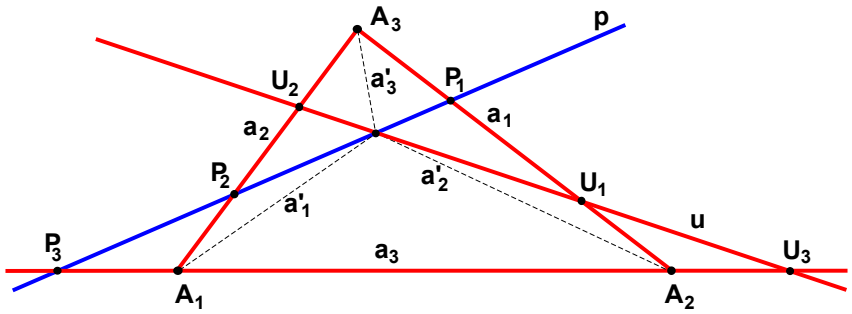
Consideremos cuatro rectas: $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$ $\mathbf{u}$, de tres en tres independientes.
Las tres primeras determinan un triángulo de vértices $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$, respectivamente opuestos a $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$.
Sea $\mathbf{p}$ una recta, distinta de las $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$, lo que nos define las siguientes razones dobles:

$$\boldsymbol{\mu_1} = \mathbf{a_1}(\mathbf{a_2}\ \mathbf{a_3}\ \mathbf{u},\ \mathbf{p})$$

$$\boldsymbol{\mu_2} = \mathbf{a_2}(\mathbf{a_3}\ \mathbf{a_1}\ \mathbf{u},\ \mathbf{p})$$

$$\boldsymbol{\mu_3} = \mathbf{a_3}(\mathbf{a_1}\ \mathbf{a_2}\ \mathbf{u},\ \mathbf{p})$$

en las que $\mathbf{a_1}(\mathbf{a_2}\ \mathbf{a_3}\ \mathbf{u}\ \mathbf{p})$ designa la cuaterna de puntos sección, por la recta $\mathbf{a_1}$, de las rectas $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{p}$.



Llamaremos **coordenadas proyectivas tangenciales** de la recta $\mathbf{p}$, respecto de la figura fundamental $(\mathbf{a_1},\ \mathbf{a_2},\ \mathbf{a_3},\ \mathbf{u})$, a las $\boldsymbol{\mu_i}$ $(\mathbf{i} = \mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3})$.
Nos podemos apoyar en la figura anterior para razonar como sigue. Por ejemplo, $\boldsymbol{\mu_1}$, admite las siguientes expresiones:

$$\boldsymbol{\mu_1} = \mathbf{a_1}(\mathbf{a_2}\ \mathbf{a_3}\ \mathbf{u}\ \mathbf{p}) = (\mathbf{A_3}\ \mathbf{A_2}\ \mathbf{U_1}\ \mathbf{P_1}) = \mathbf{a_1}(\mathbf{a'_2}\ \mathbf{a'_3}\ \mathbf{u}\ \mathbf{p}) = (\mathbf{a'_2}\ \mathbf{a'_3}\ \mathbf{u}\ \mathbf{p})$$

que podemos escribir, simplificando, como sigue:

$$\boldsymbol{\mu_1} = (\mathbf{a'_2}\ \mathbf{a'_3}\ \mathbf{u}\ \mathbf{p}) = \frac{(\mathbf{a'_2}\ \mathbf{a_3}\ \mathbf{u})}{(\mathbf{a'_2}\ \mathbf{a'_3}\ \mathbf{p})}\ .$$

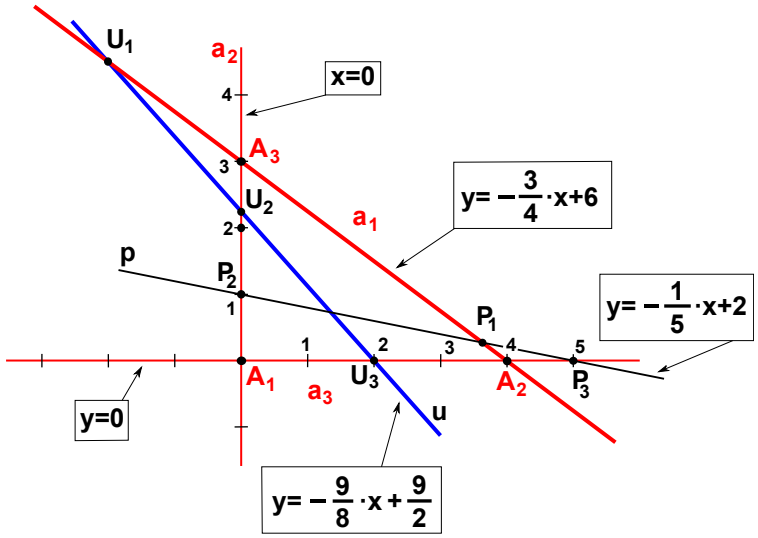
En forma análoga se procedería con $\boldsymbol{\mu_2}$ y $\boldsymbol{\mu_3}$:

$$\boldsymbol{\mu_2} = (\mathbf{a'_3}\ \mathbf{a'_2}\ \mathbf{u}\ \mathbf{p}) = \frac{(\mathbf{a'_3}\ \mathbf{a'_2}\ \mathbf{u})}{(\mathbf{a'_3}\ \mathbf{a'_2}\ \mathbf{p})} \quad , \quad \boldsymbol{\mu_3} = (\mathbf{a'_1}\ \mathbf{a'_2}\ \mathbf{u}\ \mathbf{p}) = \frac{(\mathbf{a'_1}\ \mathbf{a'_2}\ \mathbf{u})}{(\mathbf{a'_1}\ \mathbf{a'_2}\ \mathbf{p})}\ .$$

Ejemplo 1. Tanto la figura fundamental , $(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}, \mathbf{u})$, como la recta $\mathbf{p}$ están representadas en la figura siguiente, sobre la que podemos medir los segmentos que siguen:

$$\begin{array}{lll} \overline{\mathbf{A_2U_1}} = 7,50 & , & \overline{\mathbf{A_3U_2}} = -0,75 \quad , \quad \overline{\mathbf{A_1U_3}} = 2,00 \\ \overline{\mathbf{A_3U_1}} = 2,50 & , & \overline{\mathbf{A_1U_2}} = 2,25 \quad , \quad \overline{\mathbf{A_2U_3}} = -2,00 \\ \overline{\mathbf{A_3P_1}} = -4,55 & , & \overline{\mathbf{A_1P_2}} = 1,00 \quad , \quad \overline{\mathbf{A_2P_3}} = 1,00 \\ \overline{\mathbf{A_2P_1}} = 0,45 & , & \overline{\mathbf{A_3P_2}} = -2,00 \quad , \quad \overline{\mathbf{A_1P_3}} = 5,00 \end{array}$$

Podemos, entonces, calcular directamente los valores de las coordenadas proyectivas tangenciales de la recta $\mathbf{p}$.



$$\boldsymbol{\mu_1} = \mathbf{a_1}(\mathbf{a_2}\ \mathbf{a_3}\ \mathbf{u}\ \mathbf{p}) = (\mathbf{A_3}\ \mathbf{A_2}\ \mathbf{U_1}\ \mathbf{P_1}) = \frac{\overline{\mathbf{A_3U_1}}}{\overline{\mathbf{A_2U_1}}} \cdot \frac{\overline{\mathbf{A_2P_1}}}{\overline{\mathbf{A_3P_1}}} = \frac{2,5}{7,5} \cdot \frac{0,45}{-4,55} = -0,033$$

$$\boldsymbol{\mu_2} = \mathbf{a_2}(\mathbf{a_3}\ \mathbf{a_1}\ \mathbf{u}\ \mathbf{p}) = (\mathbf{A_1}\ \mathbf{A_3}\ \mathbf{U_2}\ \mathbf{P_2}) = \frac{\overline{\mathbf{A_1U_2}}}{\overline{\mathbf{A_3U_2}}} \cdot \frac{\overline{\mathbf{A_3P_2}}}{\overline{\mathbf{A_1P_2}}} = \frac{2,25}{-0,75} \cdot \frac{-2,00}{1,00} = -6,000$$

$$\boldsymbol{\mu_3} = \mathbf{a_3}(\mathbf{a_1}\ \mathbf{a_2}\ \mathbf{u}\ \mathbf{p}) = (\mathbf{A_2}\ \mathbf{A_1}\ \mathbf{U_3}\ \mathbf{P_3}) = \frac{\overline{\mathbf{A_2U_3}}}{\overline{\mathbf{A_1U_3}}} \cdot \frac{\overline{\mathbf{A_1P_3}}}{\overline{\mathbf{A_2P_3}}} = \frac{-2,00}{2,00} \cdot \frac{5,00}{1,00} = -5,000$$

PROPOSICIÓN 1. Las coordenadas proyectivas tangenciales están ligadas por la relación:

$$\boldsymbol{\mu_1} \cdot \boldsymbol{\mu_2} \cdot \boldsymbol{\mu_3} = 1$$

En efecto: Si consideramos el punto de intersección de las rectas $\mathbf{u}$ y $\mathbf{p}$, y las rectas $\mathbf{a'_1}$, $\mathbf{a'_2}$, $\mathbf{a'_3}$, que desde él proyectan los puntos $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$, resulta.

$$\boldsymbol{\mu_1} = (\mathbf{a'_3}\ \mathbf{a'_2}\ \mathbf{u}\ \mathbf{p}) = (\mathbf{u}\ \mathbf{p}\ \mathbf{a'_3}\ \mathbf{a'_2}) = \frac{(\mathbf{u}\ \mathbf{p}\ \mathbf{a'_3})}{(\mathbf{u}\ \mathbf{p}\ \mathbf{a'_2})}$$

$$\boldsymbol{\mu_2} = (\mathbf{a'_1}\ \mathbf{a'_3}\ \mathbf{u}\ \mathbf{p}) = (\mathbf{u}\ \mathbf{p}\ \mathbf{a'_1}\ \mathbf{a'_3}) = \frac{(\mathbf{u}\ \mathbf{p}\ \mathbf{a'_1})}{(\mathbf{u}\ \mathbf{p}\ \mathbf{a'_3})}$$

$$\boldsymbol{\mu_3} = (\mathbf{a'_2}\ \mathbf{a'_1}\ \mathbf{u}\ \mathbf{p}) = (\mathbf{u}\ \mathbf{p}\ \mathbf{a'_2}\ \mathbf{a'_1}) = \frac{(\mathbf{u}\ \mathbf{p}\ \mathbf{a'_2})}{(\mathbf{u}\ \mathbf{p}\ \mathbf{a'_1})}$$

Multiplicando miembro a miembro estas tres igualdades resulta la relación

$$\boldsymbol{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3 = 1}$$

Ejemplo 2. En el ejemplo anterior calculamos las coordenadas proyectivas tangenciales de la recta **p**, respecto de la figura fundamental $(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}\ \mathbf{u})$, cuyos valores fueron.

$$\boldsymbol{\mu_1 = -0,033} \quad , \quad \boldsymbol{\mu_2 = 6,000} \quad , \quad \boldsymbol{\mu_3 = -5,000}$$

se verifica, efectivamente, que

$$\boldsymbol{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3 = (-0,033) \cdot (6,000) \cdot (-5,000) = 1}$$

(Cuando los valores se obtienen "midiendo" segmentos, pueden aparecer ligeras inexactitudes en los resultados, que no contradicen lo establecido en la teoría).

Si hacemos, ahora,

$$\boldsymbol{\mu_1 = \frac{v_2}{v_3}} \quad , \quad \boldsymbol{\mu_2 = \frac{v_3}{v_1}} \quad , \quad \boldsymbol{\mu_3 = \frac{v_1}{v_2}}$$

nos quedará definida una terna $(\mathbf{v_1},\ \mathbf{v_2},\ \mathbf{v_3})$, a menos de un factor no nulo, lo que nos permitirá establecer la definición siguiente:

Llamaremos **coordenadas tangenciales homogéneas** de la recta **p**, respecto de la figura fundamental $(\mathbf{a_1},\ \mathbf{a_2},\ \mathbf{a_3}, \mathbf{u})$ a las $\mathbf{v_i} \quad (\mathbf{i = 1,2,3})$.

Ejemplo 3. Si en un determinado sistema de referencia $(\mathbf{a_1},\ \mathbf{a_2},\ \mathbf{a_3}, \mathbf{u})$ la recta **p** tuviese como coordenadas proyectivas tangenciales

$$\boldsymbol{\mu_1 = 3} \quad , \quad \boldsymbol{\mu_2 = \frac{2}{3}} \quad , \quad \boldsymbol{\mu_3 = \frac{1}{2}}$$

sus coordenadas tangenciales homogéneas $(\mathbf{v_1},\ \mathbf{v_2},\ \mathbf{v_3})$, se obtendrían haciendo

$$\boldsymbol{3 = \frac{v_2}{v_3}} \quad , \quad \boldsymbol{\frac{2}{3} = \frac{v_3}{v_1}} \quad , \quad \boldsymbol{\frac{1}{2} = \frac{v_1}{v_2}}$$

Una terna de valores que verificaría las igualdades anteriores sería la siguiente:

$$\boldsymbol{v_1 = \frac{3}{2}} \quad , \quad \boldsymbol{v_2 = 3} \quad , \quad \boldsymbol{v_3 = 1}\ ;$$

también verificarían las siguientes:

$$(\mathbf{3},\ \mathbf{6},\ \mathbf{2}) \quad , \quad (\mathbf{-6},\ \mathbf{-12},\ \mathbf{-4}) \quad , \cdots\cdots$$

Como podríamos elegir cualquiera de ellas, sería correcto decir que: $\left(\mathbf{\frac{3}{2}},\ \mathbf{3},\ \mathbf{1}\right)$ **son las coordenadas tangenciales homogéneas de la recta p**.

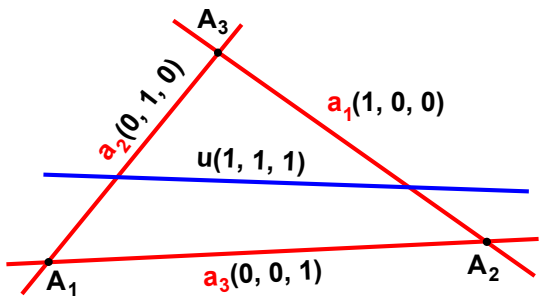
Cuando la recta **p** coincida con la $\mathbf{a_1}$, $\boldsymbol{\mu_1}$ quedará indeterminada, siendo además $\boldsymbol{\mu_2 = 0}$, $\boldsymbol{\mu_3 = \infty}$, es decir

$$\boldsymbol{v_2 = v_3 = 0} \quad , \quad \boldsymbol{v_1 \neq 0}\ ;$$

en consecuencia, sus coordenadas tangenciales homogéneas serán: $(\mathbf{1},\ \mathbf{0},\ \mathbf{0})$.

En forma análoga, a las rectas $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$, corresponderán, como coordenadas tangenciales homogéneas $(\mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{0})$, $(\mathbf{0},\ \mathbf{0},\ \mathbf{1})$, respectivamente.

Si consideramos $\mathbf{p} = \mathbf{u}$, obtendremos: $\boldsymbol{\mu_1} = \boldsymbol{\mu_2} = \boldsymbol{\mu_3} = \mathbf{1}$; por tanto las coordenadas tangenciales de $\mathbf{u}$ serán $(\mathbf{1},\ \mathbf{1},\ \mathbf{1})$.



Si $\mathbf{p}$ es una recta genérica del haz de vértice $\mathbf{A_1}$, se tendrá

$$\boldsymbol{\mu_2} = (\mathbf{A_1}\ \mathbf{A_3}\ \mathbf{U_2}\ \mathbf{A_1}) = \boldsymbol{\infty}$$

$$\boldsymbol{\mu_3} = (\mathbf{A_2}\ \mathbf{A_1}\ \mathbf{U_3}\ \mathbf{A_1}) = \mathbf{0}$$

y en consecuencia

$$\mathbf{v_1} = \mathbf{0}\ ;$$

y recíprocamente, si $\mathbf{v_1} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{v_2} \neq \mathbf{0} \neq \mathbf{v_3}$, será

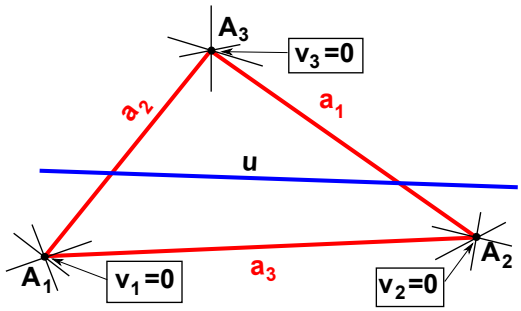
$$\boldsymbol{\mu_2} = \boldsymbol{\infty}$$

$$\boldsymbol{\mu_3} = \mathbf{0}\ ,$$

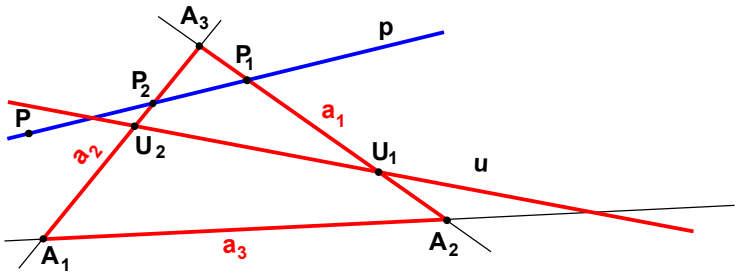
y la recta pasará por $\mathbf{A_1}$.

Por tanto: $\mathbf{v_1} = \mathbf{0}$ **es la condición necesaria y suficiente a satisfacer por las coordenadas tangenciales de toda recta que pase por** $\mathbf{A_1}$; es decir: $\mathbf{v_1} = \mathbf{0}$ es la ecuación tangencial del punto $\mathbf{A_1}$.

Análogamente: $\mathbf{v_2} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v_3} = \mathbf{0}$, son, respectivamente, las ecuaciones tangenciales de los puntos $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$.



Sea, ahora, **P** un punto no coincidente con ningún vértice del triángulo fundamental, y consideremos las secciones del haz de base **P** por dos lados del triángulo fundamental que no pasan por **P**, sean los $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$.



Las rectas que pasan por **P** determinan una proyectividad entre los puntos de $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, en la que dos puntos $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$ son homólogos si están en una recta **p** del haz.

Si determinamos los puntos de $\mathbf{a_1}$ por la coordenada proyectiva $\boldsymbol{\mu_1} = (\mathbf{A_3\ A_2\ U_1\ P_1})$, y los de $\mathbf{a_2}$ por la $\boldsymbol{\mu_2} = (\mathbf{A_1\ A_3\ U_2\ P_2})$, y puesto que el punto $\mathbf{A_3}$ es doble, y tiene en $\mathbf{a_1}$ la coordenada $\boldsymbol{\mu_1} = \boldsymbol{\infty}$, y en $\mathbf{a_2}$ la coordenadas $\boldsymbol{\mu_1} = \mathbf{0}$, la proyectividad queda representada por una ecuación de la forma

$$\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\mu_1}\cdot\boldsymbol{\mu_2} + \mathbf{c}\cdot\boldsymbol{\mu_2} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$$

Teniendo en cuenta que

$$\boldsymbol{\mu_1} = \frac{\mathbf{v_2}}{\mathbf{v_3}} \quad , \quad \boldsymbol{\mu_2} = \frac{\mathbf{v_3}}{\mathbf{v_1}} \quad , \quad \boldsymbol{\mu_3} = \frac{\mathbf{v_1}}{\mathbf{v_2}}$$

la ecuación anterior se puede escribir

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{v_2} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{v_3} + \mathbf{d}\cdot\mathbf{v_1} = \mathbf{0}$$

En forma más simétrica podemos escribir la ecuación tangencial del punto **P** como sigue:

$$\mathbf{b_1}\cdot\mathbf{v_1} + \mathbf{b_2}\cdot\mathbf{v_2} + \mathbf{b_3}\cdot\mathbf{v_3} = \mathbf{0} \ ;$$

en definitiva, anulando una forma lineal en las coordenadas tangenciales $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$. **Observemos que como caso particular resultan las ecuaciones de los vértices del triángulo fundamental**.

Recíprocamente, si suponemos $\mathbf{d} = \mathbf{b_1} \neq \mathbf{0}$, la ecuación tangencial, del punto **P**, se escribirá en la forma

$$\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\mu_1}\cdot\boldsymbol{\mu_2} + \mathbf{c}\cdot\boldsymbol{\mu_2} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$$

lo que pone de manifiesto que las rectas que satisfacen a la ecuación

$$\mathbf{b_1}\cdot\mathbf{v_1} + \mathbf{b_2}\cdot\mathbf{v_2} + \mathbf{b_3}\cdot\mathbf{v_3} = \mathbf{0}$$

cortan sobre las rectas $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ dos series perspectivas, y por tanto pasan todas por el centro **P** de esta perspectividad.

De un tal punto, expresado por una ecuación lineal, diremos que está expresado en su **forma general** o **implícita**.

En lugar de la anterior representación, implícita, podemos utilizar la paramétrica, que escribiríamos a partir de las coordenadas tangenciales de dos rectas por **P**: $(\mathbf{v}'_1,\ \mathbf{v}'_2,\ \mathbf{v}'_3)$, $(\mathbf{v}''_1,\ \mathbf{v}''_2,\ \mathbf{v}''_3)$:

$$\mathbf{v_1} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{v}'_1 + \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{v}''_1$$

$$\mathbf{v_2} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{v}'_2 + \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{v}''_2$$

$$\mathbf{v_3} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{v}'_3 + \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{v}''_3$$

Ejemplo 4. Fijemos un sistema de referencia cualquiera, $(\mathbf{a_1},\ \mathbf{a_2},\ \mathbf{a_3},\ \mathbf{u})$. Utilizando coordenadas homogéneas, sean $\mathbf{p}(-\mathbf{3},\ \mathbf{2},\ \mathbf{1})$ y $\mathbf{q}(\mathbf{4},\ \mathbf{2},\ \mathbf{2})$ dos rectas del plano proyectivo dado. La ecuación del punto **P**, intersección de **p** y **q**, será, en su **forma general** o **implícita**.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \mathbf{v_3} \\ -\mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

es decir

$$\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{vmatrix} \cdot \mathbf{v_1} - \begin{vmatrix} -\mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} \end{vmatrix} \cdot \mathbf{v_2} + \begin{vmatrix} -\mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} \end{vmatrix} \cdot \mathbf{v_3} = \mathbf{0}$$

o sea

$$\mathbf{2} \cdot \mathbf{v_1} + \mathbf{10} \cdot \mathbf{v_2} - \mathbf{14} \cdot \mathbf{v_3} = \mathbf{0}$$

Por otra parte, las ecuaciones paramétricas de **P** serán

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{v_1} &= -\mathbf{3} \cdot \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{4} \cdot \boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{v_2} &= \mathbf{2} \cdot \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{2} \cdot \boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{v_3} &= \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{2} \cdot \boldsymbol{\mu} \end{aligned}\right\}$$

Observemos, ahora, que desde un punto de vista algebraico no existe diferencia entre la representación de **rectas / puntos** en coordenadas puntuales y la de **puntos / rectas** en coordenadas tangenciales.
Se trata, en definitiva, de la expresión analítica de la **ley de la dualidad del plano proyectivo**, que dice:

> **A toda proposición, en cuyo enunciado sólo intervengan puntos y rectas, corresponde otra que se deduce de ella cambiando puntos por rectas, rectas por puntos, punto intersección de dos rectas por recta que pasa por dos puntos, y recta que pasa por dos puntos por punto común a dos rectas.**

14.2 Cambio de coordenadas proyectivas

Por la ley de la dualidad en el plano proyectivo, bastará desarrollar el cambio de coordenadas puntuales. Así, consideremos los dos sistemas fundamentales.

$$(\mathbf{A_1},\ \mathbf{A_2},\ \mathbf{A_3},\ \mathbf{U}) \quad , \quad (\overline{\mathbf{A_1}},\ \overline{\mathbf{A_2}},\ \overline{\mathbf{A_3}},\ \overline{\mathbf{U}})$$

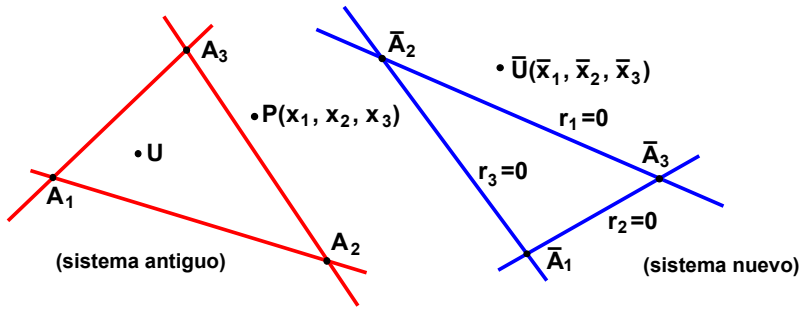
a los que ordinariamente llamaremos sistema **antiguo** y **nuevo**, respectivamente.
Supondremos determinado el sistema nuevo por las ecuaciones, en el sistema antiguo, de los lados del triángulo fundamental.

$$\overline{\mathbf{A_2}}\ \overline{\mathbf{A_3}} \ : \ \mathbf{r_1} \equiv \mathbf{a_{11}} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{a_{12}} \cdot \mathbf{x_2} + \mathbf{a_{13}} \cdot \mathbf{x_3} = \mathbf{0}$$

$$\overline{\mathbf{A_3}}\ \overline{\mathbf{A_1}} \ : \ \mathbf{r_2} \equiv \mathbf{a_{21}} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{a_{22}} \cdot \mathbf{x_2} + \mathbf{a_{23}} \cdot \mathbf{x_3} = \mathbf{0}$$

$$\overline{\mathbf{A_1}}\ \overline{\mathbf{A_2}} \ : \ \mathbf{r_3} \equiv \mathbf{a_{31}} \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{a_{32}} \cdot \mathbf{x_2} + \mathbf{a_{33}} \cdot \mathbf{x_3} = \mathbf{0}$$

y por las coordenadas $(\overline{\mathbf{x_1}},\ \overline{\mathbf{x_2}},\ \overline{\mathbf{x_3}})$ del punto $\overline{\mathbf{U}}$.



A todo punto **P**, le corresponden, por definición, en el sistema nuevo, las coordenadas proyectivas absolutas:

$$\boldsymbol{\lambda}'_1 = \overline{\mathbf{A_1}}\ (\overline{\mathbf{A_2}}\ \overline{\mathbf{A_3}}\ \overline{\mathbf{U}}\ \mathbf{P})$$

$$\boldsymbol{\lambda}'_2 = \overline{\mathbf{A_2}}\ (\overline{\mathbf{A_3}}\ \overline{\mathbf{A_1}}\ \overline{\mathbf{U}}\ \mathbf{P})$$

$$\boldsymbol{\lambda}'_3 = \overline{\mathbf{A_3}}\ (\overline{\mathbf{A_1}}\ \overline{\mathbf{A_2}}\ \overline{\mathbf{U}}\ \mathbf{P})$$

Para determinar $\boldsymbol{\lambda}'_1$ observemos que el haz de base $\overline{\mathbf{A_1}}$ se representa en el sistema antiguo por la ecuación

$$\mathbf{r_2} + \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r_3} = \mathbf{0}$$

siendo $\boldsymbol{\mu}$ un parámetro proyectivo de las rectas de dicho haz; la razón doble de cuatro rectas vendrá dada por la razón doble formal de las $\boldsymbol{\mu_i}$ correspondientes.
Así, resultará que

$$\boldsymbol{\lambda}'_1 = \left(\infty, \mathbf{0}, \frac{-\overline{\mathbf{r_2}}}{\overline{\mathbf{r_3}}}, \frac{-\mathbf{r_2}}{\mathbf{r_3}}\right) = \frac{\mathbf{r_2}}{\overline{\mathbf{r_2}}} : \frac{\mathbf{r_3}}{\overline{\mathbf{r_3}}}$$

Habiendo designado por $\overline{r_i}$, r_i los valores que toma la forma

$$a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + a_{i3} \cdot x_3$$

en los puntos $\overline{U}$, P, respectivamente Análogamente se deduce que:

$$\lambda'_2 = \frac{r_3}{\overline{r_3}} : \frac{r_1}{\overline{r_1}}$$

$$\lambda'_3 = \frac{r_1}{\overline{r_1}} : \frac{r_2}{\overline{r_2}}$$

y como

$$\lambda'_1 = \frac{x'_2}{x'_3} \quad , \quad \lambda'_2 = \frac{x'_3}{x'_1} \quad , \quad \lambda'_3 = \frac{x'_1}{x'_2}$$

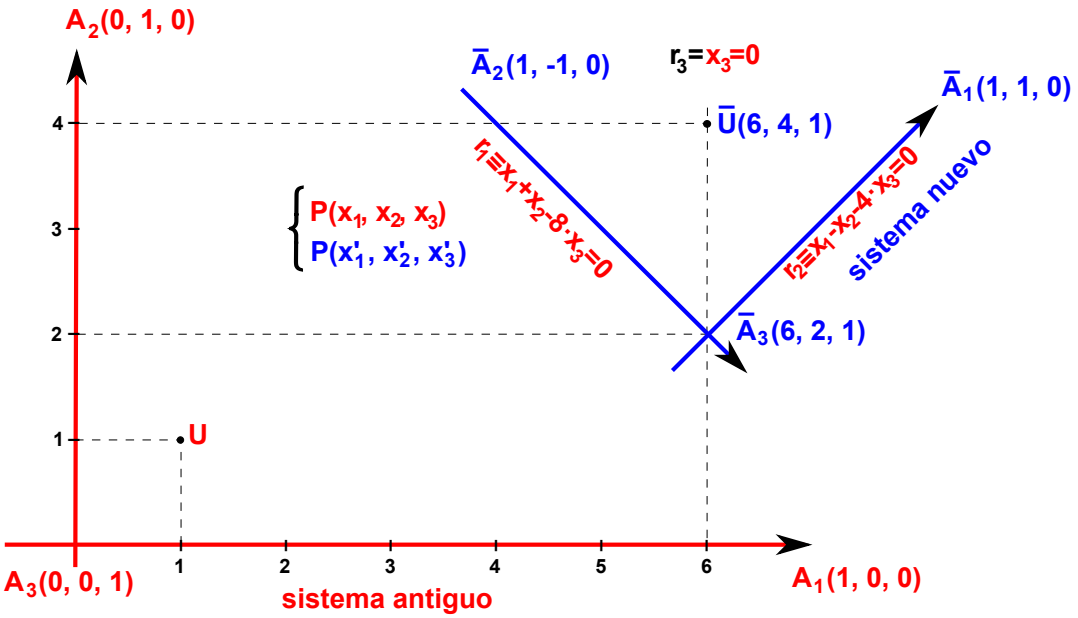
deducimos que

$$\boxed{\begin{array}{l} x'_1 = \frac{1}{\overline{r_1}} \cdot (a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3) \\ x'_2 = \frac{1}{\overline{r_2}} \cdot (a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3) \\ x'_3 = \frac{1}{\overline{r_3}} \cdot (a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3) \end{array}}$$

que son las **ecuaciones de cambio** buscadas.

Observemos que la terna (x'_1, x'_2, x'_3) como coordenadas homogéneas que son, están definidas a menos de un factor no nulo constante.

Ejemplo 1. Consideremos los dos sistemas de coordenadas cartesianas siguientes:



Dado que las coordenadas (en el sistema antiguo) del punto unidad en el sistema nuevo, son: $\overline{\mathbf{U}}(\mathbf{6},\ \mathbf{4},\ \mathbf{1},)$, tendremos:

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{r_1}} &= \mathbf{6}+\mathbf{4}-\mathbf{8}=\mathbf{2}\\ \overline{\mathbf{r_2}} &= \mathbf{6}-\mathbf{4}-(\mathbf{4}\cdot\mathbf{1})=-\mathbf{2}\\ \overline{\mathbf{r_3}} &= \mathbf{0}+\mathbf{0}+\mathbf{1}=\mathbf{1}\end{aligned}$$

podemos escribir que las ecuaciones de cambio de coordenadas será:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{x}'_{\mathbf{1}} &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot\mathbf{x_1}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot\mathbf{x_2}-\mathbf{4}\cdot\mathbf{x_3}\\ \mathbf{x}'_{\mathbf{2}} &= -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot\mathbf{x_1}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot\mathbf{x_2}+\mathbf{2}\cdot\mathbf{x_3}\\ \mathbf{x}'_{\mathbf{3}} &= \mathbf{x_3}\end{aligned}\right\}$$

La interpretación es la siguiente: Un punto $\mathbf{P}$, de coordenadas $\mathbf{P}(\mathbf{x_1},\ \mathbf{x_2},\ \mathbf{x_3})$ en el sistema antiguo, tiene las coordenadas $\mathbf{P}(\mathbf{x}'_{\mathbf{1}},\ \mathbf{x}'_{\mathbf{2}},\ \mathbf{x}'_{\mathbf{3}})$ en el sistema nuevo.

Observemos que si sustituimos $\mathbf{x_1},\ \mathbf{x_2},\ \mathbf{x_3}$ por las coordenadas del nuevo punto unidad $\overline{\mathbf{U}}(\mathbf{6},\ \mathbf{4},\ \mathbf{1})$, obtendríamos

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{x}'_{\mathbf{1}} &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot\mathbf{6}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot\mathbf{4}-\mathbf{4}\cdot\mathbf{1}=\mathbf{1}\\ \mathbf{x}'_{\mathbf{2}} &= -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot\mathbf{6}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot\mathbf{4}+\mathbf{2}\cdot\mathbf{1}=\mathbf{1}\\ \mathbf{x}'_{\mathbf{3}} &= \mathbf{1}=\mathbf{1}\end{aligned}\right\}$$

como debe ser, puesto que $\overline{\mathbf{U}}$ es el punto unidad en el sistema nuevo.

En el ejemplo anterior hemos aplicado estrictamente la teoría del cambio de coordenadas proyectivas. Sin embargo, desde un punto de vista práctico es mejor hacerlo como en el ejemplo siguiente que, por otra parte, es una repetición del anterior, lo que nos permitirá comparar los dos planteamientos.

Ejemplo 2. En el plano proyectivo real consideramos los dos sistemas fundamentales:

$$\{\ \mathbf{A_1}(\mathbf{1},\ \mathbf{0},\ \mathbf{0})\ ,\ \ \mathbf{A_2}(\mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{0})\ ,\ \ \mathbf{A_3}(\mathbf{0},\ \mathbf{0},\ \mathbf{1})\ ,\ \ \mathbf{U}(\mathbf{1},\ \mathbf{1},\ \mathbf{1})\ \}$$

y

$$\{\ \overline{\mathbf{A_1}}(\mathbf{1},\ \mathbf{1},\ \mathbf{0})\ ,\ \ \overline{\mathbf{A_2}}(\mathbf{1},\ -\mathbf{1},\ \mathbf{0})\ ,\ \ \overline{\mathbf{A_3}}(\mathbf{6},\ \mathbf{2},\ \mathbf{1})\ ,\ \ \overline{\mathbf{U}}(\mathbf{6},\ \mathbf{4},\ \mathbf{1})\ \}$$

Del primero diremos que es el sistema **antiguo** y del segundo que es el **nuevo**, determinado éste por las coordenadas de sus puntos fundamentales en el sistema antiguo.

En primer lugar deberemos **normalizar** el segundo sistema (el primero ya lo está); así tendremos

$$(\mathbf{6},\ \mathbf{4},\ \mathbf{1})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{1},\ \mathbf{1},\ \mathbf{0})+\mathbf{b}\cdot(\mathbf{1},\ -\mathbf{1},\ \mathbf{0})+\mathbf{c}\cdot(\mathbf{6},\ \mathbf{2},\ \mathbf{1})$$

es decir

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{6} &= \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{6}\cdot\mathbf{c}\\ \mathbf{4} &= \mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{2}\cdot\mathbf{c}\\ \mathbf{1} &= \mathbf{c}\end{aligned}\right\}$$

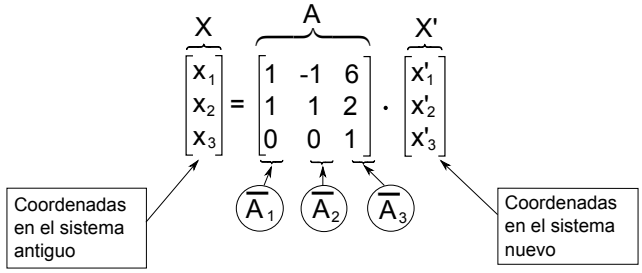
siendo las soluciones de este sistema

$$\mathbf{a = 1} \quad , \quad \mathbf{b = -1} \quad , \quad \mathbf{c = 1}$$

con lo que podemos considerar como sistema nuevo el siguiente:

$$\{\ \overline{\mathbf{A_1}}(\mathbf{1},\ \mathbf{1},\ \mathbf{0})\ ,\ \overline{\mathbf{A_2}}(\mathbf{-1},\ \mathbf{1},\ \mathbf{0})\ ,\ \overline{\mathbf{A_3}}(\mathbf{6},\ \mathbf{2},\ \mathbf{1})\ ,\ \overline{\mathbf{U}}(\mathbf{6},\ \mathbf{4},\ \mathbf{1})\ \}$$

Nos permite lo anterior poder escribir directamente la ecuación matricial del cambio de base



Si lo que queremos es expresar las coordenadas en el sistema nuevo, en función de las correspondientes en el sistema antiguo, bastará con calcular la inversa de la matriz **A**, sea la **B**, y multiplicar por **B** la anterior ecuación matricial:

$$\mathbf{B \cdot X = B \cdot A \cdot X'}$$

y puesto que $\mathbf{B = A^{-1}}$, será $\mathbf{B \cdot A = I}$, luego

$$\mathbf{X' = B \cdot X}$$

Puesto que

$$\mathbf{B = A^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -4 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tendremos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X'}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -4 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B = A^{-1}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}}$$

Así, podremos escribir las ecuaciones de cambio de base bajo las dos formas siguientes:

1.- Coordenadas antiguas en función de las nuevas:

$$\left.\begin{array}{rl} \mathbf{x_1} = & \mathbf{x'_1} - \mathbf{x'_2} + \mathbf{6}\cdot\mathbf{x'_3} \\ \mathbf{x_2} = & \mathbf{x'_1} + \mathbf{x'_2} + \mathbf{2}\cdot\mathbf{x'_3} \\ \mathbf{x_3} = & \mathbf{x'_3} \end{array}\right\}$$

2.- Coordenadas nuevas en función de las antiguas:

$$\left.\begin{array}{rl} \mathbf{x'_1} = & \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot\mathbf{x_1} + \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot\mathbf{x_2} - \mathbf{4}\cdot\mathbf{x_3} \\ \mathbf{x'_2} = & -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot\mathbf{x_1} + \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot\mathbf{x_2} + \mathbf{2}\cdot\mathbf{x_3} \\ \mathbf{x'_3} = & \mathbf{x_3} \end{array}\right\}$$

En cualquier caso, la interpretación es la siguiente: Un punto $\mathbf{P}$ de coordenadas $\mathbf{P}(\mathbf{x_1},\ \mathbf{x_2},\ \mathbf{x_3})$ en el sistema antiguo, tiene las coordenadas $\mathbf{P}(\mathbf{x'_1},\ \mathbf{x'_2},\ \mathbf{x'_3})$ en el sistema nuevo.

En el siguiente ejemplo resolveremos el problema de un cambio de coordenadas proyectivas desde los dos puntos de vista utilizados en los ejemplos anteriores.

Ejemplo 3. En el plano proyectivo real consideramos los dos sistemas fundamentales.

$$\{\ \mathbf{A_1}(\mathbf{1},\ \mathbf{0},\ \mathbf{0})\ ,\ \ \mathbf{A_2}(\mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{0})\ ,\ \ \mathbf{A_3}(\mathbf{0},\ \mathbf{0},\ \mathbf{1})\ ,\ \ \mathbf{U}(\mathbf{1},\ \mathbf{1},\ \mathbf{1})\ \}$$

y

$$\{\ \overline{\mathbf{A_1}}(\mathbf{3},\ \mathbf{1},\ -\mathbf{3})\ ,\ \ \overline{\mathbf{A_2}}(-\mathbf{1},\ \mathbf{0},\ \mathbf{5})\ ,\ \ \overline{\mathbf{A_3}}(\mathbf{1},\ \mathbf{8},\ -\mathbf{1})\ ,\ \ \overline{\mathbf{U}}(\mathbf{3},\ \mathbf{9},\ \mathbf{1})\ \}$$

a los que ordinariamente solemos llamar sistema **antiguo** y **nuevo**, respectivamente.

El sistema nuevo nos ha quedado determinado por las coordenadas de sus puntos fundamentales en el sistema antiguo, y por tanto, según hemos establecido en la teoría por las ecuaciones, en el sistema antiguo de los lados del triángulo fundamental:

$$\overline{\mathbf{A_2}}\,\overline{\mathbf{A_3}}\ :\ \mathbf{r_1} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & \mathbf{x_3} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{8} & -\mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{40}\cdot\mathbf{x_1} + \mathbf{4}\cdot\mathbf{x_2} - \mathbf{8}\cdot\mathbf{x_3} = \mathbf{0}$$

$$\overline{\mathbf{A_3}}\,\overline{\mathbf{A_1}}\ :\ \mathbf{r_2} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & \mathbf{x_3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & -\mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{8} & -\mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{23}\cdot\mathbf{x_1} - \mathbf{0}\cdot\mathbf{x_2} + \mathbf{23}\cdot\mathbf{x_3} = \mathbf{0}$$

$$\overline{\mathbf{A_1}}\,\overline{\mathbf{A_2}}\ :\ \mathbf{r_3} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & \mathbf{x_3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & -\mathbf{3} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \end{vmatrix} = \mathbf{5}\cdot\mathbf{x_1} - \mathbf{12}\cdot\mathbf{x_2} + \mathbf{x_3} = \mathbf{0}$$

y por las coordenadas $(\mathbf{3},\ \mathbf{9},\ \mathbf{1})$ del punto $\overline{\mathbf{U}}$.

Simplificando tendremos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r_1} &\equiv -\mathbf{10}\cdot\mathbf{x_1} \quad\ + \mathbf{x_2} - \mathbf{2}\cdot\mathbf{x_3} = \mathbf{0}\\
\mathbf{r_2} &\equiv \quad\ \mathbf{x_1} \quad\ + \mathbf{x_3} = \mathbf{0}\\
\mathbf{r_3} &\equiv \quad \mathbf{5}\cdot\mathbf{x_1} - \mathbf{12}\cdot\mathbf{x_2} \ + \mathbf{x_3} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{r_1}}(\mathbf{3},\ \mathbf{9},\ \mathbf{1}) &= -\mathbf{10}\cdot\mathbf{3} \quad\ + \mathbf{9} - \mathbf{2}\cdot\mathbf{1} = -\mathbf{23}\\
\overline{\mathbf{r_2}}(\mathbf{3},\ \mathbf{9},\ \mathbf{1}) &= \quad\ \mathbf{3} \quad\ + \mathbf{1} = \quad\ \mathbf{4}\\
\overline{\mathbf{r_3}}(\mathbf{3},\ \mathbf{9},\ \mathbf{1}) &= \quad \mathbf{5}\cdot\mathbf{3} - \mathbf{12}\cdot\mathbf{9} \ + \mathbf{1} = -\mathbf{92}
\end{aligned}$$

En consecuencia, las ecuaciones del cambio de coordenadas serán:

$$\mathbf{x_1'} = \frac{\mathbf{1}}{-\mathbf{23}}\cdot(-\mathbf{10}\cdot\mathbf{x_1} \quad + \mathbf{x_2} - \mathbf{2}\cdot\mathbf{x_3})$$

$$\mathbf{x_2'} = \quad \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\cdot(\quad\ \mathbf{x_1} \ + \mathbf{0}\cdot\mathbf{x_2} \quad + \mathbf{x_3})$$

$$\mathbf{x_3'} = \frac{\mathbf{1}}{-\mathbf{92}}\cdot(\quad \mathbf{5}\cdot\mathbf{x_1} - \mathbf{12}\cdot\mathbf{x_2} \quad + \mathbf{x_3})$$

y como las coordenadas homogéneas están determinadas a menos de un factor no nulo:

$$\mathbf{x_1'} = \frac{\mathbf{1}}{-\mathbf{92}}\cdot(-\mathbf{40}\cdot\mathbf{x_1} + \mathbf{4}\cdot\mathbf{x_2} \ - \mathbf{8}\cdot\mathbf{x_3})$$

$$\mathbf{x_2'} = \frac{\mathbf{1}}{-\mathbf{92}}\cdot(-\mathbf{23}\cdot\mathbf{x_1} + \mathbf{0}\cdot\mathbf{x_2} - \mathbf{23}\cdot\mathbf{x_3})$$

$$\mathbf{x_3'} = \frac{\mathbf{1}}{-\mathbf{92}}\cdot(\quad \mathbf{5}\cdot\mathbf{x_1} - \mathbf{12}\cdot\mathbf{x_2} \quad + \mathbf{x_3})$$

Las ecuaciones del cambio puestas en forma matricial serían:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x_1'}\\ \mathbf{x_2'}\\ \mathbf{x_3'}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\mathbf{40}}{\mathbf{92}} & \frac{-\mathbf{4}}{\mathbf{92}} & \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{92}}\\ \frac{\mathbf{23}}{\mathbf{92}} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{23}}{\mathbf{92}}\\ \frac{-\mathbf{5}}{\mathbf{92}} & \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{92}} & \frac{-\mathbf{1}}{\mathbf{92}}\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{x_1}\\ \mathbf{x_2}\\ \mathbf{x_3}\end{bmatrix}$$

Es inmediato comprobar que, en efecto:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A_1}(\mathbf{x_1}=\mathbf{3}\ ,\ \mathbf{x_2}=\mathbf{1}\ ,\ \mathbf{x_3}=-\mathbf{3}) \longrightarrow \overline{\mathbf{A_1}}(\mathbf{x_1'}=\mathbf{1}\ ,\ \mathbf{x_2'}=\mathbf{0}\ ,\ \mathbf{x_3'}=\mathbf{0})\\
&\mathbf{A_2}(-\mathbf{1},\ \mathbf{0},\ \mathbf{5}) \longrightarrow \overline{\mathbf{A_2}}(\mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{0})\\
&\mathbf{A_3}(\mathbf{1},\ \mathbf{8},\ -\mathbf{1}) \longrightarrow \overline{\mathbf{A_3}}(\mathbf{0},\ \mathbf{0},\ \mathbf{1})\\
&\mathbf{U}(\mathbf{3},\ \mathbf{9},\ \mathbf{1}) \longrightarrow \overline{\mathbf{U}}(\mathbf{1},\ \mathbf{1},\ \mathbf{1})
\end{aligned}$$

Por otra parte, las ecuaciones del cambio se pueden escribir como sigue, dado que el sistema nuevo está ya normalizado:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \\ \mathbf{x_3} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{8} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{5} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x'_1} \\ \mathbf{x'_2} \\ \mathbf{x'_3} \end{bmatrix}$$

que nos permiten comprobar, también, que

$$\begin{array}{lll} \overline{\mathbf{A_1}}(\mathbf{x'_1}=\mathbf{1}\,,\ \mathbf{x'_2}=\mathbf{0}\,,\ \mathbf{x'_3}=\mathbf{0}) & \longrightarrow & \mathbf{A_1}(\mathbf{x_1}=\mathbf{3}\,,\ \mathbf{x_2}=\mathbf{1}\,,\ \mathbf{x_3}=\mathbf{-3}) \\ \overline{\mathbf{A_2}}(\mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{0}) & \longrightarrow & \mathbf{A_2}(\mathbf{-1},\ \mathbf{0},\ \mathbf{5}) \\ \overline{\mathbf{A_3}}(\mathbf{0},\ \mathbf{0},\ \mathbf{1}) & \longrightarrow & \mathbf{A_3}(\mathbf{1},\ \mathbf{8},\ \mathbf{-1}) \\ \overline{\mathbf{U}}(\mathbf{1},\ \mathbf{1},\ \mathbf{1}) & \longrightarrow & \mathbf{U}(\mathbf{3},\ \mathbf{9},\ \mathbf{1}) \end{array}$$

Observemos que la ecuación matricial en esta segunda forma

$$\mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X'}$$

se escribe de manera inmediata, puesto que sus columnas son, precisamente, las coordenadas de $\overline{\mathbf{A_1}}$, $\overline{\mathbf{A_2}}$, $\overline{\mathbf{A_3}}$.

Veamos, por último, un nuevo ejemplo de cambio de coordenadas proyectivas en el que es necesario normalizar los datos del sistema nuevo para poder escribir directamente las ecuaciones del cambio.

Ejemplo 4. En el plano proyectivo real consideramos los dos sistemas fundamentales.

$$\{\ \mathbf{A_1}(\mathbf{1},\ \mathbf{0},\ \mathbf{0})\,,\ \mathbf{A_2}(\mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{0})\,,\ \mathbf{A_3}(\mathbf{0},\ \mathbf{0},\ \mathbf{1})\,,\ \mathbf{U}(\mathbf{1},\ \mathbf{1},\ \mathbf{1})\ \}$$

y

$$\{\ \overline{\mathbf{A_1}}(\mathbf{1},\ \mathbf{0},\ \mathbf{0})\,,\ \overline{\mathbf{A_2}}(\mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{0})\,,\ \overline{\mathbf{A_3}}(\mathbf{0},\ \mathbf{0},\ \mathbf{1})\,,\ \overline{\mathbf{U}}(\mathbf{-1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3})\ \}$$

que llamaremos, respectivamente, sistema **antiguo** y **nuevo**.
Para determinar las correspondientes ecuaciones del cambio de coordenadas lo primero que tendremos que hacer es **normalizar** los datos del sistema nuevo; así tendremos

$$\overline{\mathbf{U}} = \mathbf{a} \cdot \overline{\mathbf{A_1}} + \mathbf{b} \cdot \overline{\mathbf{A_2}} + \mathbf{c} \cdot \overline{\mathbf{A_3}}$$

es decir

$$(\mathbf{-1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{1},\ \mathbf{0},\ \mathbf{0}) + \mathbf{b} \cdot (\mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{0}) + \mathbf{c} \cdot (\mathbf{0},\ \mathbf{0},\ \mathbf{1})$$

o lo que es lo mismo

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{-1} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{1} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{0} \\ \mathbf{2} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{1} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{0} \\ \mathbf{3} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{1} \end{array}\right\}$$

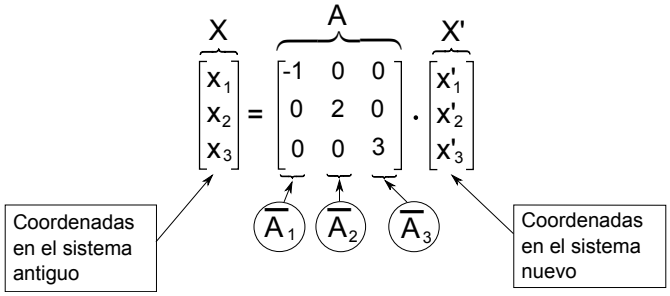
de donde

$$\mathbf{a} = -\mathbf{1} \quad , \quad \mathbf{b} = \mathbf{2} \quad , \quad \mathbf{c} = \mathbf{3} \, .$$

Por tanto, el sistema nuevo con el que trabajaremos será

$$\{ \, \overline{\mathbf{A_1}}(-\mathbf{1}, \, \mathbf{0}, \, \mathbf{0}) \, , \; \overline{\mathbf{A_2}}(\mathbf{0}, \, \mathbf{2}, \, \mathbf{0}) \, , \; \overline{\mathbf{A_3}}(\mathbf{0}, \, \mathbf{0}, \, \mathbf{3}) \, , \; \overline{\mathbf{U}}(-\mathbf{1}, \, \mathbf{2}, \, \mathbf{3}) \, \}$$

En consecuencia la ecuación matricial del cambio de base será la siguiente:



Calculando ahora la inversa de la matriz **A**

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \end{bmatrix}$$

podremos escribir la ecuación matricial del cambio de base en la forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x'_1} \\ \mathbf{x'_2} \\ \mathbf{x'_3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{X'}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-\mathbf{1}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \\ \mathbf{x_3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}}$$

Así, podremos escribir las ecuaciones de cambio de base de las dos formas siguientes:

1.- Coordenadas antiguas en función de las nuevas:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{x_1} = \mathbf{x'_1} \\ \mathbf{x_2} = \quad \mathbf{2} \cdot \mathbf{x'_2} \\ \mathbf{x_3} = \qquad\quad \mathbf{3} \cdot \mathbf{x'_3} \end{array}\right\}$$

2.- Coordenadas nuevas en función de las antiguas:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{x'_1} = \quad -\mathbf{x_1} \\ \mathbf{x'_2} = \qquad \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \mathbf{x_2} \\ \mathbf{x'_3} = \qquad\qquad \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \cdot \mathbf{x_3} \end{array}\right\}$$

En cualquier caso, la interpretación es la siguiente: Un punto **P** de coordenadas $\mathbf{P}(\mathbf{x_1}, \, \mathbf{x_2}, \, \mathbf{x_3})$ en el sistema antiguo, tiene las coordenadas $\mathbf{P}(\mathbf{x'_1}, \, \mathbf{x'_2}, \, \mathbf{x'_3})$ en el sistema nuevo.

Procediendo ahora por dualidad podremos escribir:

Sean $(\mathbf{a_1},\ \mathbf{a_2},\ \mathbf{a_3},\ \mathbf{u})$, $(\overline{\mathbf{a_1}},\ \overline{\mathbf{a_2}},\ \overline{\mathbf{a_3}},\ \overline{\mathbf{u}})$ dos sistemas; el segundo determinado por las ecuaciones tangenciales de los puntos de intersección $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \mathbf{A_3}$ de las rectas fundamentales $\overline{\mathbf{a_2}},\ \overline{\mathbf{a_3}}$; $\overline{\mathbf{a_3}},\ \overline{\mathbf{a_1}}$; $\overline{\mathbf{a_1}},\ \overline{\mathbf{a_2}}$ respectivamente.

$$\overline{\mathbf{a_2}},\ \overline{\mathbf{a_3}}\ :\ \mathbf{m_1} \equiv \mathbf{b_{11}} \cdot \mathbf{v_1} + \mathbf{b_{12}} \cdot \mathbf{v_2} + \mathbf{b_{13}} \cdot \mathbf{v_3}$$

$$\overline{\mathbf{a_3}},\ \overline{\mathbf{a_1}}\ :\ \mathbf{m_2} \equiv \mathbf{b_{21}} \cdot \mathbf{v_1} + \mathbf{b_{22}} \cdot \mathbf{v_2} + \mathbf{b_{23}} \cdot \mathbf{v_3}$$

$$\overline{\mathbf{a_1}},\ \overline{\mathbf{a_2}}\ :\ \mathbf{m_3} \equiv \mathbf{b_{31}} \cdot \mathbf{v_1} + \mathbf{b_{32}} \cdot \mathbf{v_2} + \mathbf{b_{33}} \cdot \mathbf{v_3}$$

y por las coordenadas $\overline{\mathbf{v_1}}, \overline{\mathbf{v_2}}, \overline{\mathbf{v_3}}$ de la recta $\overline{\mathbf{u}}$.
Así resultarán las fórmulas de cambio:

$$\mathbf{v_1'} = \frac{\mathbf{1}}{\overline{\mathbf{m_1}}} \cdot (\mathbf{b_{11}} \cdot \mathbf{v_1} + \mathbf{b_{12}} \cdot \mathbf{v_2} + \mathbf{b_{13}} \cdot \mathbf{v_3})$$

$$\mathbf{v_2'} = \frac{\mathbf{1}}{\overline{\mathbf{m_2}}} \cdot (\mathbf{b_{21}} \cdot \mathbf{v_1} + \mathbf{b_{22}} \cdot \mathbf{v_2} + \mathbf{b_{23}} \cdot \mathbf{v_3})$$

$$\mathbf{v_3'} = \frac{\mathbf{1}}{\overline{\mathbf{m_3}}} \cdot (\mathbf{b_{31}} \cdot \mathbf{v_1} + \mathbf{b_{32}} \cdot \mathbf{v_2} + \mathbf{b_{33}} \cdot \mathbf{v_3})$$

en donde $\overline{\mathbf{m_i}}$ es el valor de la forma $\mathbf{m_i}$ para $\mathbf{v_i} = \overline{\mathbf{v_i}}$ **(i=1, 2, 3)**.
Como ejemplos aclaratorios valdrían los anteriores cambiando, simplemente, la notación.

Lección 15.- SISTEMAS PUNTUAL Y TANGENCIAL ASOCIADOS

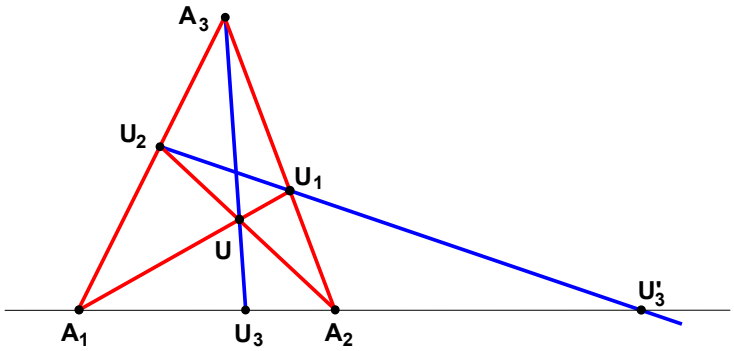
15.1. Construcción de la cuaterna armónica mediante la regla.
15.2. Sistemas puntual y tangencial asociados.

15.1 Construcción de la cuaterna armónica mediante la regla

Consideremos, sobre una recta, tres puntos distintos $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{U_3}$, en principio $\mathbf{U_3}$ situado entre $\mathbf{A_1}$ y $\mathbf{A_2}$. Determinaremos $\mathbf{U_3'}$, conjugado armónico de $\mathbf{U_3}$ respecto del par $(\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2})$, como sigue:

Sea $\mathbf{A_3}$ un punto no perteneciente a la recta $\overline{\mathbf{A_1A_2}}$. Tracemos las rectas $\overline{\mathbf{A_1A_3}}$, $\overline{\mathbf{A_2A_3}}$, $\overline{\mathbf{U_3A_3}}$ y sobre esta última tomemos un punto $\mathbf{U}$ distinto de $\mathbf{U_3}$ y de $\mathbf{A_3}$, que unimos con $\mathbf{A_1}$ y $\mathbf{A_2}$, con lo que obtenemos dos rectas que cortan, respectivamente, a $\overline{\mathbf{A_2A_3}}$, $\overline{\mathbf{A_1A_3}}$ en los puntos $\mathbf{U_1}$, $\mathbf{U_2}$.

La recta $\overline{\mathbf{U_1U_2}}$ cortará a la $\overline{\mathbf{A_1A_2}}$ en el punto $\mathbf{U_3'}$, que, como vamos a comprobar es el conjugado armónico de $\mathbf{U_3}$.



Procedamos a la comprobación. Para ello identifiquemos los puntos $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$, $\mathbf{U}$, de más arriba, con los fundamentales de un sistema proyectivo. Así, las coordenadas de $\mathbf{U_1}$, $\mathbf{U_2}$ serán, respectivamente, $(\mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{1})$, $(\mathbf{1},\ \mathbf{0},\ \mathbf{1})$, de donde la expresión paramétrica de la recta $\overline{\mathbf{U_1U_2}}$, será la siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{x_1} = \quad \boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{x_2} = \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{x_3} = \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu} \end{array}\right\}$$

Para el punto $\mathbf{U_3'}$ es $\mathbf{x_3} = \mathbf{0}$, es decir

$$\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$$

luego

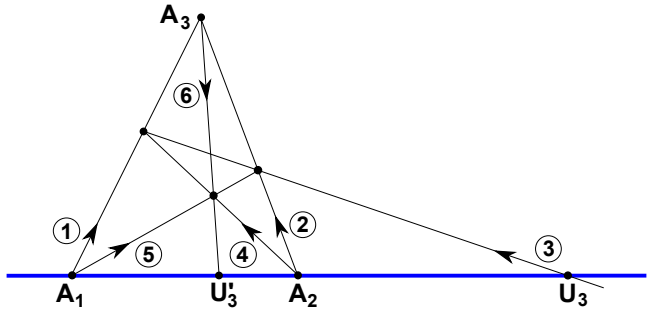
$$\frac{\mathbf{x_1}}{\mathbf{x_2}} = -\mathbf{1}$$

Por tanto, en la recta $\overline{\mathbf{A_1A_2}}$, referida a la terna $(\mathbf{A_1},\ \mathbf{A_2},\ \mathbf{U_3})$ como puntos límite, origen y unidad, el punto $\mathbf{U'_3}$ tiene coordenadas $\dfrac{\mathbf{x_1}}{\mathbf{x_2}} = -\mathbf{1}$.
Así pues, dado que se verifica que:

$$(\boldsymbol{\infty},\ \mathbf{0},\ \mathbf{1},\ -\mathbf{1}) = -\mathbf{1}\ ,$$

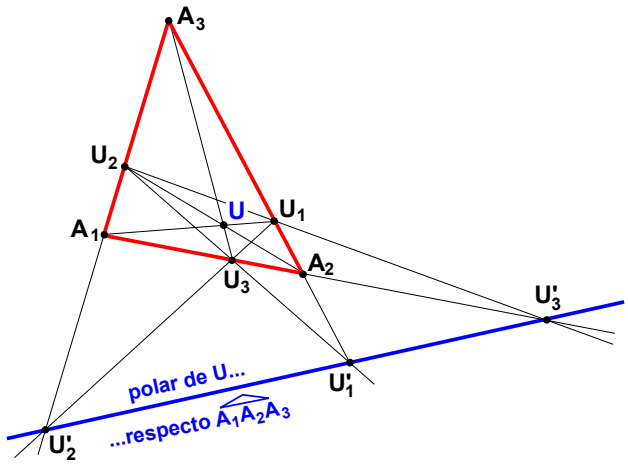
la cuaterna $(\mathbf{A_1},\ \mathbf{A_2},\ \mathbf{U_3},\ \mathbf{U'_3})$ es armónica, como queríamos probar.

Ejemplo 1. Para determinar $\mathbf{U'_3}$ conjugado armónico de $\mathbf{U_3}$, respecto del par $(\mathbf{A_1},\ \mathbf{A_2})$, se procederá como sigue, siendo $\mathbf{A_3}$ un punto cualquiera, no situado sobre la recta $\overline{\mathbf{A_1A_2}}$:



Observemos que la figura obtenida coincide con la anterior, en la que suponíamos $\mathbf{U_3}$ contenido en el segmento $\overline{\mathbf{A_1A_2}}$.

Ejemplo 2. Si consideramos, además del conjugado $\mathbf{U'_3} = (\mathbf{1},\ -\mathbf{1},\ \mathbf{0})$, respecto $(\mathbf{A_1},\ \mathbf{A_2})$, los conjugados $\mathbf{u'_1}$, $\mathbf{u'_2}$ de $\mathbf{U_1}$, $\mathbf{U_2}$, respectivamente respecto de $(\mathbf{A_2},\ \mathbf{A_3})$, $(\mathbf{A_3},\ \mathbf{A_1})$, cuyas coordenadas son **(0, 1, -1)**, **(-1, 0, 1)**, podemos observar que sumando las coordenadas del mismo índice, de los puntos $\mathbf{u'_1}$, $\mathbf{u'_2}$, $\mathbf{u'_3}$, se obtiene siempre cero; es decir, dichos tres puntos están alineados. A la recta **u** que los contiene se le llama **polar armónica del punto U respecto del triángulo** $\mathbf{A_1\overset{\triangle}{A_2}A_3}$.



Llamaremos **cuadrilátero completo** a la figura formada por las cuatro rectas, no concurrentes tres a tres, llamados **lados**:

$$\mathbf{a\ ,\ b\ ,\ c\ ,\ d}$$

de la que los seis puntos de intersección de éstas

$$\mathbf{A\ ,\ B\ ,\ C\ ,\ L\ ,\ M\ ,\ N}$$

reciben el nombre de **vértices**, llamando **opuestos** a los pares de vértices no situados en un mismo lado. Son, por tanto, opuestos los

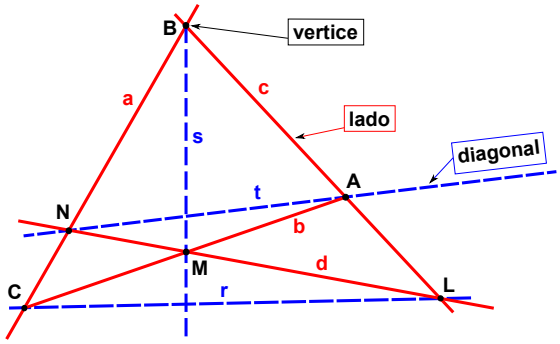
$$\mathbf{A\ y\ N\ \ ;\ \ B\ y\ M\ \ ;\ \ C\ y\ L}$$

A las tres rectas que unen los pares de vértices opuestos

$$\mathbf{t \equiv \overline{AN}\ \ ;\ \ s \equiv \overline{BM}\ \ ;\ \ r \equiv \overline{CL}}$$

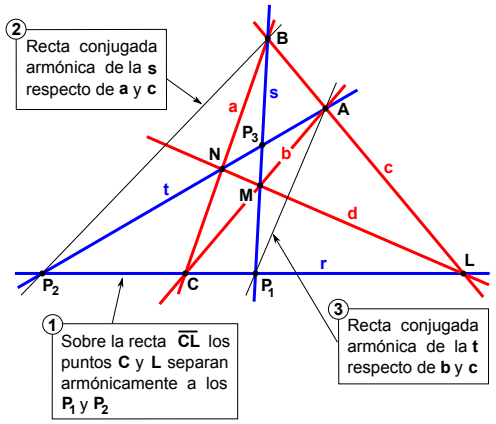
se les llamará **diagonales**.

Un **cuadrilátero completo** tiene, por tanto, **cuatro lados**, **seis vértices** y **tres diagonales**.



La construcción, justificada antes, de una cuaterna armónica nos permite afirmar que: **Los vértices de un cuadrilátero completo que determinan una diagonal están armónicamente separados por los puntos de intersección de dicha diagonal con las otras dos**.

Ejemplo 3. La siguiente figura y sus anotaciones tratan de visualizar la afirmación anterior.



La figura dual del cuadrilátero completo se llamará **cuadrivértice completo**; es decir, la figura formada por cuatro puntos no alineados tres a tres, llamados **vértices**:

$$\mathbf{A} \ , \ \mathbf{B} \ , \ \mathbf{C} \ , \ \mathbf{D}$$

de los que las seis rectas de unión de éstos

$$\overline{\mathbf{AB}} \ ; \ \overline{\mathbf{AC}} \ ; \ \overline{\mathbf{AD}} \ ; \ \overline{\mathbf{BC}} \ ; \ \overline{\mathbf{BD}} \ ; \ \overline{\mathbf{CD}}$$

reciben el nombre de **lados**, llamando **opuestos** a los pares de lados no concurrentes en un mismo vértice. Son por tanto opuestos los

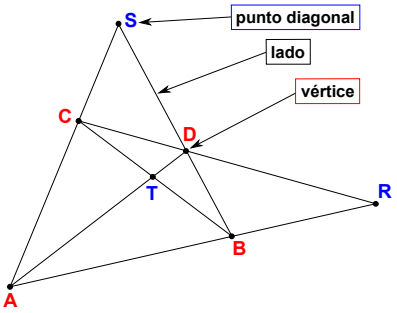
$$\overline{\mathbf{AB}} \text{ y } \overline{\mathbf{CD}} \ ; \ \overline{\mathbf{AC}} \text{ y } \overline{\mathbf{BD}} \ ; \ \overline{\mathbf{BC}} \text{ y } \overline{\mathbf{AD}}$$

A los tres puntos de intersección de los tres pares de lados opuestos

$$\mathbf{R} \ ; \ \mathbf{S} \ ; \ \mathbf{T}$$

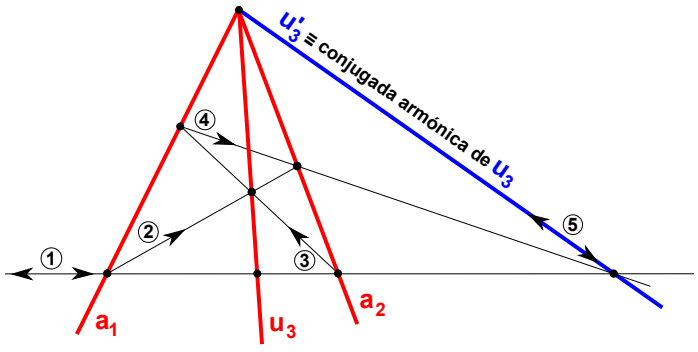
se les llamará **puntos diagonales**.

Un **cuadrivértice completo** tiene, por tanto, **cuatro vértices**, **seis lados** y **tres puntos diagonales**.



La propiedad dual de la enunciada antes, para el cuadrilátero completo, sería, para el cuadrivértice completo, la siguiente: **Los lados que pasan por un punto diagonal están armónicamente separados por las rectas que unen dicho punto con los otros dos puntos diagonales.**

Ejemplo 4. La propiedad anterior nos permite construir, con la regla, la recta conjugada armónica de una, $\mathbf{u_3}$, respecto de un par $(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2})$, concurrentes con ella, según el esquema siguiente:



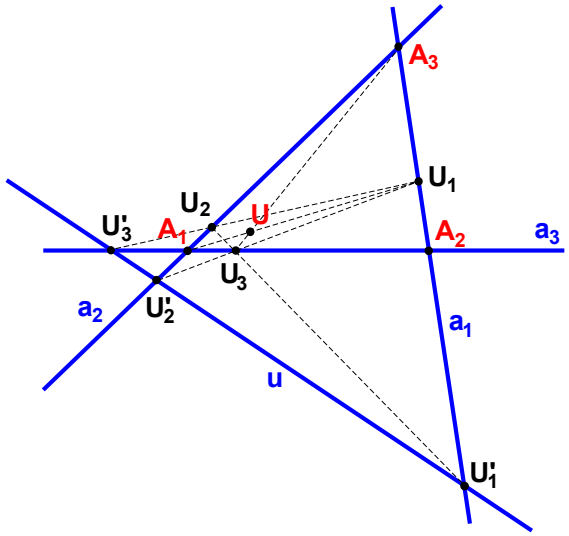
15.2 Sistemas puntual y tangencial asociados

Sea $(\mathbf{A_1},\ \mathbf{A_2},\ \mathbf{A_3},\ \mathbf{U})$ la figura fundamental de un sistema de coordenadas proyectivas puntuales.

Sean $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$, los lados del triángulo fundamental, respectivamente opuestos a $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$, y $\mathbf{u}$ la **polar armónica** de $\mathbf{U}$ respecto del triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{A_1A_2A_3}}$.

Diremos que son **sistemas asociados** el sistema de coordenadas tangenciales de figura fundamental $(\mathbf{a_1},\ \mathbf{a_2},\ \mathbf{a_3},\ \mathbf{u})$ y el puntual de figura fundamental $(\mathbf{A_1},\ \mathbf{A_2},\ \mathbf{A_3},\ \mathbf{U})$.

(En el establecimiento de los sistemas asociados es vital que $\mathbf{u}$ sea la polar armónica de $\mathbf{U}$).



Consideremos, ahora una recta $\mathbf{r}$, de ecuación en el sistema puntual

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{b_1}\cdot\mathbf{x_1} + \mathbf{b_2}\cdot\mathbf{x_2} + \mathbf{b_3}\cdot\mathbf{x_3} = \mathbf{0}\ ,$$

de la que vamos a calcular sus coordenadas tangenciales en el sistema tangencial asociado.

Podemos escribir

$$\boldsymbol{\mu_1} = \mathbf{a_1}(\mathbf{a_2}\ \mathbf{a_3}\ \mathbf{u}\ \mathbf{r}) = (\mathbf{A_3}\ \mathbf{A_2}\ \mathbf{U_1'}\ \mathbf{R_1})$$

siendo $\mathbf{R_1}$ el punto de intersección de $\mathbf{r}$ con $\mathbf{a_1}$.

Para determinar $\mathbf{R_1}$, resolveremos el sistema que se obtiene al añadir a la ecuación de la recta la ecuación de $\mathbf{a_1}$:

$$\mathbf{a_1} \equiv \mathbf{x_1} = \mathbf{0}$$

Así, del sistema

$$\left.\begin{array}{rr} \mathbf{b_1}\cdot\mathbf{x_1} + \mathbf{b_2}\cdot\mathbf{x_2} + \mathbf{b_3}\cdot\mathbf{x_3} = \mathbf{0} \\ \mathbf{x_1} = \mathbf{0} \end{array}\right\}$$

resulta que las coordenadas de $\mathbf{R_1}$ verifican:

$$\frac{\mathbf{x_3}}{\mathbf{x_2}} = \frac{-\mathbf{b_2}}{\mathbf{b_3}}\ .$$

En el sistema proyectivo, en la recta $\mathbf{a_1}$, de puntos límite, origen y unidad: $\mathbf{A_3}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{U}$, la coordenada de $\mathbf{U_1'}$ sabemos que es **-1**, mientras que por la igualdad anterior la de $\mathbf{R_1}$ es $\dfrac{-\mathbf{b_2}}{\mathbf{b_3}}$. Resultará entonces que:

$$\boldsymbol{\mu_1} = \left(\boldsymbol{\infty},\ \mathbf{0},\ -\mathbf{1},\ \frac{-\mathbf{b_2}}{\mathbf{b_3}}\right) = \left(\frac{-\mathbf{b_2}}{\mathbf{b_3}},\ -\mathbf{1},\ \mathbf{0},\ \boldsymbol{\infty}\right) = \frac{\mathbf{b_2}}{\mathbf{b_3}}$$

Razonando de la misma manera llegaríamos a que:

$$\boldsymbol{\mu_2} = \frac{\mathbf{b_3}}{\mathbf{b_1}}$$

$$\boldsymbol{\mu_3} = \frac{\mathbf{b_1}}{\mathbf{b_2}}\ .$$

Comparando ahora estas expresiones de las $\boldsymbol{\mu_i}$ $(\mathbf{i} = \mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3})$ con las

$$\boldsymbol{\mu_1} = \frac{\mathbf{v_2}}{\mathbf{v_3}} \quad , \quad \boldsymbol{\mu_3} = \frac{\mathbf{v_3}}{\mathbf{v_1}} \quad , \quad \boldsymbol{\mu_3} = \frac{\mathbf{v_1}}{\mathbf{v_2}}$$

que establecimos en el apartado 14.1, de la lección anterior, deducimos, como coordenadas tangenciales de **r**, las siguientes:

$$\mathbf{v_1} = \mathbf{b_1}$$

$$\mathbf{v_2} = \mathbf{b_2}$$

$$\mathbf{v_3} = \mathbf{b_3}$$

lo que nos permite afirmar: **Cuando los sistemas puntual y tangencial son asociados, de la ecuación de una recta se deducen sus coordenadas tangenciales tomándolas ordenadamente proporcionales a los coeficientes de la ecuación de dicha recta**. Dichas coordenadas reciben el nombre de **coordenadas plückerianas** de la recta.

Ejemplo 1. Consideremos dos **sistemas asociados**, el de coordenadas proyectivas puntuales de esquema $(\mathbf{A_1},\ \mathbf{A_2},\ \mathbf{A_3},\ \mathbf{U})$, y el sistema de coordenadas tangenciales de esquema $(\mathbf{a_1},\ \mathbf{a_2},\ \mathbf{a_3},\ \mathbf{u})$, como se muestra en la figura anterior.
Bajo este supuesto, la ecuación

$$\mathbf{x_1} + \mathbf{5}\cdot\mathbf{x_2} - \mathbf{7}\cdot\mathbf{x_3} = \mathbf{0}$$

es la representación implícita de una recta cuyas coordenadas tangenciales (**plükerianas**) son:

$$(\mathbf{v_1} = \mathbf{1} \quad , \quad \mathbf{v_2} = \mathbf{5} \quad , \quad \mathbf{v_3} = -\mathbf{7})\ .$$

Asimismo, la ecuación

$$\mathbf{v_1} + \mathbf{5}\cdot\mathbf{v_2} - \mathbf{7}\cdot\mathbf{v_3} = \mathbf{0}$$

representaría un haz de rectas de vértice el punto

$$(\mathbf{x_1} = \mathbf{1} \quad , \quad \mathbf{x_2} = \mathbf{5} \quad , \quad \mathbf{x_3} = -\mathbf{7})\ .$$

Podemos afirmar entonces, que: **La condición de incidencia de punto y recta es la siguiente**:

$$\mathbf{v_1 \cdot x_1 + v_2 \cdot x_2 + v_3 \cdot x_3 = 0}$$

supuesto que las coordenadas correspondientes se refieren a sistemas asociados.

> Así, si en $\mathbf{v_1 \cdot x_1 + v_2 \cdot x_2 + v_3 \cdot x_3 = 0}$, fijamos $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$ la ecuación representa una recta; y dualmente, si fijamos $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$ la ecuación representa un haz de rectas, cuyas coordenadas tangenciales son las soluciones de la misma.

Ejemplo 2. Si nos estamos refiriendo a dos sistemas asociados, podemos afirmar que el punto

$$\mathbf{P}(\mathbf{1},\ -\mathbf{2},\ \mathbf{1})$$

y la recta

$$\mathbf{p}(\mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{2})$$

son incidentes, puesto que

$$\mathbf{0 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = 0}\ .$$

Por otra parte, podemos concluir que el mismo punto **P** no pertenece a la recta

$$\mathbf{q}(\mathbf{3},\ \mathbf{4},\ \mathbf{1})$$

puesto que

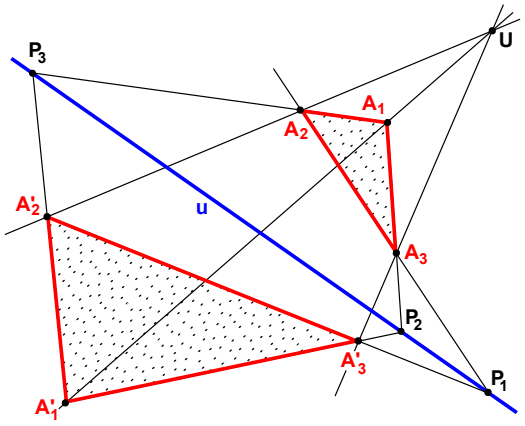
$$\mathbf{3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \neq 0}$$

Lección 16.- TEOREMAS DE DESARGUES

16.1 Teorema de Desargues de los triángulos homológicos

16.2 Otros teoremas de Desargues

16.1 Teorema de Desargues de los triángulos homológicos



TEOREMA DE DESARGUES. **Si los triángulos $\overset{\triangle}{A_1A_2A_3}$, $\overset{\triangle}{A'_1A'_2A'_3}$ tienen los vértices A_1, A'_1; A_2, A'_2 y A_3, A'_3 sobre rectas concurrentes en un punto U, los pares de lados $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A'_1A'_2}$; $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A'_2A'_3}$; $\overline{A_3A_1}$, $\overline{A'_3A'_1}$ se cortan en puntos P_3, P_1, P_2 , respectivamente situados sobre una recta u ; y recíprocamente.**

En efecto: (Observemos que el recíproco es el dual del directo; en consecuencia, en virtud de la ley de dualidad, bastará probar sólo el directo).

Si tomamos el triángulo $\overset{\triangle}{A_1A_2A_3}$ como fundamental, y el punto **U** como punto unidad, los vértices del segundo triángulo tendrán coordenadas de la forma

$$\mathbf{A'_1}(\mathbf{a},\ \mathbf{1},\ \mathbf{1}) \quad , \quad \mathbf{A'_2}(\mathbf{1},\ \mathbf{b},\ \mathbf{1}) \quad , \quad \mathbf{A'_3}(\mathbf{1},\ \mathbf{1},\ \mathbf{c})$$

dado que están sobre las rectas que unen el punto unidad con los vértices del triángulo fundamental.

Determinaremos las coordenadas de $\mathbf{P_3}$ cortando la recta $\overline{\mathbf{A_1A_2}}$, de ecuación

$$\mathbf{x_3 = 0}$$

por la $\overline{\mathbf{A'_1A'_2}}$, que tienen como ecuaciones paramétricas

$$\mathbf{x_1 = \lambda \cdot a + \mu}$$

$$\mathbf{x_2 = \lambda \quad + \mu \cdot b}$$

$$\mathbf{x_3 = \lambda \quad + \mu}$$

Resolviendo el sistema, formado por estas cuatro ecuaciones, resultará

$$\frac{\mathbf{x_1}}{\mathbf{x_2}} = \frac{\mathbf{a-1}}{\mathbf{1-b}} \quad , \quad \mathbf{x_3 = 0} \ ,$$

es decir el punto $\mathbf{P_3}$ tiene de coordenadas

$$\mathbf{P_3(a-1,\ 1-b,\ 0)} \ .$$

Un razonamiento análogo nos conducirá a que las coordenadas de los puntos $\mathbf{P_1}$ y $\mathbf{P_2}$ serían:

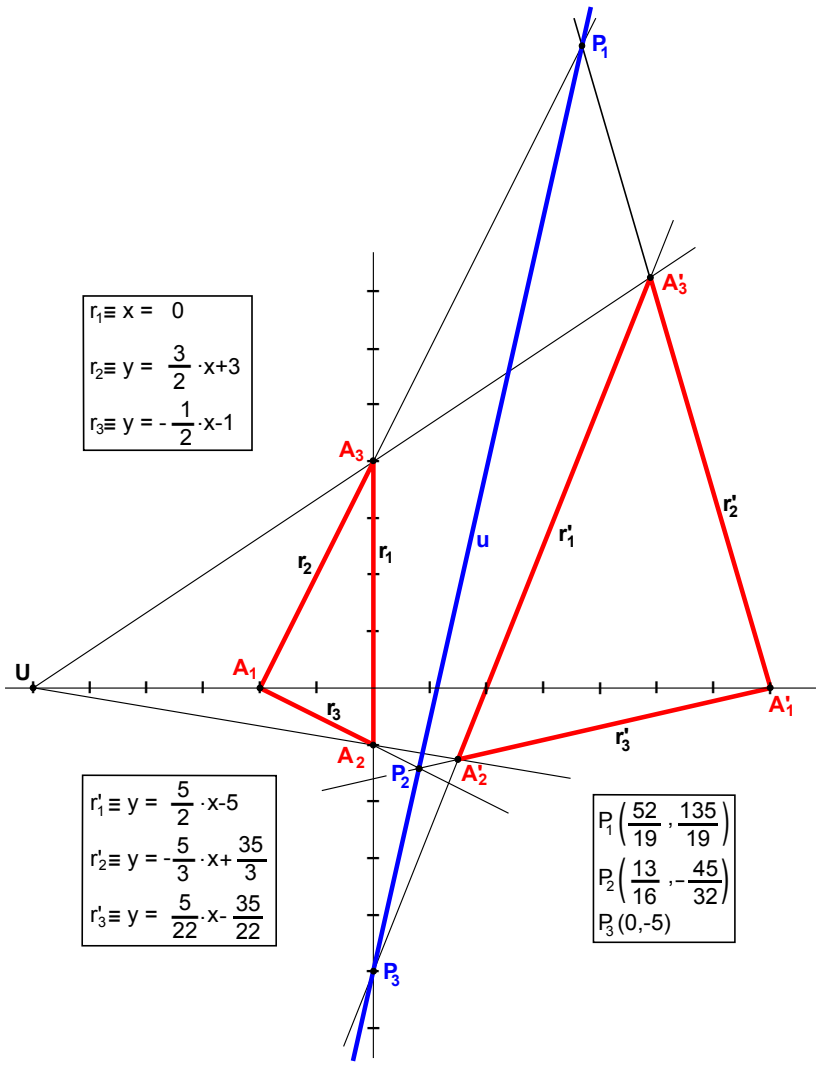
$$\mathbf{P_1(0,\ b-1,\ 1-c)}$$

$$\mathbf{P_2(1-a,\ 0,\ c-1)}$$

En consecuencia los puntos $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$ están alineados, puesto que se verifica:

$$\mathbf{P_1 + P_2 + P_3 = 0}$$

Ejemplo 1. Consideremos un planteamiento como el de la figura siguiente:



La comprobación de que $\mathbf{P_1},\ \mathbf{P_2},\ \mathbf{P_3}$, están alineados es inmediata. Efectivamente, se cumple:

$$\begin{vmatrix} \frac{\mathbf{52}}{\mathbf{19}} & \frac{\mathbf{135}}{\mathbf{19}} & \mathbf{1} \\ \\ \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{16}} & \frac{\mathbf{-45}}{\mathbf{32}} & \mathbf{1} \\ \\ \mathbf{0} & \mathbf{-5} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

En línea con lo que estableceremos en la Lección 37, del Tomo II digamos aquí que, de dos triángulos que verifican el Teorema de Desargues diremos que son **triángulos homológicos**, que el punto **U** es el **centro de homología** y que la recta $\overline{\mathbf{P_1P_2P_3}}$ es el **eje de la homología**. Asimismo diremos que los puntos $\mathbf{A_1},\ \mathbf{A_1'}$, son **puntos correspondientes**, como lo son los $\mathbf{A_2},\ \mathbf{A_2'}$, y los $\mathbf{A_3},\ \mathbf{A_3'}$. De los lados $\overline{\mathbf{A_1A_2}}$, $\overline{\mathbf{A_1'A_2'}}$ diremos que son **lados correspondientes**, como lo son los $\overline{\mathbf{A_2A_3}}$ y $\overline{\mathbf{A_2'A_3'}}$, y los $\overline{\mathbf{A_1A_3}}$ y $\overline{\mathbf{A_1'A_3'}}$.

16.2 Otros teoremas de Desargues

Sobre una recta, sobre la que se ha definido un sistema de referencia, se verifica la propiedad siguiente:

PROPOSICIÓN 1. Una condición necesaria y suficiente para que los tres pares de puntos $(\mathbf{A},\ \mathbf{A'})$, $(\mathbf{B},\ \mathbf{B'})$, $(\mathbf{C},\ \mathbf{C'})$ pertenezcan a una involución es que la razón doble de cuatro cualesquiera de esos puntos, entre los que figure al menos un punto de cada par, sea igual a la razón doble de los puntos correspondientes.

(Llamamos puntos correspondientes a los de un mismo par).

En efecto: Veamos en primer lugar que **la condición es necesaria**.

Tomemos cuatro puntos cualquiera de entre los seis puntos dados, por ejemplo **A** y $\mathbf{A'}$ del primer par, **B** del segundo y $\mathbf{C'}$ del tercero. Los puntos correspondientes son, respectivamente, $\mathbf{A'}$, **A**, $\mathbf{B'}$, **C**.

Dado que una involución es un caso particular de proyectividad, se verifica, sin más, que

$$(\mathbf{A\ A'\ B\ C'}) = (\mathbf{A'\ A\ B'\ C})$$

Por otra parte, **la condición es suficiente**.

Así, supongamos que se verifica la igualdad anterior; demostremos, entonces, que los tres pares dados pertenecen a una involución.

En efecto: Si consideramos la involución definida por los dos pares $(\mathbf{A},\ \mathbf{A'})$ y $(\mathbf{B},\ \mathbf{B'})$, y designamos por $\mathbf{C_1}$ el homólogo de **C** en esta involución, de lo que se trata es de establecer que $\mathbf{C_1}$ coincide con $\mathbf{C'}$.

Dado que $(\mathbf{A},\ \mathbf{A'})$, $(\mathbf{B},\ \mathbf{B'})$, $(\mathbf{C},\ \mathbf{C_1})$ están en involución, se verifica la relación.

$$(\mathbf{A\ A'\ B\ C_1}) = (\mathbf{A'\ A\ B'\ C}),$$

según la primera parte de la proposición.

Comparando esta relación con la

$$(\mathbf{A\ A'\ B\ C'}) = (\mathbf{A'\ A\ B'\ C})$$

obtendremos

$$(\mathbf{A}\ \mathbf{A}'\ \mathbf{B}\ \mathbf{C_1}) = (\mathbf{A}\ \mathbf{A}'\ \mathbf{B}\ \mathbf{C}').$$

lo que muestra qué $\mathbf{C_1}$ coincide con $\mathbf{C}'$.

Ejemplo 1. Consideremos una recta sobre la que hemos definido un sistema de referencia, por ejemplo cartesiano, y sobre ella los puntos **A**, **A′**; **B**, **B′**, **C**, **C′**, de coordenadas respectivas

$$\mathbf{1},\ \mathbf{3}\ ;\ \mathbf{2},\ \mathbf{4}\ ;\ -\mathbf{2},\ \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}\ .$$

Los pares $(\mathbf{A},\ \mathbf{A}')$, $(\mathbf{B},\ \mathbf{B}')$ definen una involución y de lo que se trata es de saber si la pareja $(\mathbf{C},\ \mathbf{C}')$ es de puntos correspondientes en dicha involución.

Puesto que

$$(\mathbf{A}\ \mathbf{A}'\ \mathbf{B}\ \mathbf{C}') = \left(\mathbf{1},\ \mathbf{3},\ \mathbf{2},\ \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}\right) = \frac{(\mathbf{1},\ \mathbf{3},\ \mathbf{2})}{\left(\mathbf{1},\ \mathbf{3},\ \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}\right)} = \frac{\dfrac{\mathbf{2}-\mathbf{1}}{\mathbf{2}-\mathbf{3}}}{\dfrac{\dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}-\mathbf{1}}{\dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}-\mathbf{3}}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$$

$$(\mathbf{A}'\ \mathbf{A}\ \mathbf{B}'\ \mathbf{C}) = (\mathbf{3},\ \mathbf{1},\ \mathbf{4},\ -\mathbf{2}) = \frac{(\mathbf{3},\ \mathbf{1},\ \mathbf{4})}{(\mathbf{3},\ \mathbf{1},\ -\mathbf{2})} = \frac{\dfrac{\mathbf{4}-\mathbf{3}}{\mathbf{4}-\mathbf{1}}}{\dfrac{-\mathbf{2}-\mathbf{3}}{-\mathbf{2}-\mathbf{1}}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$$

los puntos **C**, **C′** son puntos correspondientes en la involución dada.

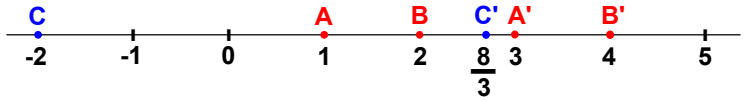
Sin embargo, los puntos **E**, **E′** de coordenadas respectivas **-1**, **5** no lo son, puesto que:

$$(\mathbf{A},\ \mathbf{A}',\ \mathbf{B},\ \mathbf{E}') = (\mathbf{1},\ \mathbf{3},\ \mathbf{2},\ \mathbf{5}) = \frac{(\mathbf{1},\ \mathbf{3},\ \mathbf{2})}{(\mathbf{1},\ \mathbf{3},\ \mathbf{5})} = \frac{\dfrac{\mathbf{2}-\mathbf{1}}{\mathbf{2}-\mathbf{3}}}{\dfrac{\mathbf{5}-\mathbf{1}}{\mathbf{5}-\mathbf{3}}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

$$(\mathbf{A}',\ \mathbf{A},\ \mathbf{B}',\ \mathbf{E}) = (\mathbf{3},\ \mathbf{1},\ \mathbf{4},\ -\mathbf{1}) = \frac{(\mathbf{3},\ \mathbf{1},\ \mathbf{4})}{(\mathbf{3},\ \mathbf{1},\ -\mathbf{1})} = \frac{\dfrac{\mathbf{4}-\mathbf{3}}{\mathbf{4}-\mathbf{1}}}{\dfrac{-\mathbf{1}-\mathbf{3}}{-\mathbf{1}-\mathbf{1}}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$$

En este ejemplo hemos hecho aplicación directa de la proposición anterior; en el siguiente resolveremos el problema manejando la ecuación de la involución que generan dos pares de puntos correspondientes. Evidentemente el resultado será el mismo.

Ejemplo 2. Consideremos una recta, y sobre ella las dos parejas de puntos $(\mathbf{A},\ \mathbf{A}')$, $(\mathbf{B},\ \mathbf{B}')$, que nos definen una involución. Si las coordenadas de los puntos dados tienen respecto un sistema de referencia cartesiano **(O, U)** las coordenadas que aparecen en la figura siguiente:



se trata de determinar, en primer lugar, la ecuación de la involución, que tiene como correspondientes los puntos de las parejas dadas.

Dado que la ecuación de una involución tiene la forma

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'+\mathbf{b}\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{x}')+\mathbf{c}=\mathbf{0}$$

al sustituir los valores de las coordenadas de los puntos correspondientes tendremos

$$\mathbf{1}\cdot\mathbf{3}+\mathbf{b}\cdot(\mathbf{1}+\mathbf{3})+\mathbf{c}=\mathbf{0}$$

$$\mathbf{2}\cdot\mathbf{4}+\mathbf{b}\cdot(\mathbf{2}+\mathbf{4})+\mathbf{c}=\mathbf{0}$$

es decir, el sistema

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{3}+\mathbf{4}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}\\ \mathbf{8}+\mathbf{6}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}\end{array}\right\}$$

que resuelto nos da

$$\mathbf{b}=-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\quad,\quad\mathbf{c}=\mathbf{7}\,.$$

Luego la ecuación de la involución que nos interesa es

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{x}')+\mathbf{7}=\mathbf{0}$$

Establecida esta ecuación resulta inmediato determinar pares de puntos correspondientes, así como decidir acerca de los que no lo son.

Así, los puntos **C**, **D**, de coordenadas respectivas **-2**, $\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}$, son puntos correspondientes en la involución dada, puesto que verifican la ecuación de la misma

$$(-\mathbf{2})\cdot\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\cdot\left((-\mathbf{2})+\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}\right)+\mathbf{7}=\mathbf{0}$$

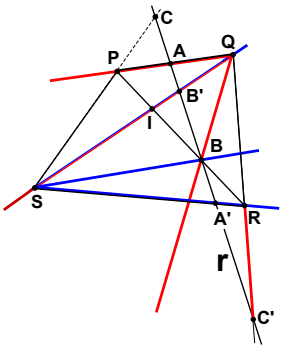
Sin embargo, los puntos **E**, **F**, de coordenadas respectivas **-1**, **5**, no son puntos correspondientes en la involución que nos ocupa, puesto que

$$(-\mathbf{1})\cdot\mathbf{5}-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\cdot((-\mathbf{1})+\mathbf{5})+\mathbf{7}=-\mathbf{8}\neq\mathbf{0}$$

Las dos propiedades que siguen son también, a veces, conocidas como Teoremas de Desargues.

PROPOSICIÓN 2. Una secante cualquiera corta a los pares de lados opuestos de un cuadrivértice completo en tres pares de puntos que pertenecen a una misma involución.

En efecto: Sea el cuadrivértice completo definido por los cuatro puntos **P**, **Q**, **R**, **S**, siendo sus lados opuestos los $\overline{\mathbf{PQ}}$ y $\overline{\mathbf{RS}}$, $\overline{\mathbf{PR}}$ y $\overline{\mathbf{QS}}$, $\overline{\mathbf{PS}}$ y $\overline{\mathbf{QR}}$.



Una recta cualquiera, **r**, corta a los pares de lados opuestos en los pares de puntos $(\mathbf{A},\ \mathbf{A}')$, $(\mathbf{B},\ \mathbf{B}')$, $(\mathbf{C},\ \mathbf{C}')$, respectivamente. Se trata de demostrar que estas tres parejas son de puntos correspondientes en una involución.

Para ello, consideremos un lado cualquiera, por ejemplo el $\overline{\mathbf{PR}}$, y sobre él los puntos **I**, **B**, en los que es cortado, respectivamente, por el lado opuesto $\overline{\mathbf{QS}}$ y la secante **r**.

Uniendo, ahora, los cuatro puntos **P**, **R**, **I**, **B** con los vértices **Q**, **S**, obtenemos dos haces de cuatro rectas que tienen la misma razón doble: **(P, R, I, B)**.

Cortando esos dos haces por la recta **r**, tendremos

$$(\mathbf{A}\ \mathbf{C}'\ \mathbf{B}'\ \mathbf{B}) = (\mathbf{C}\ \mathbf{A}'\ \mathbf{B}'\ \mathbf{B})$$

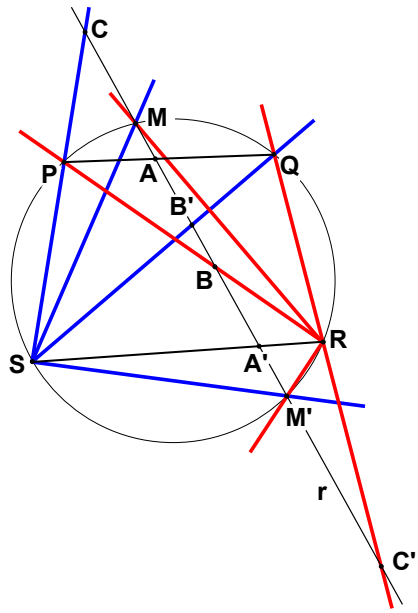
igualdad que podemos escribir como sigue

$$(\mathbf{A}\ \mathbf{C}'\ \mathbf{B}'\ \mathbf{B}) = (\mathbf{A}'\ \mathbf{C}\ \mathbf{B}\ \mathbf{B}')$$

igualdad que nos muestra, en virtud de la proposición anterior, que las parejas de puntos $(\mathbf{A},\ \mathbf{A}')$, $(\mathbf{B},\ \mathbf{B}')$, $(\mathbf{C},\ \mathbf{C}')$ pertenecen a una misma involución.

PROPOSICIÓN 3. Para todo cuadrivértice completo inscrito en una circunferencia, cualquier secante que corte a los pares de lados opuestos y a la circunferencia lo hace en cuatro pares de puntos homólogos en una misma involución.

En efecto: Sea el cuadrivértice completo definido por los cuatro puntos **P**, **Q**, **R**, **S**, situados sobre una circunferencia y designemos, como en la proposición anterior, por $(\mathbf{A},\ \mathbf{A}')$, $(\mathbf{B},\ \mathbf{B}')$, $(\mathbf{C},\ \mathbf{C}')$ los puntos en los que una secante cualquiera, **r**, corta a los pares de lados opuestos $(\overline{\mathbf{PQ}},\ \overline{\mathbf{RS}})$, $(\overline{\mathbf{PR}},\ \overline{\mathbf{QS}})$, $(\overline{\mathbf{PS}},\ \overline{\mathbf{QR}})$, y por $(\mathbf{M},\ \mathbf{M}')$ los puntos en los que **r** corta a la circunferencia.



Puesto que los puntos **P**, **Q**, **R**, **S**, **M**, **M′** están sobre una circunferencia, si unimos los cuatro puntos **P**, **Q**, **M**, **M′** con los vértices **R**, **S** obtenemos dos haces de cuatro rectas que tienen la misma razón doble: **(P**, **Q**, **M**, **M′)**.

Cortando esos dos haces por la recta **r**, tendremos

$$(\mathbf{B},\ \mathbf{C}',\ \mathbf{M},\ \mathbf{M}') = (\mathbf{C},\ \mathbf{B}',\ \mathbf{M},\ \mathbf{M}')$$

igualdad que podemos escribir como sigue

$$(\mathbf{B},\ \mathbf{C}',\ \mathbf{M},\ \mathbf{M}') = (\mathbf{B}',\ \mathbf{C},\ \mathbf{M}',\ \mathbf{M})$$

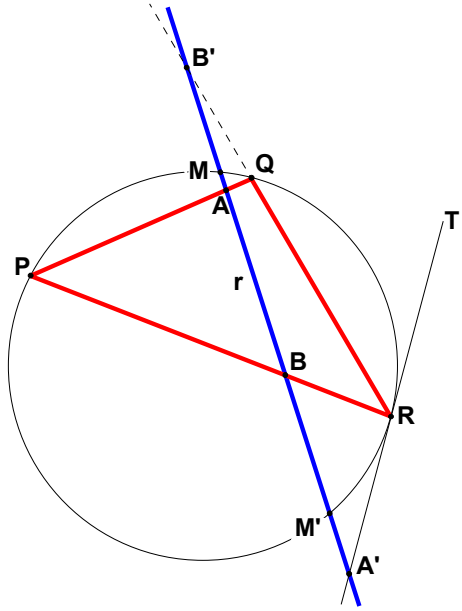
igualdad que nos muestra que las parejas de puntos $(\mathbf{B},\ \mathbf{B}')$, $(\mathbf{C},\ \mathbf{C}')$, $(\mathbf{M},\ \mathbf{M}')$ pertenecen a una misma involución.

Significa lo anterior que los puntos **M**, **M′** son homólogos en la involución definida por las dos parejas $(\mathbf{B},\ \mathbf{B}')$, $(\mathbf{C},\ \mathbf{C}')$.

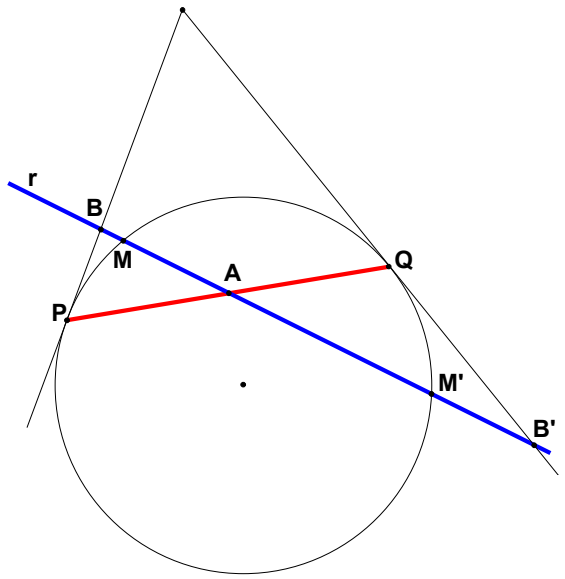
Por otra parte, según la proposición anterior, los puntos **A**, **A′** son también homólogos en la misma involución.

Por tanto, podemos concluir que los cuatro pares de puntos $(\mathbf{A},\ \mathbf{A}')$, $(\mathbf{B},\ \mathbf{B}')$, $(\mathbf{C},\ \mathbf{C}')$, $(\mathbf{M},\ \mathbf{M}')$ son pares de puntos homólogos en una misma involución.

Ejemplo 3. Sobre la figura anterior, supongamos que los puntos **P**, **Q**, **R** permanecen fijos sobre la circunferencia, y que el punto **S** se acerca indefinidamente al punto **R**, hasta confundirse con él; en esas condiciones, la recta $\overline{\mathbf{RS}}$ tiene por límite la tangente a la circunferencia en el punto **R**, sea la $\overline{\mathbf{RT}}$, y las rectas $\overline{\mathbf{PS}}$ y $\overline{\mathbf{QS}}$ tienen respectivamente por límites las $\overline{\mathbf{PR}}$, $\overline{\mathbf{QR}}$. El resultado puede enunciarse como sigue: Consideremos un triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{PQR}}$ inscrito en una circunferencia y una recta **r** que corta a $\overline{\mathbf{PQ}}$, $\overline{\mathbf{PR}}$, $\overline{\mathbf{QR}}$ y a la tangente $\overline{\mathbf{RT}}$, respectivamente en los puntos **A**, **B**, **B′**, **A′**, y a la circunferencia en los puntos **M**, **M′**. En estas condiciones podemos afirmar que: los tres pares de puntos $(\mathbf{A},\ \mathbf{A}')$, $(\mathbf{B},\ \mathbf{B}')$, $(\mathbf{M},\ \mathbf{M}')$ pertenecen a una misma involución.



Ejemplo 4. Sobre la figura de la proposición 3, supongamos ahora que los puntos **P**, **Q** permanecen fijos mientras el **R** se aproxima indefinidamente al **P**, y el **S** lo hace al **Q**. El resultado sería que las rectas $\overline{\mathbf{PR}}$, $\overline{\mathbf{QS}}$, tendrían por límite las tangentes en **P**, **Q**, mientras que la recta $\overline{\mathbf{RS}}$ tendría por límite la $\overline{\mathbf{PQ}}$. El resultado puede enunciarse como sigue: Consideremos una cuerda $\overline{\mathbf{PQ}}$ de una circunferencia y una recta, **r**, que corta a dicha cuerda en un punto **A**, y que corta asimismo a las tangentes en **P** y **Q**, respectivamente en los puntos **B** y $\mathbf{B}'$; por otra parte dicha recta corta a la circunferencia en los puntos **M** y $\mathbf{M}'$. En estas condiciones podemos afirmar que **A** es un punto doble de la involución definida por los pares $(\mathbf{B},\ \mathbf{B}')$ y $(\mathbf{M},\ \mathbf{M}')$.



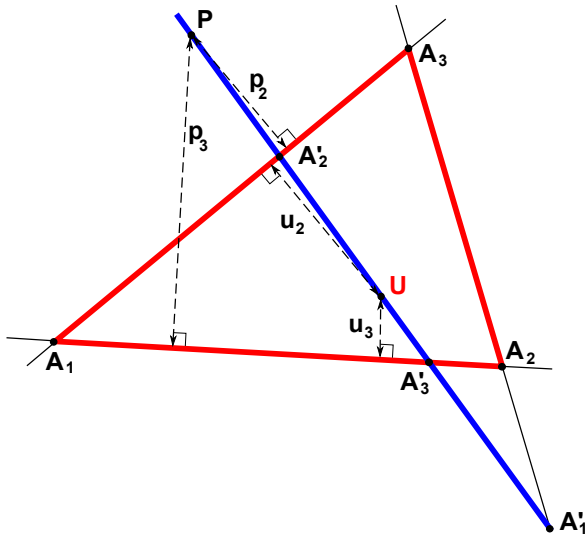
Lección 17.- INTERPRETACIÓN EUCLÍDEA DE LAS COORDENADAS PROYECTIVAS

17.1 Interpretación euclídea de las coordenadas proyectivas
17.2 Las coordenadas cartesianas como caso particular de las proyectivas

17.1 Interpretación euclídea de las coordenadas proyectivas.

Sea $(\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \mathbf{A_3}, \mathbf{U})$ la figura fundamental de un sistema de coordenadas proyectivas puntuales. Tal como ya sabemos, la coordenada absoluta $\boldsymbol{\lambda_1}$ de un punto $\mathbf{P}$ es:

$$\boldsymbol{\lambda_1} = \mathbf{A_1}(\mathbf{A_2}\ \mathbf{A_3}\ \mathbf{U}\ \mathbf{P})$$



Al cortar los lados del triángulo fundamental por la recta $\overline{\mathbf{PU}}$, nos quedan determinados los puntos $\mathbf{A'_1}$, $\mathbf{A'_2}$, $\mathbf{A'_3}$, lo que nos permite escribir

$$\boldsymbol{\lambda_1} = (\mathbf{A'_3}\ \mathbf{A'_2}\ \mathbf{U}\ \mathbf{P}) = (\mathbf{U}\ \mathbf{P}\ \mathbf{A'_3}\ \mathbf{A'_2}) = (\mathbf{P}\ \mathbf{U}\ \mathbf{A'_2}\ \mathbf{A'_3}) = \frac{(\mathbf{P}\ \mathbf{U}\ \mathbf{A'_2})}{(\mathbf{P}\ \mathbf{U}\ \mathbf{A'_3})}$$

Sean ahora $\mathbf{p_3}$, $\mathbf{u_3}$ las distancias de $\mathbf{P}$, $\mathbf{U}$ a la recta $\overline{\mathbf{A_1A_2}}$, afectadas del mismo signo, o de signo contrario, según que $\mathbf{P}$, $\mathbf{U}$, estén en un mismo semiplano, o en semi-planos distintos, respecto de $\overline{\mathbf{A_1A_2}}$. Análogamente, sean $\mathbf{p_2}$, $\mathbf{u_2}$ las distancias con signo de $\mathbf{P}$, $\mathbf{U}$, a la recta $\overline{\mathbf{A_1A_3}}$. Se tendrá

$$(\mathbf{PUA'_2}) = \frac{\overline{\mathbf{PA'_2}}}{\overline{\mathbf{UA'_2}}} = \frac{\mathbf{p_2}}{\mathbf{u_2}} \quad , \quad (\mathbf{PUA'_3}) = \frac{\overline{\mathbf{PA'_3}}}{\overline{\mathbf{UA'_3}}} = \frac{\mathbf{p_3}}{\mathbf{u_3}}$$

y por tanto

$$\lambda_1 = \frac{p_2}{u_2} : \frac{p_3}{u_3}$$

En forma análoga se establecería

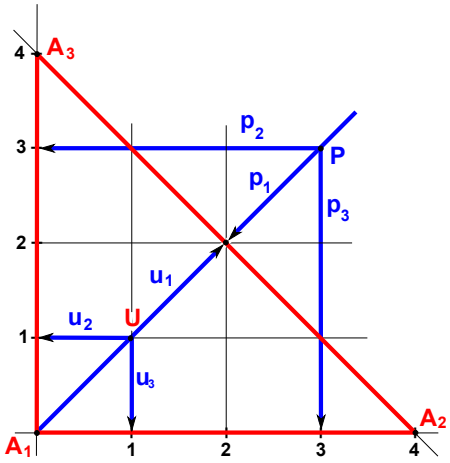
$$\lambda_2 = \frac{p_3}{u_3} : \frac{p_1}{u_1} \quad , \quad \lambda_3 = \frac{p_1}{u_1} : \frac{p_2}{u_2} \ .$$

De las expresiones obtenidas para la λ_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$, si pasamos **P** a coordenadas homogéneas, resulta

$$x_1 \ : \ x_2 \ : \ x_3 = \frac{p_1}{u_1} : \frac{p_2}{u_2} : \frac{p_3}{u_3} \quad ,$$

es decir: **Podemos tomar como coordenadas homogéneas, del punto P, las distancias de P a los lados del triángulo fundamental, medidas con las distancias del punto unidad a dichos lados, ordenadamente, y teniendo en cuenta que resultan del mismo signo, o de signo opuesto, según que P y U estén respecto del lado correspondiente en el mismo o distinto semiplano.**

Ejemplo 1. Sea $(A_1,\ A_2,\ A_3,\ U)$ la figura fundamental de un sistema de coordenadas proyectivas puntuales, y **P** un punto del que vamos a determinar tanto sus coordenadas proyectivas como sus coordenadas homogéneas.



Los valores, medidos, son:

$$\begin{aligned} p_1 &= \sqrt{2} \quad , \quad u_1 = -\sqrt{2} \\ p_2 &= 3 \quad , \quad u_2 = 1 \\ p_3 &= 3 \quad , \quad u_3 = 1 \end{aligned}$$

luego las coordenadas proyectivas puntuales de **P** serán:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{p_2}{u_2} : \frac{p_3}{u_3} = \frac{3}{1} : \frac{3}{1} = 1 \\ \lambda_2 &= \frac{p_3}{u_3} : \frac{p_1}{u_1} = \frac{3}{1} : \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -3 \\ \lambda_3 &= \frac{p_1}{u_1} : \frac{p_2}{u_2} = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} : \frac{3}{1} = -\frac{1}{3} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow P\left(1,\ -3,\ -\frac{1}{3}\right)$$

y en cuanto a sus coordenadas homogéneas serán:

$$\mathbf{x_1 : x_2 : x_3 = \frac{p_1}{u_1} : \frac{p_2}{u_2} : \frac{p_3}{u_3} = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} : \frac{3}{1} : \frac{3}{1} = -1 : 3 : 3}$$

es decir

$$\mathbf{P(-1,\ 3,\ 3)}$$

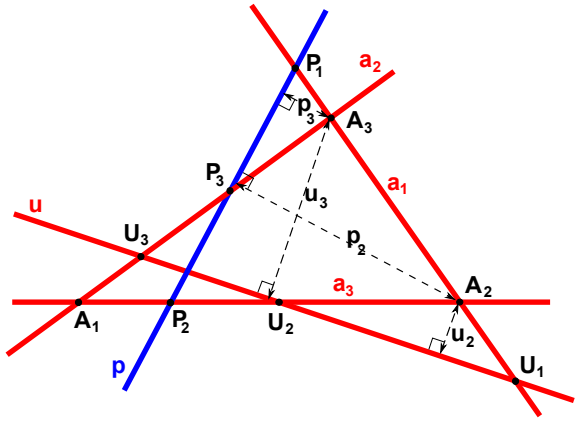
o cualquier terna que resulte de multiplicar ésta por un número distinto de cero.

Veamos ahora que, para las coordenadas tangenciales de una recta **p** resulta una interpretación análoga. Consideremos la coordenada proyectiva absoluta $\boldsymbol{\mu_1}$ de la recta **p**.

$$\boldsymbol{\mu_1 = a_1(a_2\ a_3\ u\ p)}$$

y sean $\mathbf{A_3},\ \mathbf{A_2},\ \mathbf{U_1},\ \mathbf{P_1}$ los puntos de intersección de $\mathbf{a_1}$ con la cuaterna de rectas $\mathbf{a_2},\ \mathbf{a_3},\ \mathbf{u},\ \mathbf{p}$, respectivamente.

Designemos por $\mathbf{p_2},\ \mathbf{p_3}$ las distancias de $\mathbf{A_2},\ \mathbf{A_3}$ a **p**, afectadas del mismo signo, o signo contrario, según que $\mathbf{A_2},\ \mathbf{A_3}$ estén en un mismo semiplano respecto de **p** o en distinto.



Análogamente, sean $\mathbf{u_2},\ \mathbf{u_3}$ las distancias de $\mathbf{A_2},\ \mathbf{A_3}$ a la recta **u**, con el mismo convenio respecto del signo.

Se tiene, entonces

$$\boldsymbol{\mu_1 = (A_3\ A_2\ U_1\ P_1) = \frac{(A_3\ A_2\ U_1)}{(A_3\ A_2\ P_1)} = \frac{\overline{A_3U_1}}{\overline{A_2U_1}} : \frac{\overline{A_3P_1}}{\overline{A_2P_1}} = \frac{u_3}{u_2} : \frac{p_3}{p_2} = \frac{p_2}{u_2} : \frac{p_3}{u_3}}$$

Un razonamiento análogo nos proporcionaría

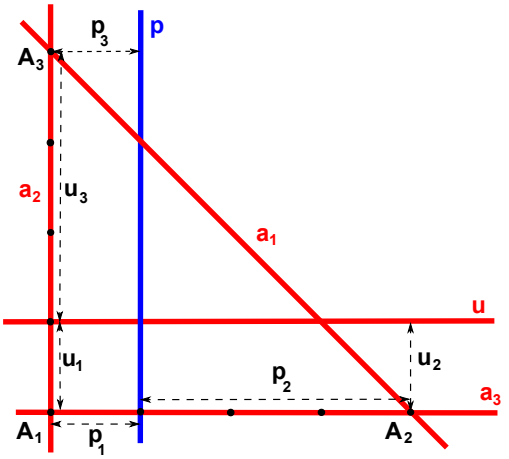
$$\boldsymbol{\mu_2 = \frac{p_3}{u_3} : \frac{p_1}{u_1} \quad , \quad \mu_3 = \frac{p_1}{u_1} : \frac{p_3}{u_3}}$$

De las expresiones obtenidas para las $\boldsymbol{\mu_i}$ $(\mathbf{i = 1,\ 2,\ 3})$, si pasamos **p** a coordenadas homogéneas, resulta

$$\mathbf{v_1 : v_2 : v_3 = \frac{p_1}{u_1} : \frac{p_2}{u_2} : \frac{p_3}{u_3}}$$

es decir: **Podemos tomar como coordenadas homogéneas de la recta p, las distancias de los vértices del triángulo fundamental a p, medidas con las distancias de dichos vértices a la recta u**; en cuanto al signo, se tendrá en cuenta que cada una de las rectas **p**, **u**, dividen al plano en dos semi-planos, y que uno de estos puede tomarse arbitrariamente como puntos de distancia positiva de la recta **p** ó **u**, siendo entonces, el signo de $\mathbf{v_i}$ el del cociente $\dfrac{\mathbf{p_i}}{\mathbf{u_i}}$

Ejemplo 2. Sea $(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}, \mathbf{u})$ la figura fundamental de un sistema de coordenadas proyectivas tangenciales y **p** una recta de la que vamos a determinar tanto sus coordenadas tangenciales como sus coordenadas tangenciales homogéneas.



Los valores medidos son:

$$\mathbf{p_1} = 2 \quad , \quad \mathbf{u_1} = 1$$
$$\mathbf{p_2} = -2 \quad , \quad \mathbf{u_2} = 1$$
$$\mathbf{p_3} = 2 \quad , \quad \mathbf{u_3} = -3$$

luego las coordenadas proyectivas tangenciales de **p** serán:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\mu_1} &= \frac{\mathbf{p_2}}{\mathbf{u_2}} : \frac{\mathbf{p_3}}{\mathbf{u_3}} = \frac{-2}{1} : \frac{2}{-3} = 3 \\ \boldsymbol{\mu_2} &= \frac{\mathbf{p_3}}{\mathbf{u_3}} : \frac{\mathbf{p_1}}{\mathbf{u_1}} = \frac{2}{-3} : \frac{2}{1} = -\frac{1}{3} \\ \boldsymbol{\mu_3} &= \frac{\mathbf{p_1}}{\mathbf{u_1}} : \frac{\mathbf{p_2}}{\mathbf{u_2}} = \frac{2}{1} : \frac{-2}{1} = -1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \mathbf{p}\left(3, -\frac{1}{3}, -1\right)$$

y en cuanto a las coordenadas tangenciales homogéneas serán.

$$\mathbf{v_1} : \mathbf{v_2} : \mathbf{v_3} = \frac{\mathbf{p_1}}{\mathbf{u_1}} : \frac{\mathbf{p_2}}{\mathbf{u_2}} : \frac{\mathbf{p_3}}{\mathbf{u_3}} = \frac{2}{1} : \frac{-2}{1} : \frac{2}{-3} = 2 : -2 : \frac{2}{-3}$$

es decir

$$\mathbf{p}\left(2, -2, \frac{-2}{3}\right)$$

o cualquier terna que resulte de multiplicar ésta por un número distinto de cero.

17.2 Las coordenadas cartesianas como caso particular de las proyectivas

Sea $(\mathbf{A_1},\ \mathbf{A_2},\ \mathbf{A_3},\ \mathbf{U})$ la figura fundamental de un sistema de coordenadas proyectivas puntuales. Vamos a ver que, **si suponemos que $\overline{\mathbf{A_1A_2}}$ es la recta impropia, y el punto U está sobre la bisectriz del ángulo $\widehat{\mathbf{A_1A_3A_2}}$ el sistema resultará ser el de las coordenadas cartesianas ordinarias.**

En efecto: Las coordenadas absolutas $\boldsymbol{\lambda_1}, \boldsymbol{\lambda_2}$, del punto **P** valdrán:

$$\boldsymbol{\lambda_1} = \mathbf{A_1}(\mathbf{A_2}\ \mathbf{A_3}\ \mathbf{U}\ \mathbf{P}) = (\boldsymbol{\infty}\ \mathbf{A_3}\ \mathbf{U_1}\ \mathbf{P_1}) = \frac{\overline{\mathbf{A_3P_1}}}{\overline{\mathbf{A_3U_1}}}$$

$$\boldsymbol{\lambda_2} = \mathbf{A_2}(\mathbf{A_3}\ \mathbf{A_1}\ \mathbf{U}\ \mathbf{P}) = (\mathbf{A_3}\ \boldsymbol{\infty}\ \mathbf{U_2}\ \mathbf{P_2}) = \frac{\overline{\mathbf{A_3U_2}}}{\overline{\mathbf{A_3P_2}}}\ ;$$

y pasando a homogéneas

$$\frac{\mathbf{x_2}}{\mathbf{x_3}} = \frac{\overline{\mathbf{A_3P_1}}}{\overline{\mathbf{A_3U_1}}} \quad , \quad \frac{\mathbf{x_1}}{\mathbf{x_3}} = \frac{\overline{\mathbf{A_3P_2}}}{\overline{\mathbf{A_3U_2}}}$$

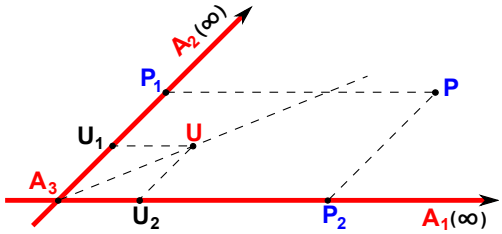
Bastará, entonces, tomar

$$\overline{\mathbf{A_3U_1}} = \overline{\mathbf{A_3U_2}} = \mathbf{1}$$

para establecer que

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x_1}}{\mathbf{x_3}} \quad , \quad \mathbf{y} = \frac{\mathbf{x_2}}{\mathbf{x_3}}\ ,$$

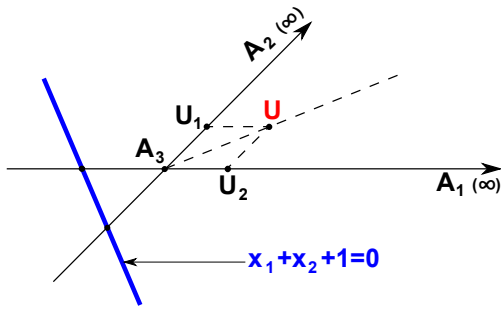
es decir: Las coordenadas del punto **P** son las medidas, con la unidad adoptada de los segmentos determinados sobre los ejes $\overline{\mathbf{A_3A_1}}(\mathbf{x})$, $\overline{\mathbf{A_3A_2}}(\mathbf{y})$, por el punto $\mathbf{A_3}$, y las proyecciones de **P** sobre cada eje paralelamente al otro.



Particularizando el sistema proyectivo a uno cartesiano, como acabamos de ver, resulta interesante observar que la recta

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{1} = \mathbf{0}$$

corta a los ejes en los puntos $(-\mathbf{1},\ \mathbf{0})$, $(\mathbf{0},\ -\mathbf{1})$, respectivamente conjugados armónicos de $\mathbf{U_2}$ respecto de $\mathbf{A_3}$, $\mathbf{A_1}$, y de $\mathbf{U_1}$ respecto de $\mathbf{A_3}$, $\mathbf{A_2}$; en consecuencia, dicha recta es la **polar** de **U** respecto del triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{A_1A_2A_3}}$.



CAPÍTULO VI

Lección 18.-HOMOTECIAS

18.1 Figuras homotéticas
18.2 Homotecias entre circunferencias
18.3 Circunferencias inversas y homotecias

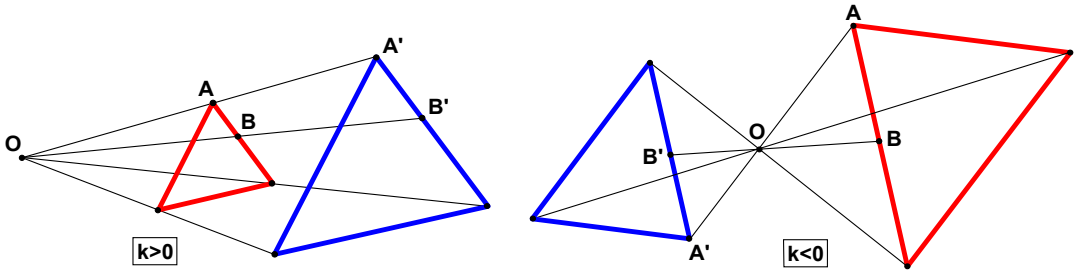
18.1 Figuras homotéticas

Fijados un punto **O** y un número real $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$, podemos hacer corresponder a todo punto **A** del plano, distinto del **O** otro punto $\mathbf{A}'$, sobre la recta $\overline{\mathbf{OA}}$, que verifique:

$$\frac{\overline{\mathbf{OA}'}}{\overline{\mathbf{OA}}} = \mathbf{k}$$

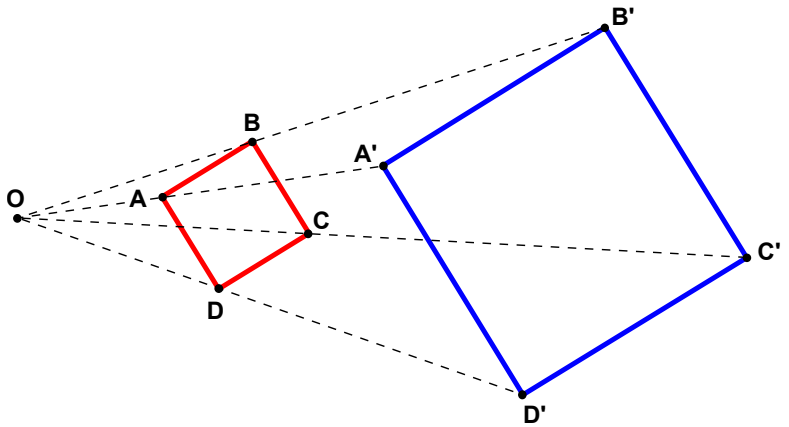
El punto $\mathbf{A}'$ estará situado, evidentemente, en la semi-recta $\overline{\mathbf{OA}}$ si **k** es positivo y en la opuesta si **k** es negativo.

Llamaremos **homotecia de centro O y razón k** a la correspondencia así definida.

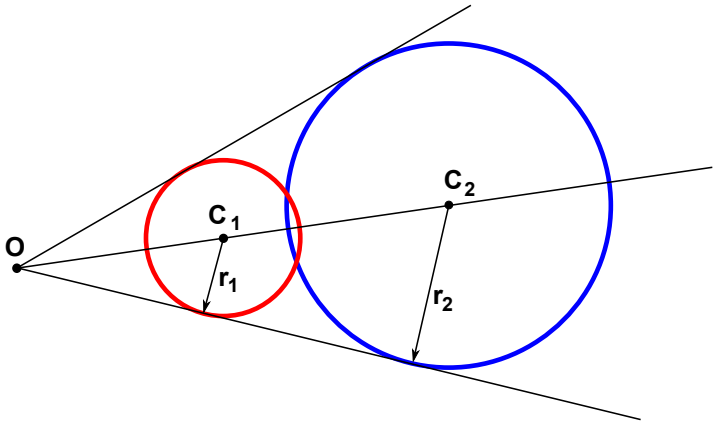


Llamaremos **figuras homotéticas** a aquellas cuyos puntos se corresponden en una homotecia.

Ejemplo 1. Fijado el punto **O**, y el valor $\mathbf{k} = \mathbf{2,5}$, los cuadrados de vértices **A**, **B**, **C**, **D** y $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'$, $\mathbf{D}'$ son homotéticos.



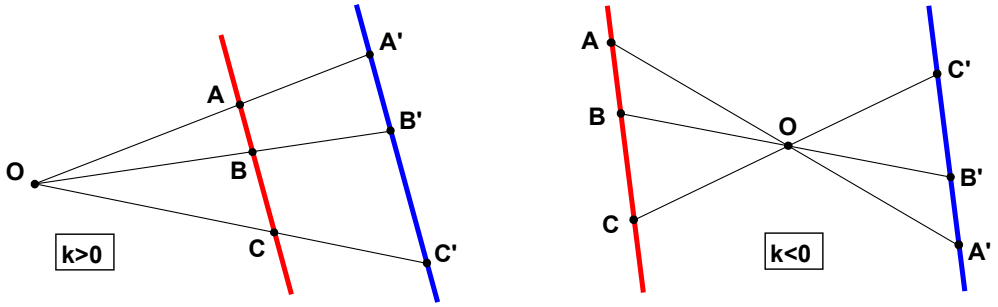
Ejemplo 2. Fijado el punto **O**, y el valor **k=2**, las circunferencias de centros $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$, y radios respectivos $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$ son homotéticas.



Observemos que el valor de **k** es el cociente $\dfrac{\overline{\mathbf{OC_2}}}{\overline{\mathbf{OC_1}}}$ y también el $\dfrac{\mathbf{r_2}}{\mathbf{r_1}}$.
Las dos propiedades siguientes caracterizan aún más el concepto de homotecia:

PROPOSICIÓN 1. Dada una homotecia de centro O, los homólogos $\mathbf{A'}$, $\mathbf{B'}$, $\mathbf{C'}$,... de los puntos A, B, C,... de una recta r, que no pasa por O, pertenecen a otra recta $\mathbf{r'}$, paralela a r y en el mismo orden.

En efecto: En primer lugar, las proporciones $\dfrac{\overline{\mathbf{OA}}}{\overline{\mathbf{OA'}}} = \dfrac{\overline{\mathbf{OB}}}{\overline{\mathbf{OB'}}} = \dfrac{\overline{\mathbf{OC}}}{\overline{\mathbf{OC'}}}$ prueban que la recta $\overline{\mathbf{B'A'}}$ es paralela a la $\overline{\mathbf{BA}}$, y la $\overline{\mathbf{B'C'}}$ es paralela a la $\overline{\mathbf{BC}}$. Como por $\mathbf{B'}$ sólo pasa una paralela a $\overline{\mathbf{AB}}$, resultará que los puntos $\mathbf{A'}$, $\mathbf{B'}$, $\mathbf{C'}$ están alineados.
Además, si el punto **B** está entre los **A** y **C**, la semi-recta $\overline{\mathbf{OB}}$ estará en el ángulo convexo $\widehat{\mathbf{AOC}}$, y la semi-recta $\overline{\mathbf{OB'}}$, opuesta a la $\overline{\mathbf{OB}}$, estará en el ángulo convexo $\widehat{\mathbf{A'OC'}}$, opuesto por el vértice al $\widehat{\mathbf{AOC}}$.



Tal como se observa en las figuras, tanto si $\mathbf{k > 0}$ como si $\mathbf{k < 0}$, el punto $\mathbf{B'}$ está entre los $\mathbf{A'}$ y $\mathbf{C'}$ es decir, se conserva el orden.

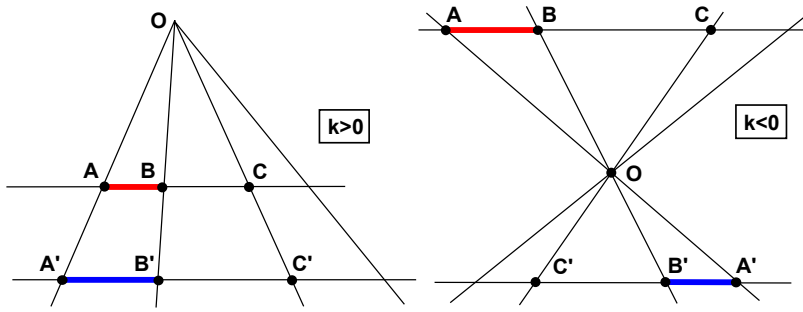
PROPOSICIÓN 2. Dada una homotecia de centro O, la razón entre dos segmentos homólogos cualesquiera es constante, e igual a la razón de homotecia.

En efecto: Del Teorema de Thales se deduce la proporción $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = k$, propiedad válida aún en el caso de que $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ estén alineados con el punto **O**; para verlo basta constatar que de $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}$, resulta

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA'} - \overline{OB'}}{\overline{OA} - \overline{OB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

puesto que en general se verifica que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Longrightarrow \frac{a}{c} - 1 = \frac{b}{d} - 1 \Longrightarrow \frac{a-c}{c} = \frac{b-d}{d} \Longrightarrow \frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d}$$



En consecuencia, si los segmentos $\overline{A'B'}$ y $\overline{A'C'}$son homólogos, respectivamente, de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, se tendrá

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

A modo de resumen de lo que hemos venido estableciendo, y caracterizando a las homotecias, destacamos los siguientes puntos:

1.- Toda homotecia conserva la alineación, el orden de los puntos homólogos y el sentido del plano.

2.- El único punto doble es el centro.

3.- Las únicas rectas dobles son las que pasan por el centro

4.- Dos rectas homólogas que no pasan por el centro son paralelas

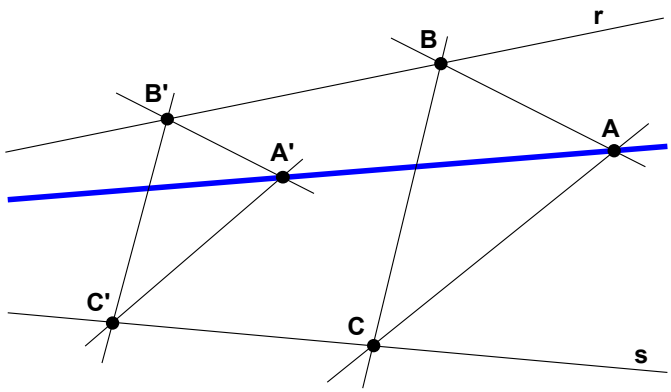
5.- Los segmentos homólogos son proporcionales

6.- La razón de las distancias de un punto a otros dos de una figura es igual a la razón de las distancias entre los puntos homólogos.

Ejemplo 3. Como aplicación sencilla del concepto de homotecia vamos a trazar, por un punto **A**, una recta concurrente con otras dos, **r** y **s**, con punto de intersección inaccesible.

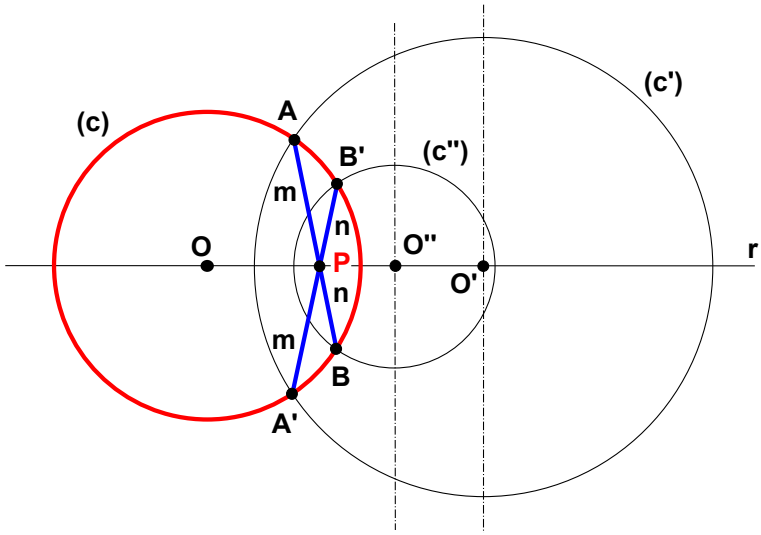
Bastará trazar, como se indica en la figura, un triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{ABC}}$, con el punto **B** sobre la recta **r** y el **C** sobre la **s**, y luego construir un homotético cualquiera $\mathbf{A'B'C'}$, simplemente trazando las paralelas procedentes.

La recta $\overline{\mathbf{AA'}}$ resultará ser la recta pedida.



Ejemplo 4. Dadas una circunferencia **(c)**, y un punto **P**, interior a ella y sobre **r**, se trata de trazar una cuerda que quede dividida por **P** en partes proporcionales a dos números, o segmentos dados $\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}$.

(En el dibujo hemos supuesto que $\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$)

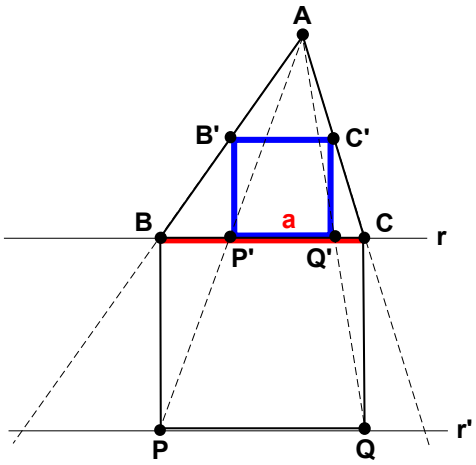


Una homotecia de centro **P** y de razón $-\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}$ transforma un extremo de la cuerda en el otro. Para su determinación trazaremos la homotética $(\mathbf{c'})$ de $(\mathbf{c})$, que cortará a $(\mathbf{c})$ en los puntos **A** y $\mathbf{A'}$ que nos dan la solución.

$$\frac{\overline{\mathbf{AP}}}{\overline{\mathbf{PB}}} = \frac{\overline{\mathbf{A'P}}}{\overline{\mathbf{PB'}}} = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}$$

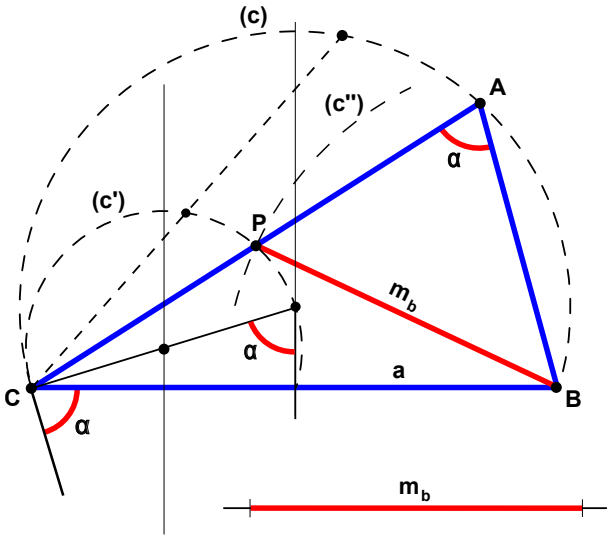
Al mismo resultado llegamos si la homotecia fuese de razón $-\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{m}}$, que nos determinaría la homotética $(\mathbf{c''})$.

Ejemplo 5. Se trata de inscribir en un triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ un cuadrado, uno de cuyos lados esté situado sobre el lado **a**, del triángulo.



Se construye un cuadrado sobre el lado $\overline{BC}$, es decir el $\overset{\square}{BCQP}$, y se considera la homotecia de centro el punto **A**, que transforma la recta $\mathbf{r}'$ en la **r**. La tal homotecia transformará el cuadrado que hemos construido en el cuadrado solución, $\overset{\square}{B'C'Q'P'}$

Ejemplo 6. Construir un triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$, conociendo el lado **a**, el ángulo $\widehat{A}$ y la mediana $\mathbf{m_b}$.



En primer lugar se dibuja el arco capaz del ángulo $\widehat{A}$ sobre **a**, el $(\mathbf{c})$; luego se considera la homotecia de centro **C** y razón $\frac{1}{2}$, que transforma el arco $(\mathbf{c})$ en el $(\mathbf{c}')$. Haciendo centro en **B** y con radio el valor de la mediana, $\mathbf{m_b}$, se traza el arco $(\mathbf{c}'')$, que corta al $(\mathbf{c}')$ en el punto **P**. La intersección de la recta $\overline{CP}$ con **(c)**, nos determina el vértice **A** del triángulo que queríamos construir.

18.2 Homotecias entre circunferencias

Es inmediato comprobar que la figura homotética de una circunferencia es otra circunferencia tal como ya vimos en el ejemplo 2 del primer apartado de esta lección.
Por otra parte, si lo que tenemos son dos circunferencias, se verifica la propiedad siguiente:

PROPOSICIÓN 1. Dos circunferencias no concéntricas son homotéticas respecto de dos centros de homotecia, armónicamente separados por los centros de las circunferencias.

En efecto: Trazando un radio cualquiera, $\overline{\mathbf{OA}}$, en una de ellas, y considerando los radios $\overline{\mathbf{O'A'}}$ y $\overline{\mathbf{O'A''}}$ de igual y de opuesto sentido, en la otra, ambos situados sobre la paralela a la $\overline{\mathbf{OA}}$, se verificará que las intersecciones $\mathbf{H_1}$ y $\mathbf{H_2}$ de $\overline{\mathbf{AA'}}$ y $\overline{\mathbf{AA''}}$ con $\overline{\mathbf{OO'}}$ cumplen

$$\frac{\overline{\mathbf{OH_1}}}{\overline{\mathbf{O'H_1}}} = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r'}} = -\frac{\overline{\mathbf{OH_2}}}{\overline{\mathbf{O'H_2}}}$$

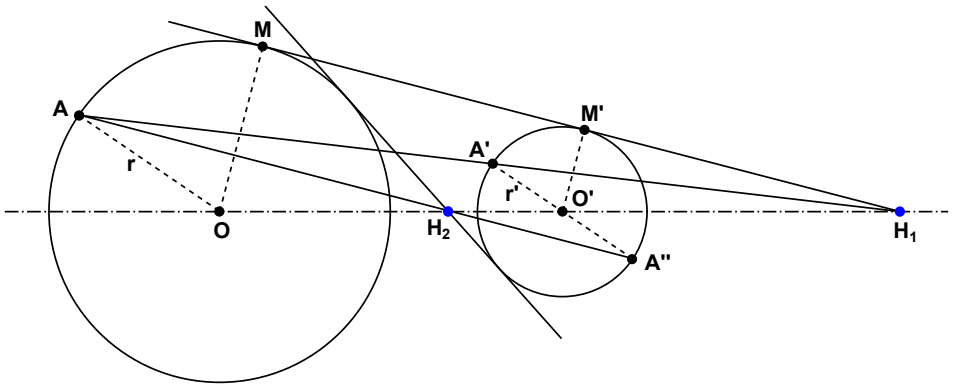
lo que prueba que la posición de $\mathbf{H_1}$ y $\mathbf{H_2}$ sólo depende de la posición de $\mathbf{O}$ y $\mathbf{O'}$ y del valor de los radios $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r'}$; es decir no depende del punto $\mathbf{A}$ elegido. Por otra parte, de la relación anterior se deduce que:

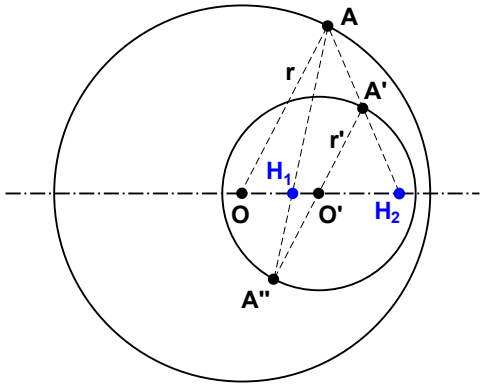
$$\frac{\overline{\mathbf{OH_1}}}{\overline{\mathbf{O'H_1}}} : \frac{\overline{\mathbf{OH_2}}}{\overline{\mathbf{O'H_2}}} = -\mathbf{1}\ ,$$

o lo que es lo mismo

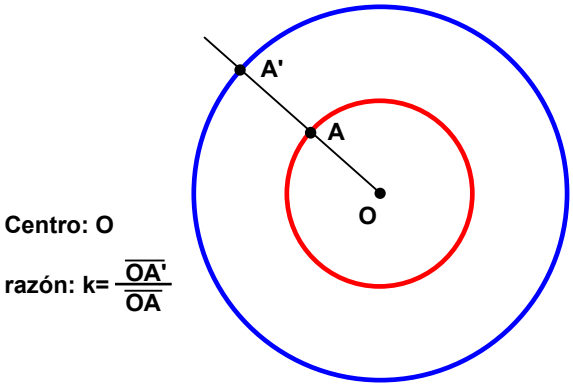
$$\frac{(\mathbf{O\ O'\ H_1})}{(\mathbf{O\ O'\ H_2})} = (\mathbf{O\ O'\ H_1\ H_2}) = -\mathbf{1}\ ,$$

luego la cuaterna $\mathbf{O},\ \mathbf{O'},\ \mathbf{H_1},\ \mathbf{H_2}$ es armónica.
Las dos homotecias que figuran en el enunciado serán: la de centro $\mathbf{H_1}$ de razón positiva, y la de centro $\mathbf{H_2}$, de razón negativa.
Observemos que, en la homotecia de centro $\mathbf{H_1}$, son puntos homólogos los de contacto de las tangentes exteriores, cuando existen, y análogamente son puntos homólogos, en la homotecia de centro $\mathbf{H_2}$, los de contacto de las tangentes interiores.

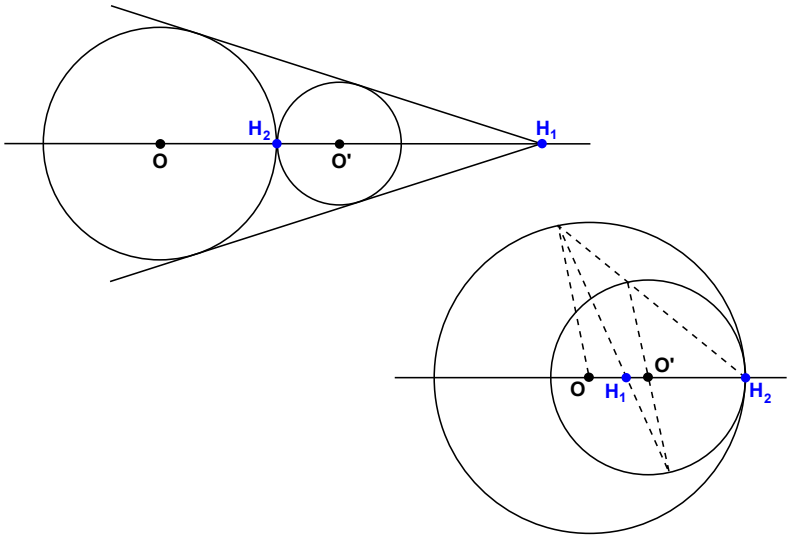




Ejemplo 1. Si tenemos dos circunferencias concéntricas se verifica que son homotéticas, en una homotecia de centro el común de ambas circunferencias y de razón la que existe entre los radios.

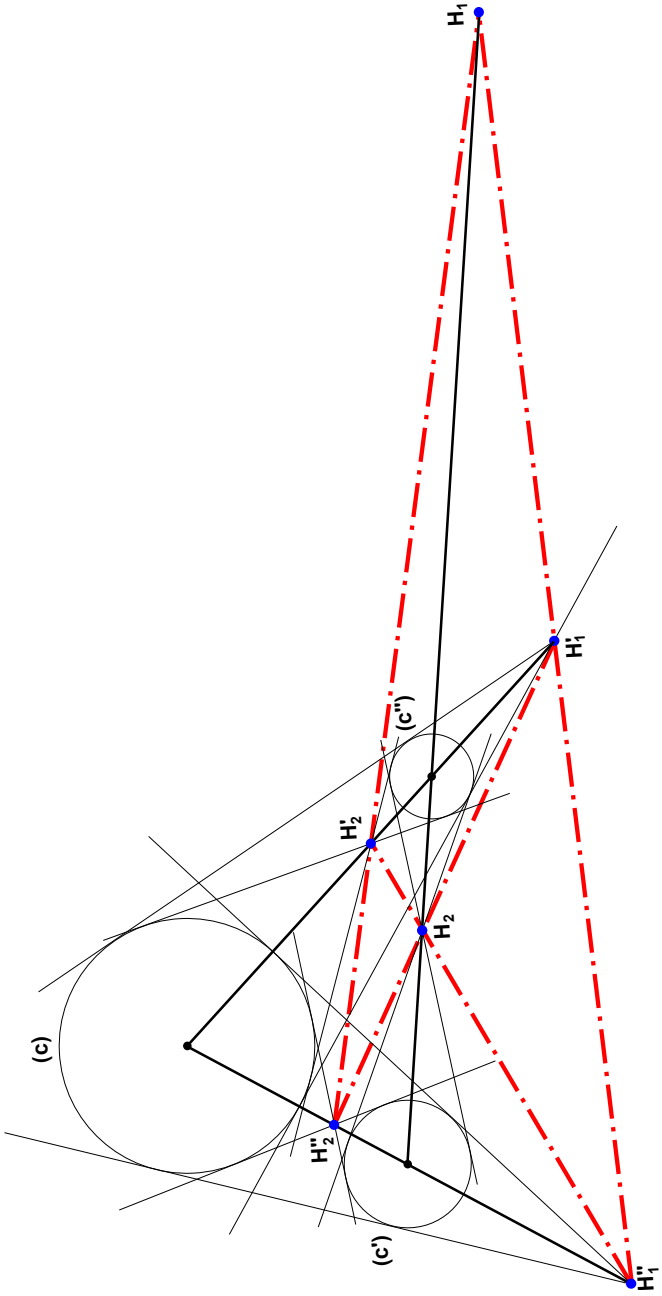


Ejemplo 2. Si tenemos dos circunferencias tangentes se verifica que uno de los centros de homotecia es el punto de contacto.



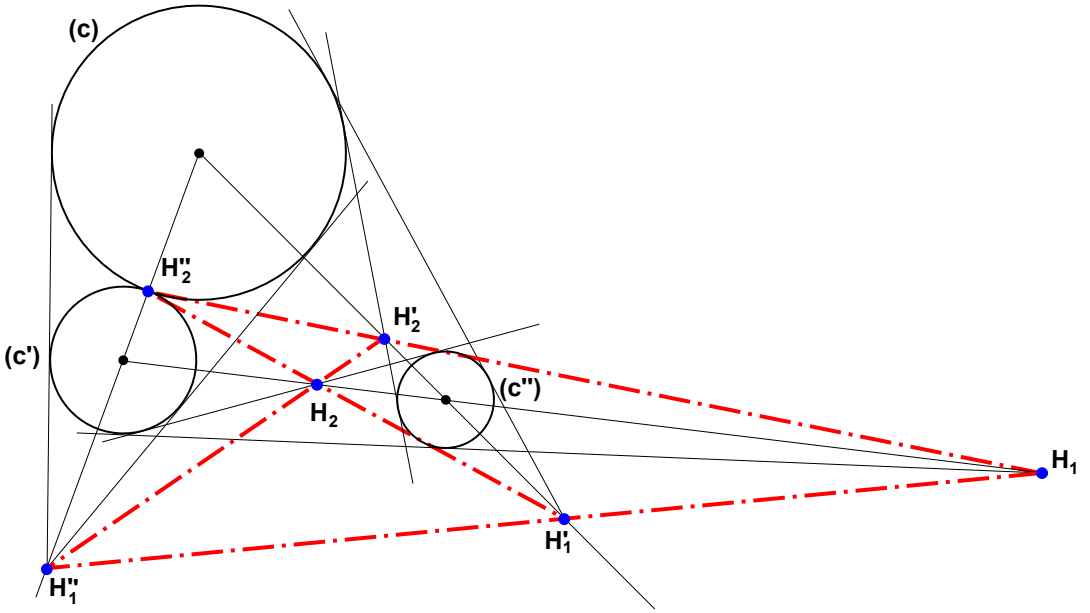
Si tenemos tres circunferencias $(\mathbf{c})$, $(\mathbf{c}')$ **y** $(\mathbf{c}'')$, resultará que el producto de las dos homotecias que transforman sucesivamente **(c)** en $(\mathbf{c}')$ y $(\mathbf{c}')$ en $(\mathbf{c}'')$, será una homotecia que transforma **(c)** en $(\mathbf{c}'')$, cuyo centro estará alineado con los de las dos primeras.

Podemos afirmar, entonces, que: **los seis centros de homotecia de tres circunferencias están alineados tres a tres.**

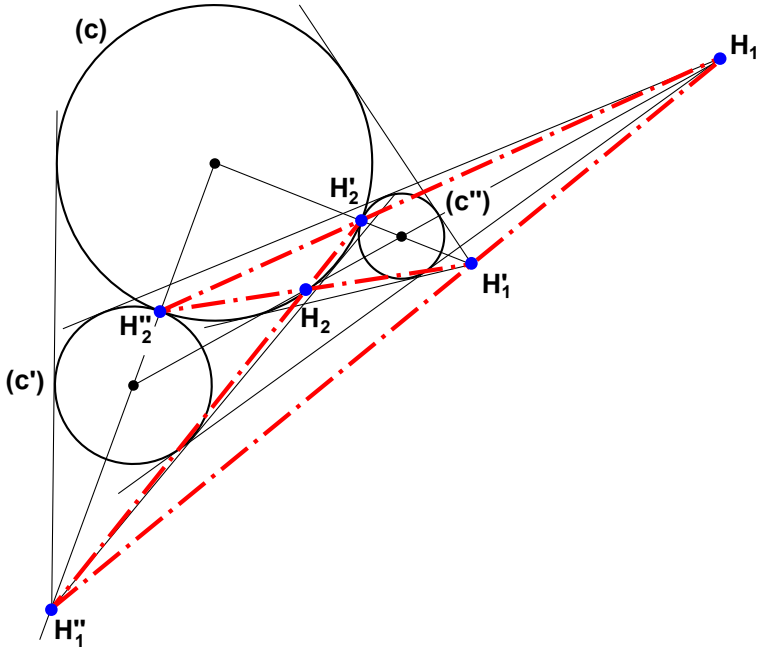


Llamaremos **ejes de homotecia** de las tres circunferencias a cada una de las cuatro rectas que contienen tres centros de homotecia.

Ejemplo 3. Consideremos las tres circunferencias $(\mathbf{c})$, $(\mathbf{c}')$ **y** $(\mathbf{c}'')$, siendo tangentes las $(\mathbf{c})$ y $(\mathbf{c}')$. Para la determinación de los seis centros de homotecia, y en consecuencia de los cuatro ejes de homotecia, se procede como en el caso general, en el que no supusimos tangencias entre las circunferencias.



Ejemplo 4. Dada las tres circunferencias $(\mathbf{c})$, $(\mathbf{c}')$ **y** $(\mathbf{c}'')$, tangentes las $(\mathbf{c})$ y $(\mathbf{c}')$, y las $(\mathbf{c})$ y $(\mathbf{c}'')$, para la determinación de los seis centros de homotecia, y en consecuencia de los cuatro ejes de homotecia, se procede, al igual que en ejemplo anterior, como en el caso general, en el que no supusimos tangencias entre las circunferencias.



Lección 19.- POTENCIA EN LA CIRCUNFERENCIA

19.1 Potencia de un punto respecto a una circunferencia

19.2 Eje radical de dos circunferencias. Centro radical de tres circunferencias

19.3 Inversión, homotecia y potencia

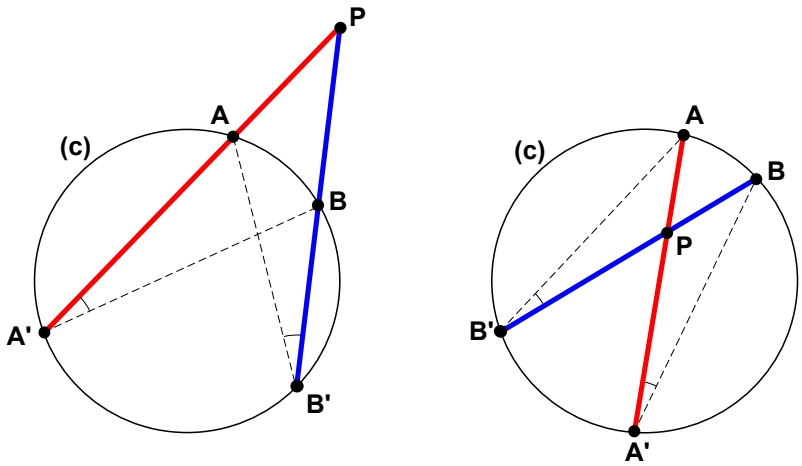
19.1 Potencia de un punto respecto a una circunferencia

Veamos, en primer lugar, que se verifica la propiedad siguiente:

PROPOSICIÓN 1. Considerada una circunferencia en un plano, si desde un punto del mismo se trazan rectas secantes a ella, resulta que es constante el producto de las distancias de dicho punto a los de intersección de cada secante con la circunferencia dada.

En efecto: Si son $\mathbf{A}$, $\mathbf{A'}$ y $\mathbf{B}$, $\mathbf{B'}$, los respectivos puntos de intersección de dos secantes cualesquiera por $\mathbf{P}$, tanto si este punto es exterior como interior, las rectas $\overline{\mathbf{A'B}}$ y $\overline{\mathbf{AB'}}$ son antiparalelas respecto a las rectas secantes, por ser iguales los ángulos inscritos $\widehat{\mathbf{AA'B}}$ y $\widehat{\mathbf{AB'B}}$, que abarcan el mismo arco $\overset{\frown}{\mathbf{AB}}$. Luego:

$$\overline{\mathbf{PA}} \cdot \overline{\mathbf{PA'}} = \overline{\mathbf{PB}} \cdot \overline{\mathbf{PB'}} \ .$$

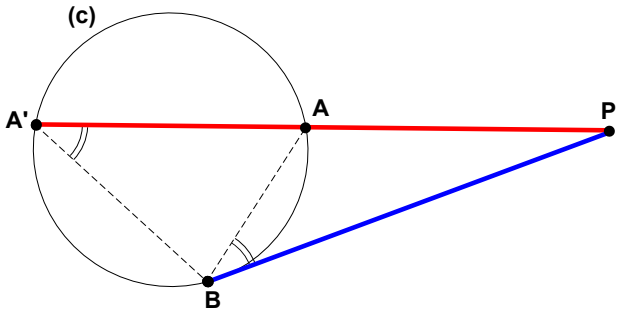


Si el punto $\mathbf{P}$ perteneciera a la circunferencia $(\mathbf{c})$, la proposición es evidente, puesto que el producto en cuestión es nulo.

Considerando los segmentos orientados, resultará un producto positivo cuando el punto $\mathbf{P}$ no separa a los de intersección, y negativo en caso contrario, con lo que el producto de las distancias consideradas es constante no sólo en valor sino también en signo.

Llamaremos **potencia** del punto $\mathbf{P}$, respecto de la circunferencia $(\mathbf{c})$, al producto, constante en valor y signo, de las distancias de $\mathbf{P}$ a los de intersección de toda secante a $(\mathbf{c})$ que pasa por él.

Ejemplo 1. En el caso de que el punto **P** sea exterior, la potencia resulta ser el cuadrado del segmento $\overline{\mathbf{PB}}$ de tangente comprendido entre **P** y el punto de contacto **B**.

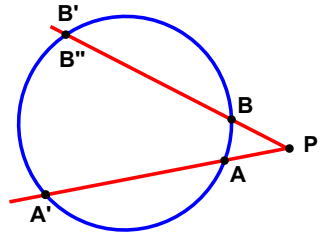


A esta conclusión se llega viendo que son iguales los ángulos $\widehat{\mathbf{ABP}}$ y $\widehat{\mathbf{AA'B}}$, respectivamente semi-inscrito e inscrito, lo cual prueba el antiparalelismo de las rectas $\overline{\mathbf{AB}}$ y $\overline{\mathbf{BA'}}$ respecto de las $\overline{\mathbf{PB}}$ y $\overline{\mathbf{PA'}}$, de donde resulta la igualdad.

$$\overline{\mathbf{PB}}^2 = \overline{\mathbf{PA}} \cdot \overline{\mathbf{PA'}}$$

Podemos inferir de esta igualdad que, el segmento de tangente entre un punto y una circunferencia es media proporcional entre los segmentos de una secante cualquiera, comprendidos entre dicho punto y los de intersección.
La pertenencia de cuatro puntos a una circunferencia se puede expresar utilizando el concepto de potencia, como muestra la propiedad siguiente:

PROPOSICIÓN 2. Si los pares de puntos A, A′ y B, B′ están situados, respectivamente, sobre dos rectas que se cortan en P, y pertenecen a una circunferencia, se verifica la igualdad $\overline{\mathbf{PA}} \cdot \overline{\mathbf{PA'}} = \overline{\mathbf{PB}} \cdot \overline{\mathbf{PB'}}$.
Y recíprocamente: **Si los pares de puntos A, A′ y B, B′, están situados, respectivamente sobre dos rectas que se cortan en P, y verifican la igualdad $\overline{\mathbf{PA}} \cdot \overline{\mathbf{PA'}} = \overline{\mathbf{PB}} \cdot \overline{\mathbf{PB'}}$ en valor y signo, se verifica que los cuatro puntos son concíclicos, es decir, pertenecen a una circunferencia.**



En efecto: La circunferencia que pasa por **A**, **A′**, **B** corta a la recta $\overline{\mathbf{BB'}}$ en un punto $\mathbf{B''}$, tal que

$$\overline{\mathbf{PA}} \cdot \overline{\mathbf{PA'}} = \overline{\mathbf{PB}} \cdot \overline{\mathbf{PB''}} \ ;$$

por tanto, se verifica en valor y signo que

$$\overline{\mathbf{PB'}} = \overline{\mathbf{PB''}}$$

es decir, $\mathbf{B''}$ coincide con $\mathbf{B'}$.

Ejemplo 2. Consideremos dos rectas que se cortan en el punto **P**, y sean **A**, **A′** puntos situados sobre la primera y **B**, **B′**, **C**, puntos sobre la segunda, tales que

$$\overline{\mathbf{PA}} = \mathbf{2} \ , \ \overline{\mathbf{PA'}} = \mathbf{5} \ ;$$

$$\overline{\mathbf{PB}} = \mathbf{2,5} \ , \ \overline{\mathbf{PB'}} = \mathbf{4} \ , \ \overline{\mathbf{PC}} = \mathbf{5} \ .$$

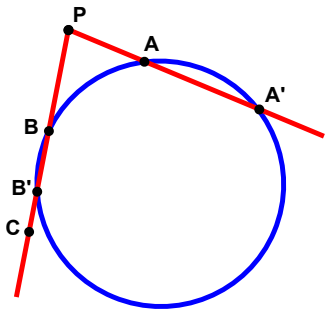
Como

$$\overline{\mathbf{PA}} \cdot \overline{\mathbf{PA'}} = \mathbf{10} \ ,$$

$$\overline{\mathbf{PB}} \cdot \overline{\mathbf{PB'}} = \mathbf{10} \ ,$$

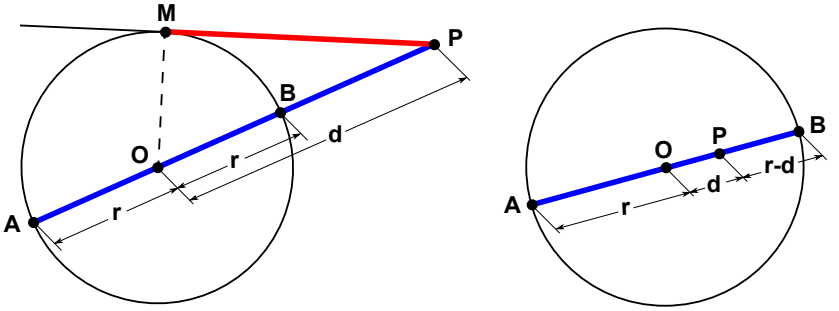
$$\overline{\mathbf{PB}} \cdot \overline{\mathbf{PC}} = \mathbf{12,5} \ ,$$

podemos afirmar que los puntos **A**, **A′**, **B**, **B′** son concíclicos mientras que los **A**, **A′**, **B**, **C** no lo son.



Conocido el radio de la circunferencia, **r**, y la distancia del punto, respecto del que queremos calcular la potencia, al centro de la misma, **d**, se verifica que:

$$\textbf{Potencia de P} = \mathbf{d^2 - r^2}$$



En efecto: Si consideramos la secante diametral $\overline{\mathbf{AB}}$, que pasa por **P**, tendremos que, en valor absoluto:

1.- Si **P** es exterior:

$$\overline{\mathbf{PA}} \cdot \overline{\mathbf{PB}} = (\mathbf{d} + \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{r}) = \mathbf{d^2 - r^2}$$

2.- Si **P** es interior:

$$\overline{\mathbf{PA}} \cdot \overline{\mathbf{PB}} = (\mathbf{r} + \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{d}) = \mathbf{r^2 - d^2}$$

En el caso **1**, el producto es positivo, y $\mathbf{d^2 - r^2 > 0}$.

En el caso **2**, el producto es negativo y $\mathbf{r^2 - d^2 > 0}$, luego $\mathbf{d^2 - r^2 < 0}$, lo que da generalidad a la fórmula que expresa la potencia del punto **P**.

Ejemplo 3. Si el radio de una circunferencia, $(\mathbf{c})$, vale **r=5** y la distancia de un punto **P** al centro de$(\mathbf{c})$ vale **d=7** entonces:

$$\textbf{Potencia de P} = 7^2 - 5^2 = 24$$

Si los valores fuesen: **r=5** y **d=2**, tendríamos

$$\textbf{Potencia de P} = 2^2 - 5^2 = -21$$

19.2 Eje radical de dos circunferencias. Centro radical de tres circunferencias

Consideremos ahora dos circunferencias; para ellas se verifica la propiedad siguiente.

PROPOSICIÓN 1. El lugar geométrico de los puntos del plano que tienen igual potencia respecto de dos circunferencias, es una recta perpendicular a la recta que une los centros de las mismas. Dicha recta recibe el nombre de **eje radical** de las dos circunferencias.

En efecto: Sean $\mathbf{r}$, $\mathbf{r'}$ los radios de las dos circunferencias dadas y $\mathbf{d}$, $\mathbf{d'}$ las distancias de un punto **P** a sus centros respectivos.

Si **P** tiene igual potencia, respecto de ambas circunferencias, tendremos

$$\mathbf{d^2 - r^2 = d'^2 - r'^2}$$

es decir:

$$\mathbf{d^2 - d'^2 = r^2 - r'^2}$$

Recíprocamente, todo punto **P** que cumpla la segunda igualdad, cumple la primera, luego tiene igual potencia respecto de ambas circunferencias.

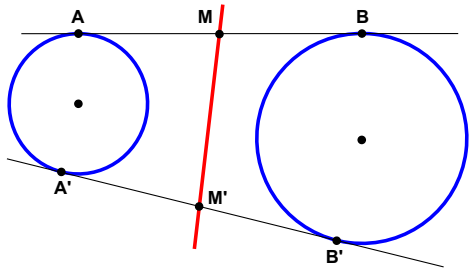
Como $\mathbf{r^2 - r'^2 = k}$ es constante, se verificará para todos los puntos que cumplen la segunda igualdad

$$\mathbf{d^2 - d'^2 = k}\ ,$$

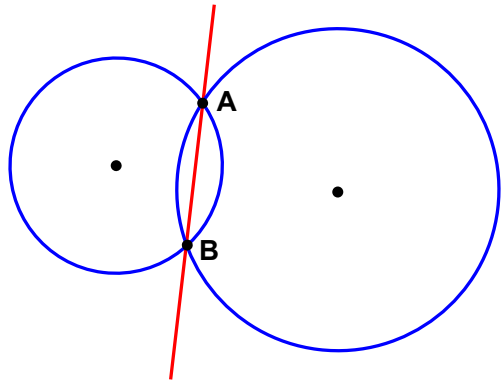
luego, su lugar geométrico será una recta perpendicular a la recta que une los centros de las circunferencias.

La posición relativa de las dos circunferencias consideradas plantean distintas posibilidades.

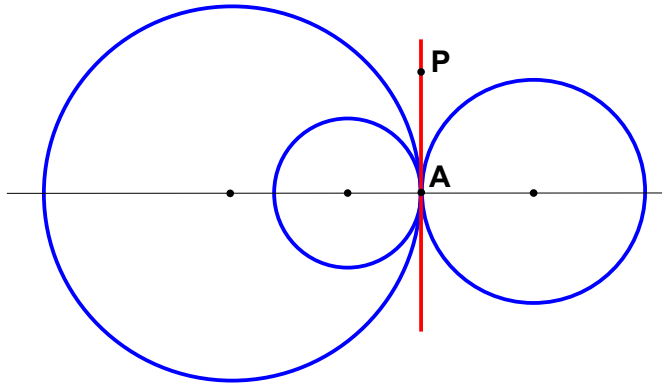
- **Circunferencias exteriores:** Su eje radical debe pasar por los puntos medios, **M** y $\mathbf{M'}$ de los segmentos de tangente común comprendidos entre los puntos de contacto $\overline{\mathbf{AB}}$ y $\overline{\mathbf{A'B'}}$, puntos que tienen la misma potencia $\overline{\mathbf{MA}}^2 = \overline{\mathbf{MB}}^2$, $\overline{\mathbf{M'A'}}^2 = \overline{\mathbf{M'B'}}^2$.



- **Circunferencias secantes:** Su eje radical es evidentemente la recta que pasa por los puntos de intersección **A** y **B**, de potencia nula en ambos.



- **Circunferencias tangentes, tanto exterior como interiormente:** Su eje radical es su tangente común, puesto que la potencia de cualquiera de sus puntos se medirá por el cuadrado del mismo segmento $\overline{\mathbf{PA}}$.

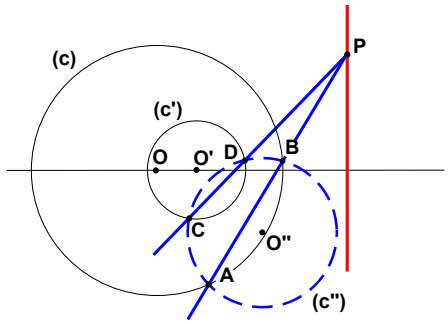


- **Una circunferencia interior a la otra, y no concéntricas:** Para determinar su eje radical, trazemos otra circunferencia $(\mathbf{c}'')$ de centro $\mathbf{O}''$ no alineado con los $\mathbf{O}$ y $\mathbf{O}'$ de las circunferencias dadas $(\mathbf{c})$ y $(\mathbf{c}')$, y que sea secante de ambas.

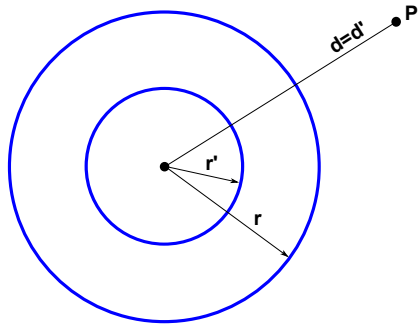
  Los dos ejes radicales $\overline{\mathbf{AB}}$, de $(\mathbf{c})$ y $(\mathbf{c}')$ y $\overline{\mathbf{CD}}$, de $(\mathbf{c}'')$ y $(\mathbf{c}')$, se cortan pues si fuesen paralelos, la mediatriz de $\overline{\mathbf{AB}}$ lo sería también de $\overline{\mathbf{CD}}$, y pasaría por $\mathbf{O}$, $\mathbf{O}'$ y $\mathbf{O}''$, contra lo supuesto.
  El punto **P** de intersección tiene la misma potencia

$$\overline{\mathbf{PA}} \cdot \overline{\mathbf{PB}} = \overline{\mathbf{PC}} \cdot \overline{\mathbf{PD}}$$

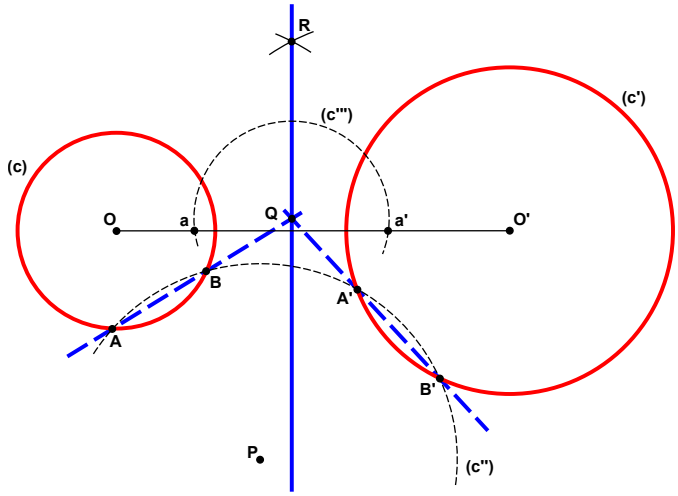
respecto de $(\mathbf{c})$ y $(\mathbf{c}')$, es decir pertenece al eje radical buscado, que será la perpendicular por **P** a $\overline{\mathbf{OO}'}$.



- **Circunferencias concéntricas:** En este caso no existe eje radical, puesto que desde cualquier punto del planos se verificaría $\mathbf{d} = \mathbf{d}'$, y no podría verificarse $\mathbf{d^2} - \mathbf{d'^2} = \mathbf{r^2} - \mathbf{r'^2} \neq \mathbf{0}$.



Ejemplo 1. Construir el eje radical de dos circunferencias exteriores $(\mathbf{c})$ y $(\mathbf{c}')$



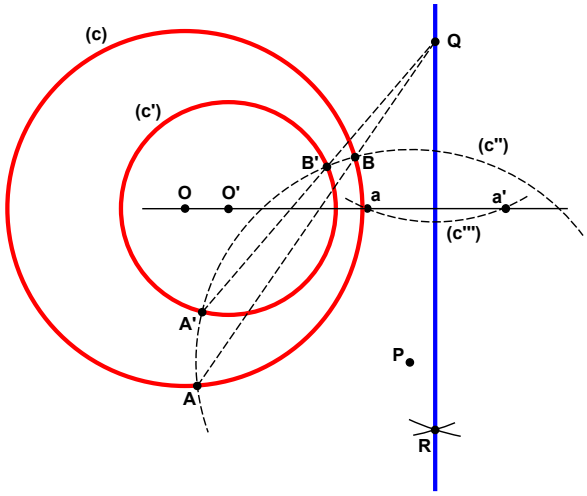
Con centro en un punto cualquier, **P**, se traza la circunferencia auxiliar, $(\mathbf{c}'')$, de forma que corte a las circunferencias dadas, en los puntos **A** y **B**, $\mathbf{A}'$ y $\mathbf{B}'$.

Las rectas $\overline{\mathbf{AB}}$ y $\overline{\mathbf{A'B'}}$ se cortan en el punto **Q**, que pertenece al eje radical de $(\mathbf{c})$ y $(\mathbf{c}')$.

Con centro en **Q**, con otra circunferencia auxiliar, se determinan los puntos, cualesquiera, **a** y **a′**, y haciendo centro en ellos se determina el punto **R**, que es otro punto del eje radical.

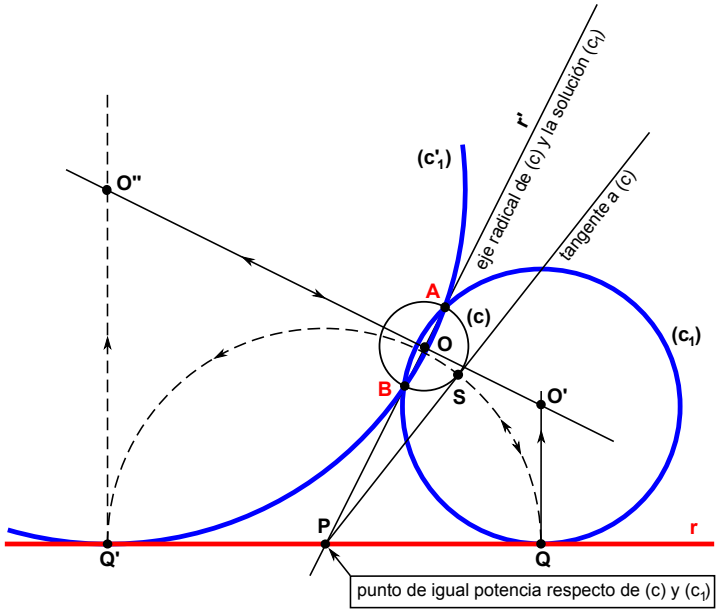
La recta $\overline{\mathbf{QR}}$ es el eje radical de las circunferencias dadas, (**c**) y (**c′**).

Ejemplo 2. Construir el eje radical de las dos circunferencias interiores (**c**) y (**c′**).



La construcción del eje radical que nos interesa sigue los mismos pasos que se indicaban en el ejemplo anterior.

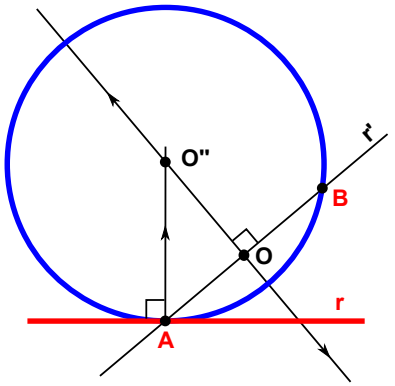
Ejemplo 3. Trazar una circunferencia tangente a una recta dada **r** y que pase por dos puntos **A** y **B**, situados en una recta **r′**, que corta a la **r** (en el punto **P**).



Se traza la circunferencia de diámetro $\overline{\mathbf{AB}}$, y luego la tangente a ella desde **P**, $\overline{\mathbf{PS}}$. Luego con centro en **P** y radio $\overline{\mathbf{PS}}$ se determinan **Q** y **Q′**, sobre cuyos puntos se levantan perpendiculares a **r**; la intersección de estas con la mediatriz de $\overline{\mathbf{AB}}$, nos darán los puntos **O′** y **O″**, centros de la solución. Evidentemente si los puntos **A** y **B** están a distinto lado

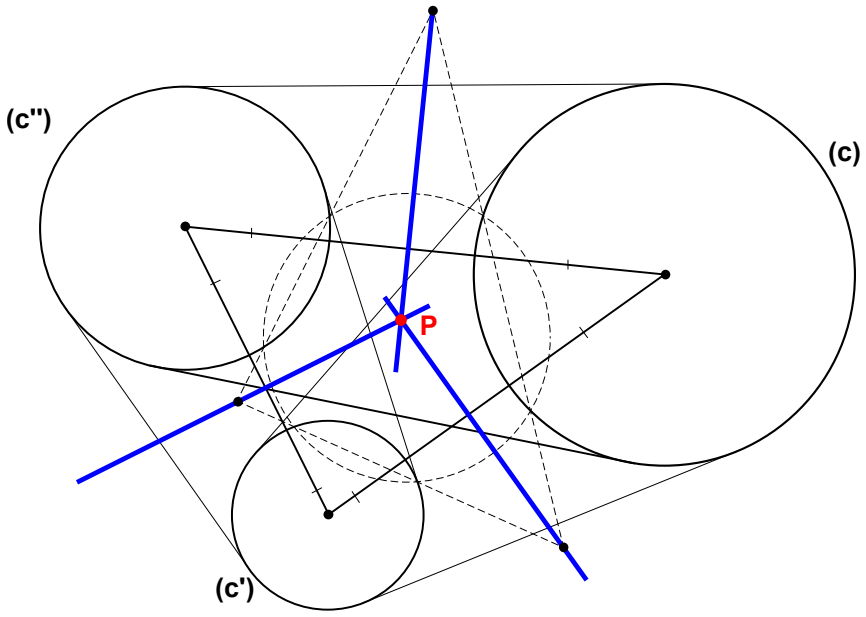
de **r**, no habrá solución.

Si uno de los puntos, por ejemplo el **A**, pertenece a **r**, procediendo del mismo modo la solución resulta trivial.

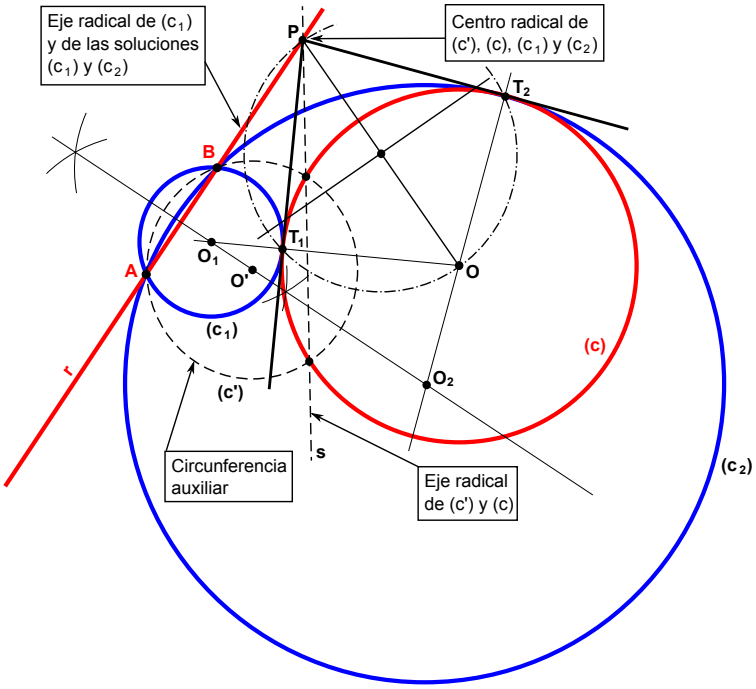


Dadas tres circunferencias cualesquiera $(\mathbf{c})$, $(\mathbf{c}')$, $(\mathbf{c}'')$, de centros no alineados, los ejes radicales de $(\mathbf{c})$ y $(\mathbf{c}')$, y $(\mathbf{c}')$ y $(\mathbf{c}'')$ se cortan en un punto **P**, que por pertenecer a ambos es punto de igual potencia respecto a las tres circunferencias, luego pertenece al eje radical de $(\mathbf{c})$ y $(\mathbf{c}'')$.

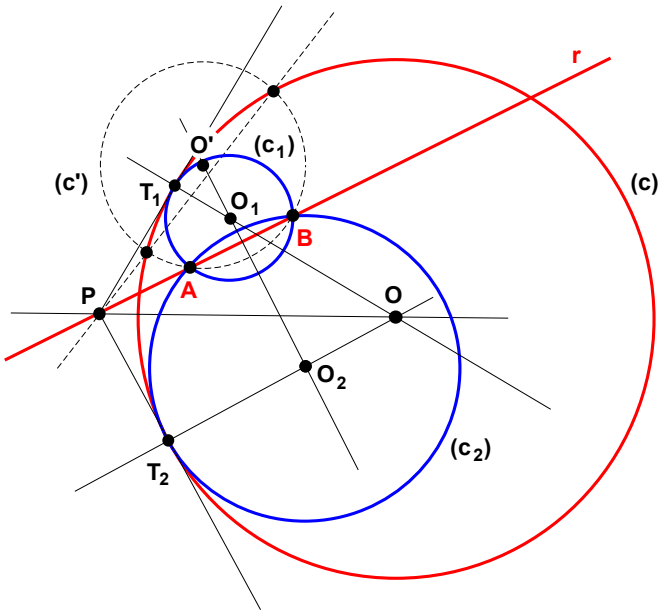
Así, podemos afirmar que, si los centros de tres circunferencias no están alineados, los ejes radicales de las mismas, tomadas dos a dos, se cortan en un punto único del plano, que tiene igual potencia respecto de las tres circunferencias, y al que llamaremos **centro radical** de las mismas.



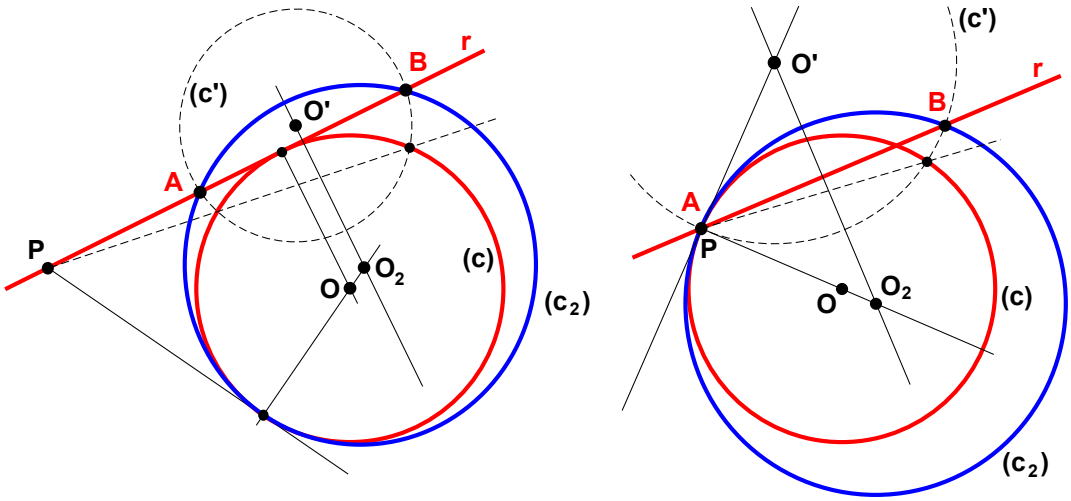
Ejemplo 4. Trazar una circunferencia tangente a otra dada, $(\mathbf{c})$, y que pase por dos puntos **A** y **B**, situados sobre una recta **r**.



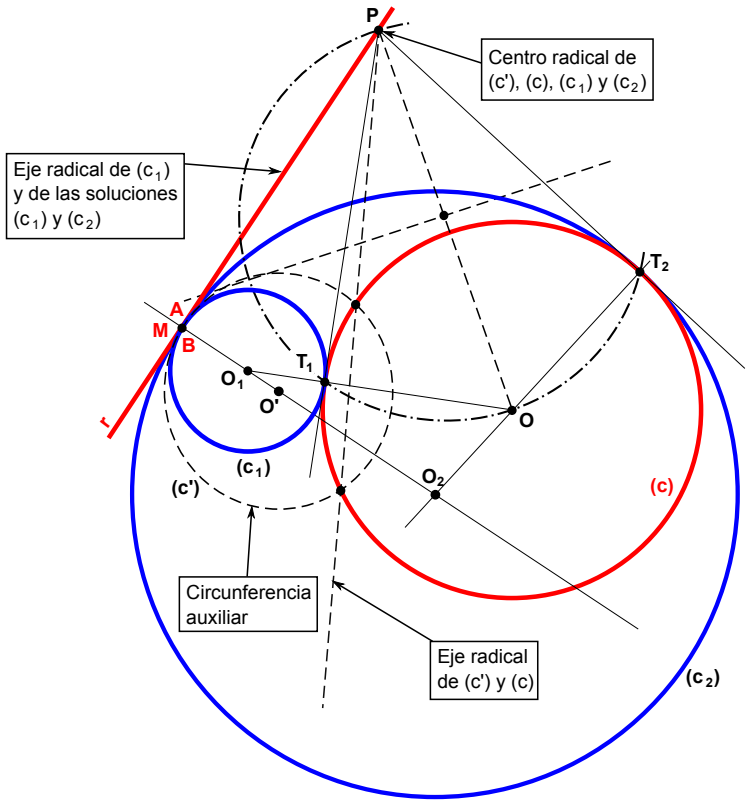
Una vez trazada una circunferencia auxiliar, $(\mathbf{c}')$, que corte a $(\mathbf{c})$, se determina el punto **P**, y desde él se trazan las tangentes a $(\mathbf{c})$. Por los puntos **A, B** y, respectivamente, los puntos de tangencia $\mathbf{T_1}$ y $\mathbf{T_2}$, pasan las circunferencias solución $(\mathbf{c_1})$ y $(\mathbf{c_2})$. Si los puntos **A** y **B** fuesen uno interior y el otro exterior a $(\mathbf{c})$, evidentemente no existe solución alguna. Si los puntos **A** y **B** son interiores siguen habiendo dos soluciones:



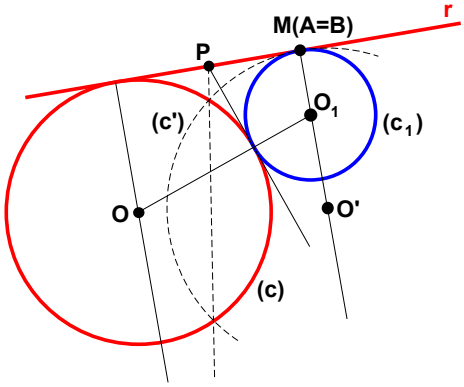
Existirá una única solución en los casos: **1**.- Los puntos **A** y **B** están sobre una tangente a la circunferencia, y **2**.- Si uno de los puntos, por ejemplo el **A**, está sobre la circunferencia.



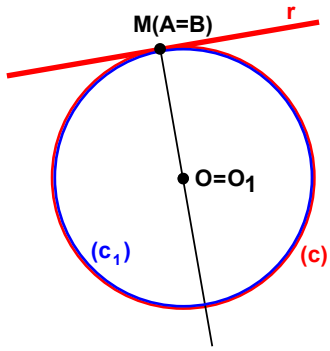
Ejemplo 5. Trazar una circunferencia tangente a otra dada, (**c**), y a una recta también dada, **r**, en un punto de ella, **M**.



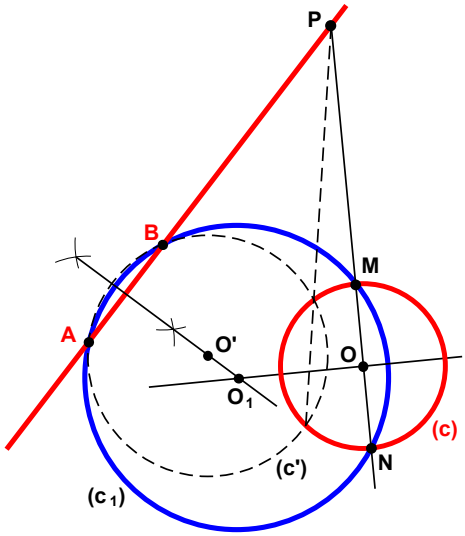
El problema planteado coincide con el del ejemplo anterior, con la diferencia de que aquí, los puntos **A** y **B** coinciden en el **M**, siendo en consecuencia tanto la circunferencia auxiliar como las soluciones tangentes a **r** en **M**.
Existirá una única solución en el caso de que el punto **M** está situado sobre una tangente a la circunferencia:



En el caso particular de que, además, el punto **M** esté sobre la circunferencia, la solución podemos clasificarla como trivial, puesto que la solución coincide con la propia circunferencia.



Ejemplo 6. Trazar una circunferencia que pase por dos puntos dados **A** y **B**, y que corte a una circunferencia, (**c**), en puntos diametralmente opuestos.



Se determina, como en los ejemplos anteriores el centro radical de $(\mathbf{c})$, $(\mathbf{c}')$ y $(\mathbf{c_1})$ es decir el punto **P**, y luego teniendo en cuenta que el eje radical de la circunferencia dada y de la solución es la recta diametral $\overline{\mathbf{PO}}$, que corta a $(\mathbf{c})$ en los puntos **M** y **N**, bastará trazar las mediatrices de los segmentos $\overline{\mathbf{AB}}$ y $\overline{\mathbf{MN}}$, para determinar el centro, $\mathbf{O_1}$, de la solución, $(\mathbf{c_1})$.

19.3 Inversión, homotecia y potencia

En el apartado 2.1 de la Lección 2, establecimos que **la figura inversa de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia.** Una vez establecida la correspondencia homotecia, estudiada en la lección precedente, vamos a precisar más el resultado anterior ligando, en él, inversión, potencia respecto de una circunferencia y homotecia. Así, tendremos la propiedad siguiente:

PROPOSICIÓN 1. La figura inversa de una circunferencia $(\mathbf{c})$, que no pasa por el centro de inversión, O, es una circunferencia $(\mathbf{c}')$, homotética de la $(\mathbf{c})$, con centro de homotecia en el de inversión y razón de homotecia igual al cociente $\dfrac{\mathbf{k}}{\mathbf{p}}$, siendo k la potencia de inversión y p la potencia del centro de inversión respecto de la circunferencia $(\mathbf{c})$.

En efecto: Tomemos un punto **M** cualquiera, situado sobre $(\mathbf{c})$, siendo $\mathbf{M}'$ el inverso de dicho punto **M**. El punto $\mathbf{M}'$ estará situado sobre la recta $\overline{\mathbf{OM}}$, y tendremos

$$\overline{\mathbf{OM}} \cdot \overline{\mathbf{OM}'} = \mathbf{k} \, .$$

Determinemos ahora el lugar geométrico del punto $\mathbf{M}'$, cuando el **M** se desplaza sobre $(\mathbf{c})$.
La recta $\overline{\mathbf{OM}}$ encuentra a la circunferencia $(\mathbf{c})$ en un segundo punto **N**, y tendremos

$$\overline{\mathbf{OM}} \cdot \overline{\mathbf{ON}} = \mathbf{p} \, .$$

Dividiendo, miembro a miembro, las dos igualdades anteriores resultará

$$\frac{\overline{\mathbf{OM}'}}{\overline{\mathbf{ON}}} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{p}} = \textbf{constante}$$

lo que muestra que el punto $\mathbf{M}'$ es homotético del **N** en la homotecia que tiene por centro el punto **O** y razón $\dfrac{\mathbf{k}}{\mathbf{p}}$.
Dado que el punto **N** describe la circunferencia $(\mathbf{c})$, resultará que el lugar del punto $\mathbf{M}'$ es la circunferencia $(\mathbf{c}')$, homotética de la $(\mathbf{c})$ en la homotecia anterior. Su centro $\mathbf{C}'$ estará sobre la recta $\overline{\mathbf{OC}}$, definido por la relación

$$\frac{\overline{\mathbf{OC}'}}{\overline{\mathbf{OC}}} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{p}}$$

es decir

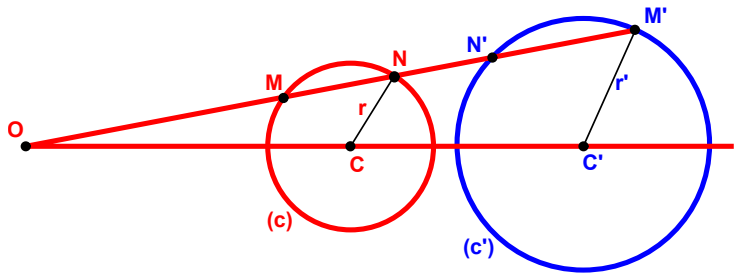
$$\overline{\mathbf{OC}'} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{p}} \cdot \overline{\mathbf{OC}} \, ,$$

y su radio $(\mathbf{r}')$ vendrá dado por la igualdad

$$\frac{\mathbf{r}'}{\mathbf{r}} = \left|\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{p}}\right|$$

siendo $\mathbf{r}$ el radio de $(\mathbf{c})$; así tendremos

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \cdot \left|\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{p}}\right|$$



Ejemplo 1. Planteemos como un ejemplo de aplicación del razonamiento seguido en la demostración de la proposición anterior, la siguiente observación: **El punto $\mathbf{C}'$ no es el inverso del punto $\mathbf{C}$.**
En efecto: Si $\mathbf{I}'$ fuese el inverso del punto $\mathbf{C}$, tendríamos

$$\overline{\mathbf{OI}'} = \frac{\mathbf{k}}{\overline{\mathbf{OC}}}$$

Por otra parte

$$\overline{\mathbf{OC}'} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{p}} \cdot \overline{\mathbf{OC}}$$

Para que los puntos $\mathbf{I}'$ y $\mathbf{C}'$ coincidiesen, sería necesario que

$$\overline{\mathbf{OI}'} = \overline{\mathbf{OC}'}$$

es decir

$$\frac{\mathbf{k}}{\overline{\mathbf{OC}}} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{p}} \cdot \overline{\mathbf{OC}}$$

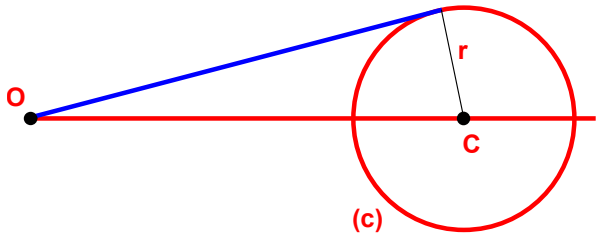
y en definitiva

$$\mathbf{p} = \overline{\mathbf{OC}}^2$$

Como la potencia $\mathbf{p}$, del punto $\mathbf{O}$ respecto de la circunferencia $(\mathbf{c})$, vale

$$\overline{\mathbf{OC}}^2 - \mathbf{r}^2$$

los puntos $\mathbf{I}'$ y $\mathbf{C}'$ no pueden coincidir más que si el radio $\mathbf{r}$ de la circunferencia $(\mathbf{c})$ es nulo.



En el apartado 18.2 de la lección anterior establecimos que **dos circunferencias no concéntricas cualesquiera son homotéticas respecto de dos centros de homotecia**, que además aprendimos a determinar.

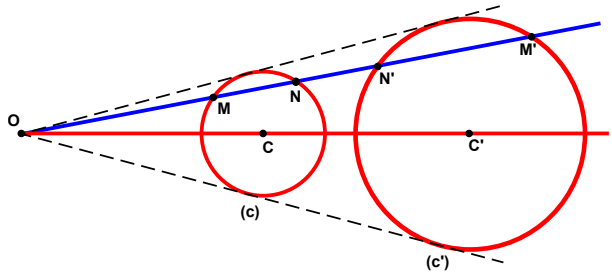
La existencia de esos dos centros nos va a permitir establecer la propiedad siguiente:

PROPOSICIÓN 2. Dos circunferencias cualesquiera, no concéntricas ni tangentes, pueden ser consideradas de dos maneras distintas como curvas inversas.

En efecto: En virtud de la proposición anterior, sabemos que si dos circunferencias son inversas, el centro de inversión no puede ser más que uno de sus centros de homotecia. Dicho esto, consideremos las dos circunferencias $(\mathbf{c})$ y $(\mathbf{c}')$, con centros respectivos $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}'$, siendo el punto $\mathbf{O}$ uno de sus centros de homotecia. Tracemos, por el punto $\mathbf{O}$, una secante cualesquiera que corte a $(\mathbf{c})$ en los puntos $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$, y a $(\mathbf{c}')$ en los $\mathbf{M}'$, $\mathbf{N}'$. Designemos por $\mathbf{N}'$ el homotético de $\mathbf{M}$ y por $\mathbf{M}'$ el de $\mathbf{N}$, en la homotecia de centro $\mathbf{O}$. Demostremos ahora que $(\mathbf{M},\ \mathbf{M}')$ y $(\mathbf{N},\ \mathbf{N}')$ son dos pares de puntos inversos; es decir, que se verifica

$$\overline{\mathbf{OM}}\cdot\overline{\mathbf{OM}'}=\overline{\mathbf{ON}}\cdot\overline{\mathbf{ON}'}$$

valor que se mantiene constante cuando varía la secante.



Designemos por $\mathbf{p}$ la potencia del punto $\mathbf{O}$ respecto a la circunferencia $(\mathbf{c})$, y por $\mathbf{k}$ la razón de la homotecia de las $(\mathbf{c})$ y $(\mathbf{c}')$. Así tenemos las igualdades

$$\overline{\mathbf{OM}}\cdot\overline{\mathbf{ON}}=\mathbf{p}\quad,\quad\frac{\overline{\mathbf{OM}'}}{\overline{\mathbf{ON}}}=\mathbf{k}$$

que multiplicadas miembro a miembro dan

$$\overline{\mathbf{OM}}\cdot\overline{\mathbf{OM}'}=\mathbf{p}\cdot\mathbf{k}=\textbf{constante}$$

Tenemos, asimismo, las igualdades

$$\overline{\mathbf{OM}}\cdot\overline{\mathbf{ON}}=\mathbf{p}\quad,\quad\frac{\overline{\mathbf{ON}'}}{\overline{\mathbf{ON}}}=\mathbf{p}\cdot\mathbf{k}=\textbf{constante}.$$

con las que procediendo como con las anteriores podemos escribir

$$\overline{\mathbf{ON}}\cdot\overline{\mathbf{ON}'}=\mathbf{p}\cdot\mathbf{k}=\textbf{constante}.$$

En consecuencia las dos circunferencias, $(\mathbf{c})$ y $(\mathbf{c}')$, son figuras inversas, siendo $\mathbf{O}$ el centro de inversión y su potencia de inversión $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{k}$.

La misma demostración vale para el otro centro de homotecia.

Ejemplo 2. En la demostración de la proposición anterior designábamos por $\mathbf{p}$ la potencia del punto $\mathbf{O}$ respecto a la circunferencia $(\mathbf{c})$, por $\mathbf{k}$ la razón de la homotecia y por $\boldsymbol{\lambda}$ la correspondiente potencia de inversión, verificándose

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{k} \, .$$

Si designamos, ahora por $(\mathbf{p}')$ la potencia del punto $\mathbf{O}$ respecto a la circunferencia $(\mathbf{c}')$, tendremos

$$\overline{\mathbf{OM}'} \cdot \overline{\mathbf{ON}'} = \mathbf{p}' \quad , \quad \frac{\overline{\mathbf{OM}}}{\overline{\mathbf{ON}'}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}}$$

igualdades que multiplicadas miembro a miembro dan

$$\overline{\mathbf{OM}'} \cdot \overline{\mathbf{OM}} = \frac{\mathbf{p}'}{\mathbf{k}} = \textbf{constante}.$$

y en consecuencia

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\mathbf{p}'}{\mathbf{k}}$$

Bastará, ahora, multiplicar las dos igualdades que expresan el valor de $\boldsymbol{\lambda}$ para obtener la formula

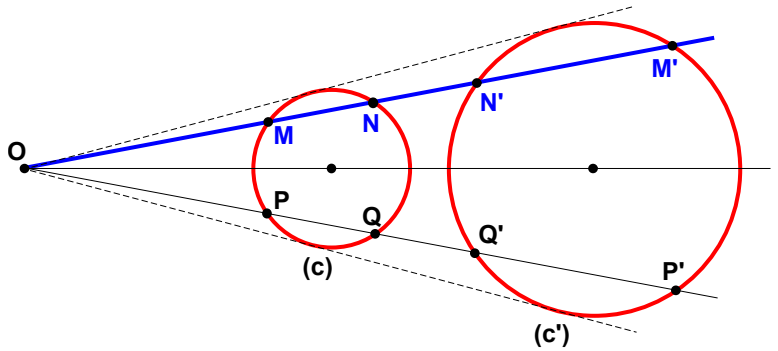
$$\boldsymbol{\lambda}^2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}'$$

Ejemplo 3 Si dos circunferencias son tangentes, el punto de contacto es uno de los dos eventuales centros de homotecia. Sin embargo, no se puede tomar éste como centro de inversión ya que al ser $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, tendríamos

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{0} \, .$$

Según hemos visto, si el punto $\mathbf{O}$ designa uno de los centros de homotecia de dos circunferencias, $(\mathbf{c})$ y $(\mathbf{c}')$, pueden considerarse éstas tanto homotéticas como inversas respecto al mismo centro $\mathbf{O}$.

Una recta secante cualquier, que pasa por $\mathbf{O}$, cortará a la circunferencia $(\mathbf{c})$ en los puntos $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$, y a la $(\mathbf{c}')$ en los $\mathbf{M}'$, $\mathbf{N}'$. En la homotecia, al punto $\mathbf{M}$ le corresponderá el $\mathbf{N}'$, y de los puntos $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}'$ diremos que son puntos homólogos; análogamente, los puntos $\mathbf{N}$, $\mathbf{M}'$, serán también homólogos. Por otra parte, en la inversión los puntos $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$, serán inversos; de ellos diremos que son puntos **anti-homólogos**; los puntos $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}'$ serán así mismo anti-homólogos.



Los puntos anti-homólogos gozan de la propiedad siguiente.

PROPOSICIÓN 3. Dos pares de puntos anti-homólogos, no situados sobre la misma secante, son concíclicos.

En efecto: Si son $(\mathbf{M},\ \mathbf{M}')$, $(\mathbf{P},\ \mathbf{P}')$ los dos pares de puntos anti-homólogos, se verifica:

$$\overline{\mathbf{OM}}\cdot\overline{\mathbf{OM}'}=\overline{\mathbf{OP}}\cdot\overline{\mathbf{OP}'}$$

luego los cuatro puntos $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}'$ están sobre una circunferencia.

De las cuerdas $\overline{\mathbf{MP}}$, $\mathbf{M}'\mathbf{P}'$ diremos que son **cuerdas anti-homólogas.**

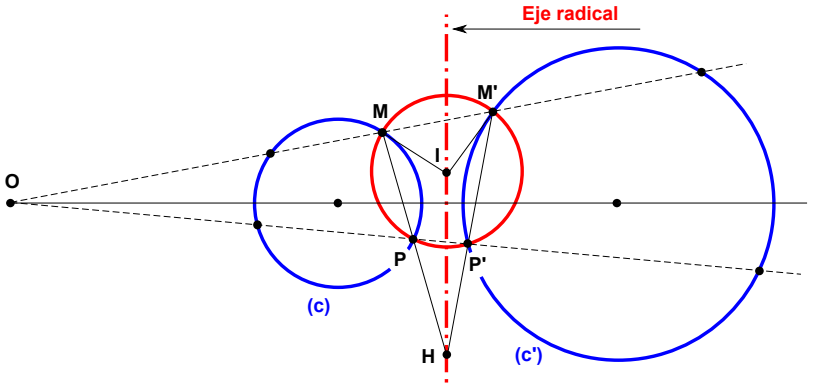
Veamos más propiedades de las cuerdas anti-homólogas y de los puntos anti-homólogos.

PROPOSICIÓN 4. Dos cuerdas anti-homólogas se cortan sobre el eje radical de las dos circunferencias $(\mathbf{c})$ y $(\mathbf{c}')$.

En efecto: Sean las dos cuerdas anti-homólogas $\overline{\mathbf{MP}}$ y $\overline{\mathbf{M}'\mathbf{P}'}$ que se cortan en el punto $\mathbf{H}$. En virtud de la proposición anterior, los extremos de esas cuerdas están situados sobre una circunferencia, es decir son concíclicos: En consecuencia se verificará que

$$\overline{\mathbf{HM}}\cdot\overline{\mathbf{HP}}=\overline{\mathbf{HM}'}\cdot\overline{\mathbf{HP}'}\ ,$$

igualdad que muestra que el punto $\mathbf{H}$ tiene la misma potencia respecto a las circunferencias $(\mathbf{c})$ y $(\mathbf{c}')$; luego el punto $\mathbf{H}$ está situado sobre el eje radical de $(\mathbf{c})$ y $(\mathbf{c}')$.



PROPOSICIÓN 5. Las tangentes en dos puntos anti-homólogos se cortan sobre el eje radical de las dos circunferencias.

En efecto: Si en la figura anterior mantenemos fija la secante $\overline{\mathbf{OMM}'}$ y acercamos a ésta, indefinidamente, la $\overline{\mathbf{OPP}'}$, resultará que las rectas $\overline{\mathbf{MP}}$ y $\overline{\mathbf{M}'\mathbf{P}'}$ tienen, respectivamente, por límites las tangentes en $\mathbf{M}$ y $\mathbf{M}'$, en las dos circunferencias, y el punto $\mathbf{H}$ tiene como límite el punto de intersección, $\mathbf{I}$, de esas tangentes. Como el punto $\mathbf{H}$ se desplaza permaneciendo sobre el eje radical, el punto $\mathbf{I}$ pertenecerá a dicho eje, como nos interesaba establecer.

La siguiente propiedad es, en realidad, la recíproca de la anterior.

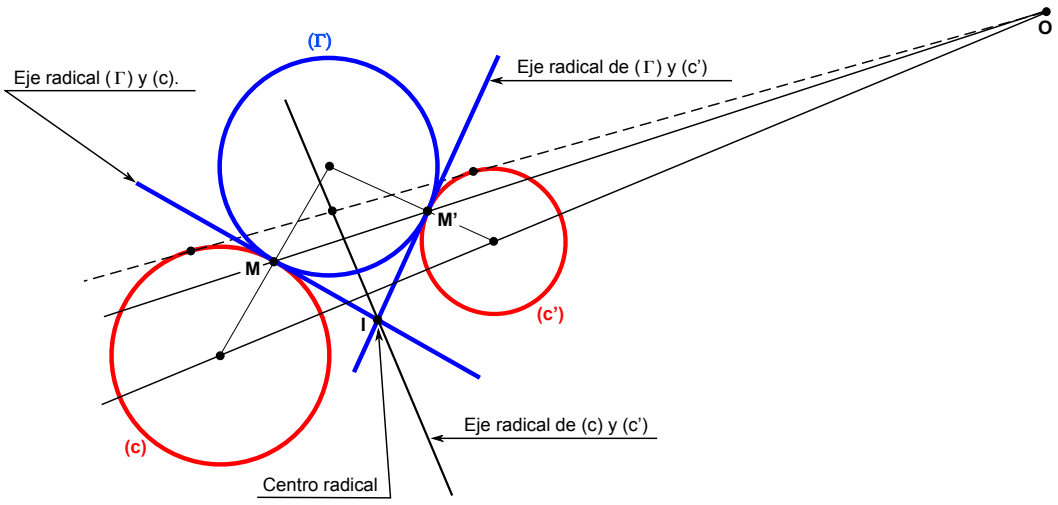
PROPOSICIÓN 6. Si desde un punto cualquiera del eje radical de dos circunferencias se trazan tangentes a cada una de ellas, los puntos de contacto son puntos anti-homólogos.

En efecto: Razonando sobre figura anterior, vemos que el punto **M** de la circunferencia $(\mathbf{c})$ admite sobre la $(\mathbf{c}')$ dos puntos anti-homólogos $\mathbf{M_1}$ y $\mathbf{M_2}$, correspondientes a los dos centros de inversión, y de acuerdo con la proposición anterior, las tangentes en esos dos puntos deben pasar por el punto **I**, donde la tangente en **M** corta al eje radical de las dos circunferencias.

En consecuencia, $\mathbf{M_1}$ y $\mathbf{M_2}$ serán los puntos de contacto de las tangentes, trazadas desde el punto **I**, a la circunferencia $(\mathbf{c}')$; luego $\mathbf{M}'$ coincidirá con uno de esos puntos, lo que muestra que **M**, $\mathbf{M}'$ son anti-homólogos.

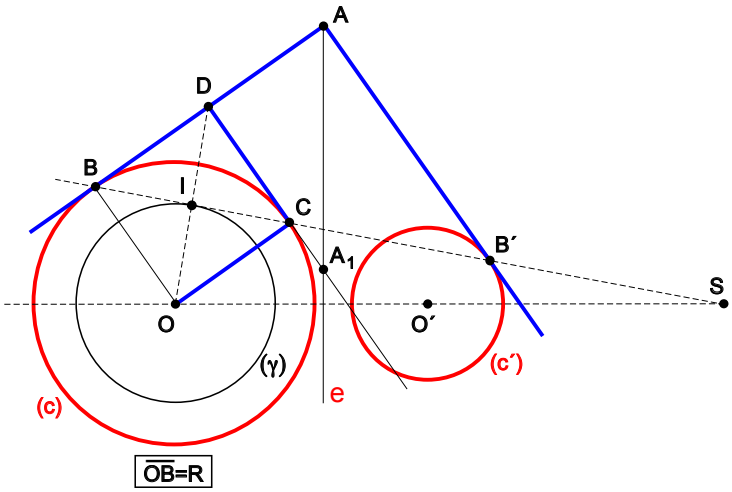
PROPOSICIÓN 7. Si una circunferencia Γ es tangente a otras dos $(\mathbf{c})$ y $(\mathbf{c}')$, los puntos de contacto, M y $\mathbf{M}'$, son anti-homólogos para las circunferencias $(\mathbf{c})$ y $(\mathbf{c}')$.

En efecto: Las tangentes en **M**, $\mathbf{M}'$ a las circunferencias $(\mathbf{c})$ y $(\mathbf{c}')$, son los ejes radicales de los pares de circunferencias $(\mathbf{c})$, $(\mathbf{\Gamma})$ y $(\mathbf{c}')$, $(\mathbf{\Gamma})$. Dado que esas dos tangentes se cortan en un punto **I** del eje radical de las circunferencias $(\mathbf{c})$ y $(\mathbf{c}')$, concluimos que los puntos **M**, $\mathbf{M}'$ son puntos anti-homólogos.



Ejemplo 4. Dadas dos circunferencias $(\mathbf{c})$ y $(\mathbf{c}')$, exteriores y no tangentes, se trata de determinar un punto, **A**, de su eje radical, tal que una de las tangentes trazadas desde **A** a una de las circunferencias sea perpendicular a una de las tangentes trazadas desde el mismo punto **A** a la otra circunferencia.

Supongamos el problema resuelto, siendo $\overline{\mathbf{AB}}$ y $\overline{\mathbf{AB}'}$ las dos tangentes perpendiculares.



Puesto que esas dos tangentes se cortan sobre el eje radical **e**, los puntos de contacto **B** y $\mathbf{B}'$ serán anti-homólogos, y la recta $\overline{\mathbf{BB}'}$ pasará por uno de los centros de homotecia, **S**. Además, la recta $\overline{\mathbf{BB}'}$ corta a la circunferencia $(\mathbf{c})$ en un segundo punto, **C**, homólogo del $\mathbf{B}'$; luego, la tangente a $(\mathbf{c})$ en el punto **C**, que es paralela a la recta $\overline{\mathbf{B}'\mathbf{A}}$, es perpendicular a la $\overline{\mathbf{AB}}$

Así, las tangentes en los puntos **B** y **C**, de la circunferencia $(\mathbf{c})$, junto con las rectas $\overline{\mathbf{OB}}$ y $\overline{\mathbf{OC}}$, determinan el cuadrado $\square\mathbf{OBCD}$, lo que nos permite afirmar que la recta $\overline{\mathbf{BC}}$ es tangente a la circunferencia $\boldsymbol{\gamma}$, de centro el punto **O** y radio $\dfrac{\mathbf{R}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$, siendo **R** el radio de la $(\mathbf{c})$.

Por consiguiente, para resolver el problema, trazaremos desde el centro de homotecia, **S**, una tangente a la circunferencia $\boldsymbol{\gamma}$, que cortará a la circunferencia $(\mathbf{c})$ en dos puntos, **B** y **C**; las tangentes en estos puntos a la circunferencia $(\mathbf{c})$ cortarán al eje radical **e** en dos puntos, **A** y $\mathbf{A_1}$, soluciones del problema.

Evidentemente, a la segunda tangente trazada desde el punto **S** a la circunferencia, $\boldsymbol{\gamma}$, corresponderán otros dos puntos $\mathbf{A}'$ y $\mathbf{A}_1'$, simétricos de los **A** y $\mathbf{A_1}$, respecto al eje $\overline{\mathbf{OO}'}$.

Por último, al considerar el segundo centro de homotecia, $\mathbf{S_1}$, se obtendrán otras cuatro soluciones. Es decir, el número total de soluciones será de ocho.

Lección 20.- HACES DE CIRCUNFERENCIAS.

20.1 Circunferencias ortogonales

20.2 Haz de circunferencias

20.3 Haces ortogonales

20.4 Involución de puntos en la sección de un haz

20.1 Circunferencias ortogonales

Por su propio interés, antes de pasar a definir la ortogonalidad de dos circunferencias, establezcamos la propiedad siguiente:

PROPOSICIÓN 1. Para que dos puntos A y B estén armónicamente separados por otros dos, C y D, es condición necesaria y suficiente que la mitad del segmento determinado por uno de estos pares sea media geométrica entre las distancias de su punto medio al otro par.

En efecto: En primer lugar, sabemos que para construir el conjugado armónico de un punto, **C**, respecto de otros dos, **A** y **B**, basta hacer pasar por **A** y **B** los lados de un ángulo recto $\widehat{\mathbf{APB}}$, y hallar la intersección de la recta $\overline{\mathbf{AB}}$ con la simétrica $\overline{\mathbf{PD}}$ de $\overline{\mathbf{PC}}$ respecto del lado $\overline{\mathbf{PB}}$. Si **O** es el punto medio del segmento $\overline{\mathbf{AB}}$ se tendrá

$$\widehat{\mathbf{OPB}} = \widehat{\mathbf{OBP}} \quad \text{(por ser isósceles } \overset{\triangle}{\mathbf{POB}}\text{)}$$
$$\widehat{\mathbf{BPC}} = \widehat{\mathbf{BPD}} \quad \text{(por construcción)}$$

y restando miembro a miembro resultará

$$\widehat{\mathbf{OPB}} - \widehat{\mathbf{BPC}} = \widehat{\mathbf{OBP}} - \widehat{\mathbf{BPD}}$$

y dado que $\widehat{\mathbf{OBP}}$ es un ángulo exterior del triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{PBD}}$, y por tanto

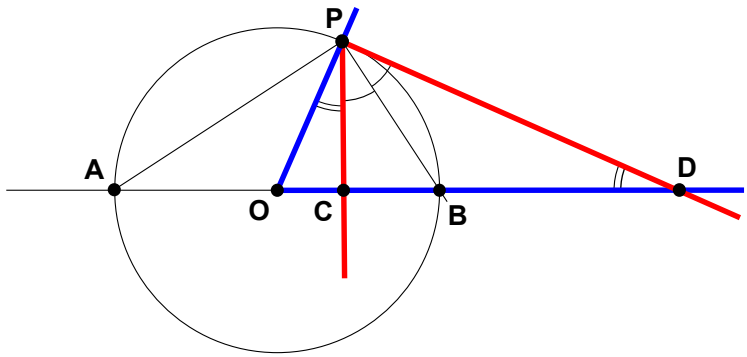
$$\widehat{\mathbf{OBP}} = \widehat{\mathbf{BPD}} + \widehat{\mathbf{PDO}}$$

se tendrá

$$\widehat{\mathbf{OPC}} = \widehat{\mathbf{PDO}}$$

lo que indica que la rectas $\overline{\mathbf{PC}}$ y $\overline{\mathbf{PD}}$ son antiparalelas respecto de la $\overline{\mathbf{OP}}$ y $\overline{\mathbf{OD}}$; luego

$$\overline{\mathbf{OC}} \cdot \overline{\mathbf{OD}} = \overline{\mathbf{OP}}^2 = \overline{\mathbf{OA}}^2 .$$



Recíprocamente, si se verifica la igualdad

$$\overline{\mathbf{OC}} \cdot \overline{\mathbf{OD}} = \overline{\mathbf{OP}}^2 = \overline{\mathbf{OA}}^2$$

podremos afirmar que las rectas $\overline{\mathbf{PC}}$ y $\overline{\mathbf{PD}}$ son antiparalelas respecto de las $\overline{\mathbf{OP}}$ y $\overline{\mathbf{OD}}$, de donde si restamos de la igualdad

$$\widehat{\mathbf{OPB}} = \widehat{\mathbf{OBP}}$$

la también igualdad

$$\widehat{\mathbf{OPC}} = \widehat{\mathbf{PDO}}$$

resultará que

$$\widehat{\mathbf{BPC}} = \widehat{\mathbf{BPD}}$$

es decir, que los puntos **C** y **D** están armónicamente separados por los **A** y **B**.

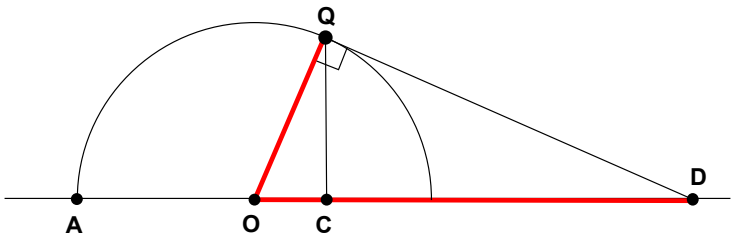
Ejemplo 1. La propiedad anterior permite construir conjugados armónicos por simple aplicación del **Teorema del cateto**, ya que la igualdad

$$\overline{\mathbf{OA}}^2 = \overline{\mathbf{OC}} \cdot \overline{\mathbf{OD}}$$

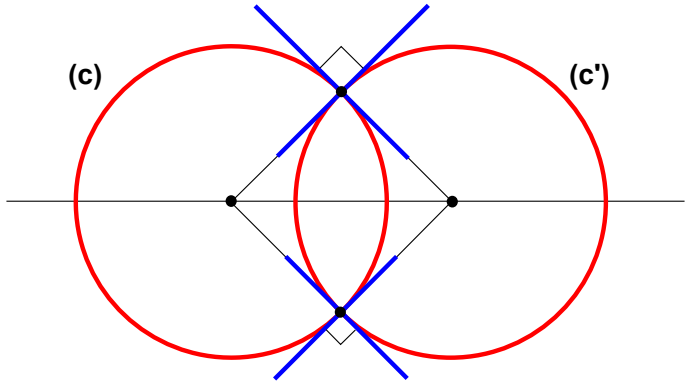
es decir

$$\overline{\mathbf{OQ}}^2 = \overline{\mathbf{OC}} \cdot \overline{\mathbf{OD}}$$

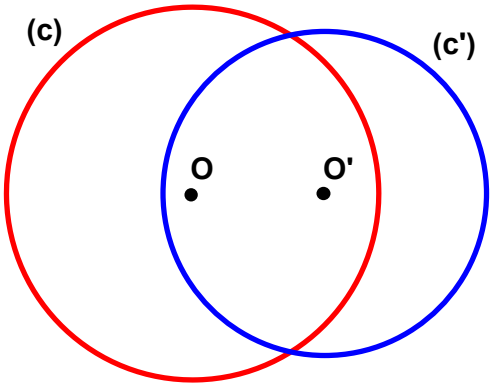
nos permite afirmar que el punto **D** es el conjugado armónico del **C**, respecto de los **A** y **B**, como queda reflejado en la figura siguiente:



Dadas dos circunferencias, $(\mathbf{c})$ y $(\mathbf{c}')$, diremos de ellas que son **ortogonales** cuando se cortan de forma que las tangentes en cada uno de los puntos de intersección son perpendiculares entre sí.

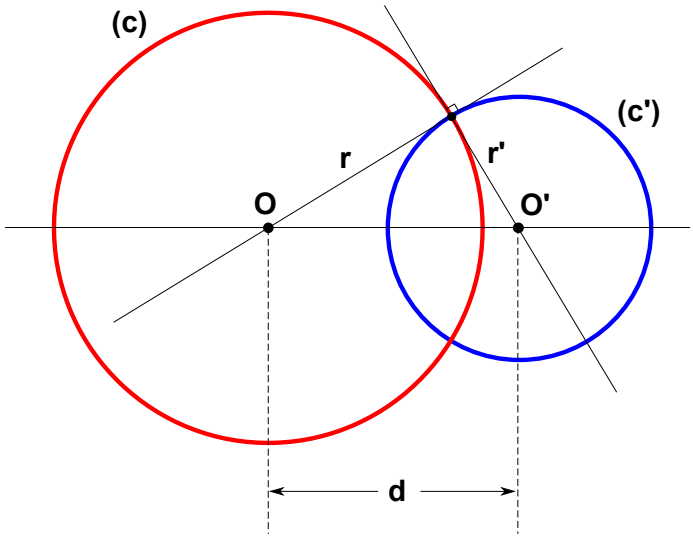


Ejemplo 2. Dado que la tangente a cada circunferencia, en cada punto de intersección pasa por el centro de la otra, para que dos circunferencias sean ortogonales al menos debe verificarse que el centro de cada una de ellas sea exterior a la otra.



Así, podemos afirmar que las circunferencias $(\mathbf{c})$ y $(\mathbf{c}')$ de la figura adjunta no son ortogonales.

Ejemplo 3. Para dos circunferencias ortogonales, $(\mathbf{c})$ y $(\mathbf{c}')$, se debe verificar que, si $\mathbf{d}$ es la distancia entre los centros y son $\mathbf{r}$ y$\mathbf{r}'$ sus respectivos radios, entonces $\mathbf{d^2 = r^2 + r'^2}$, relación que sólo se cumplirá cuando es rectángulo el triángulo formado por los dos centros y el punto de intersección.



Así, si para las circunferencias $(\mathbf{c})$ y $(\mathbf{c}')$, se tuviese que

$$\mathbf{d = 10} \quad , \quad \mathbf{r = 5} \quad , \quad \mathbf{r' = 7}$$

como

$$\mathbf{d^2 = 100 \neq r^2 + r'^2 = 25 + 49 = 74}$$

podemos afirmar que $(\mathbf{c})$ y $(\mathbf{c}')$ no son ortogonales.

Ejemplo 4. La potencia del centro de cada una de dos circunferencias ortogonales $(\mathbf{c})$ y $(\mathbf{c}')$, respecto de la otra, es el cuadrado de su propio radio, puesto que de la igualdad

$$\mathbf{d^2 = r^2 + r'^2}$$

se deducen las igualdades

$$\mathbf{d^2 - r'^2 = r^2} \quad [\text{potencia de } \mathbf{O} \text{ respecto de } (\mathbf{c}')]$$
$$\mathbf{d^2 - r^2 = r'^2} \quad [\text{potencia de } \mathbf{O}' \text{ respecto de } (\mathbf{c})]$$

Lo establecido hasta ahora para las circunferencias ortogonales nos permite enunciar la propiedad siguiente:

PROPOSICIÓN 2. Dadas dos circunferencias ortogonales, si una recta r las corta y pasa por el centro O de una de ellas, las intersecciones forman una cuaterna armónica.

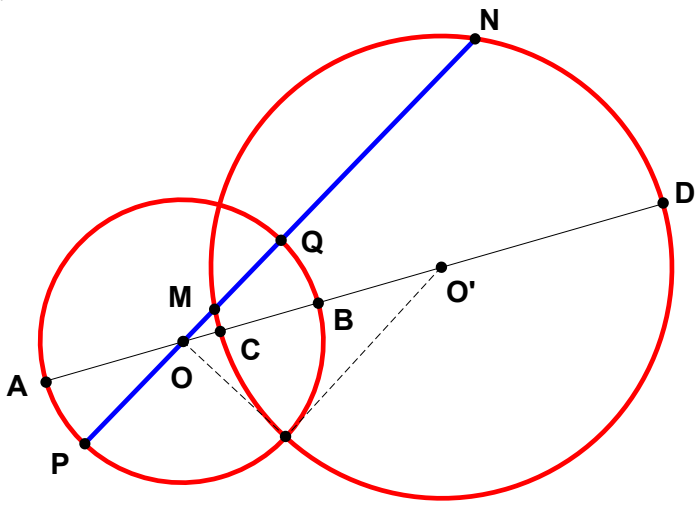
En efecto: La potencia del punto **O** respecto de la circunferencia de centro $\mathbf{O}'$ es,

$$\overline{\mathbf{OM}} \cdot \overline{\mathbf{ON}} = \overline{\mathbf{OP}}^{\mathbf{2}}$$

lo que prueba, en virtud de la proposición que establecimos al principio de esta lección, que la cuaterna

$$(\mathbf{PQMN})$$

es armónica



Ejemplo 5. La proposición anterior permite afirmar, como caso particular, que los diámetros alineados de dos circunferencias ortogonales se dividen armónicamente.
Refiriéndonos a la figura anterior, sería armónica la cuaterna.

$$(\mathbf{ABCD}) \ ,$$

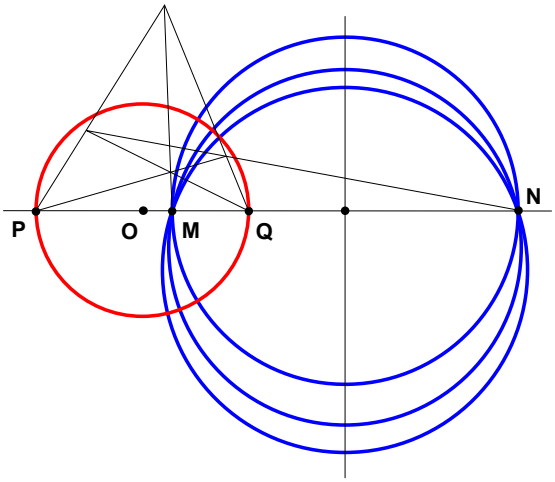
es decir

$$(\mathbf{ABCD}) = \mathbf{-1}$$

Ejemplo 6. A modo de recíproco de lo establecido en el ejemplo anterior podemos afirmar que, si la cuaterna (**PQMN**) es armónica entonces toda circunferencia que pase por los puntos **M** y **N**, es ortogonal a la circunferencia de diámetro $\overline{\mathbf{PQ}}$.

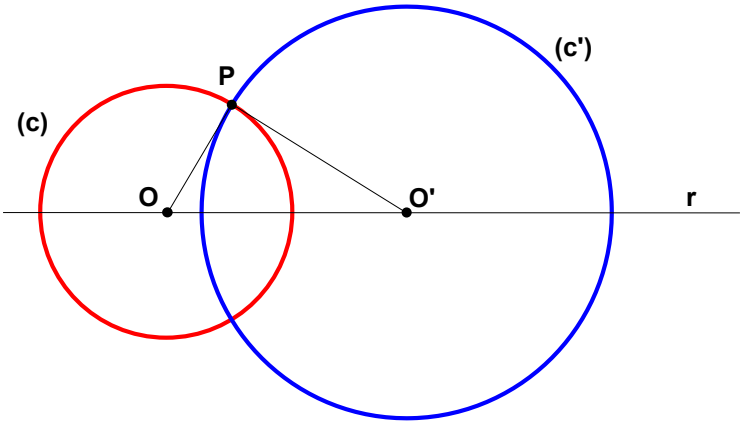
Basta ver que la potencia del punto medio del segmento $\overline{\mathbf{PQ}}$, el **O**, respecto de la circunferencia que pasa por los puntos **M** y **N**, es

$$\overline{\mathbf{OM}} \cdot \overline{\mathbf{ON}} = \overline{\mathbf{OP}}^{\mathbf{2}}$$



Ejemplo 7. Dada una circunferencia $(\mathbf{c})$, trazar una circunferencia $(\mathbf{c}')$, ortogonal con la $(\mathbf{c})$.

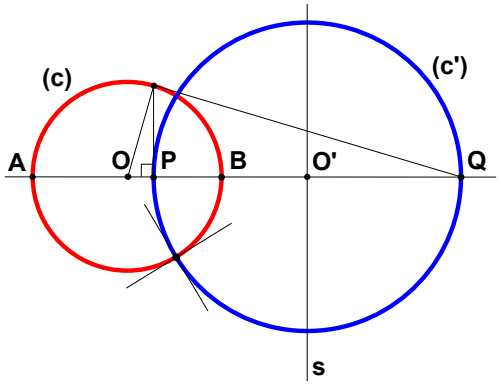
Bastará trazar una recta **r**, diametral de $(\mathbf{c})$, y fijar sobre ella un punto $\mathbf{O}'$, centro de la circunferencia buscada, desde el que trazaremos una tangente a $(\mathbf{c})$, siendo el punto de contacto **P**. El radio de la circunferencia buscada será $\overline{\mathbf{O'P}}$.



Evidentemente el número de posibles circunferencias $(\mathbf{c}')$ ortogonales con la $(\mathbf{c})$ es ilimitado, puesto que tanto **r** como $\mathbf{O}'$ podemos variarlos a nuestro gusto. Otra cosa sería si impusiésemos condiciones extras a $(\mathbf{c}')$.

Ejemplo 8. Dada una circunferencia $(\mathbf{c})$ trazar una circunferencia $(\mathbf{c}')$ ortogonal con la $(\mathbf{c})$, y que pase por el punto **P**.

Bastará trazar la recta $\overline{\mathbf{OP}}$, determinando luego el punto **Q**, conjugado armónico del **P** respecto del par de puntos **A** y **B**. La circunferencia de centro $\mathbf{O}'$ y diámetro $\overline{\mathbf{PQ}}$ cumplirá con lo que nos interesa.



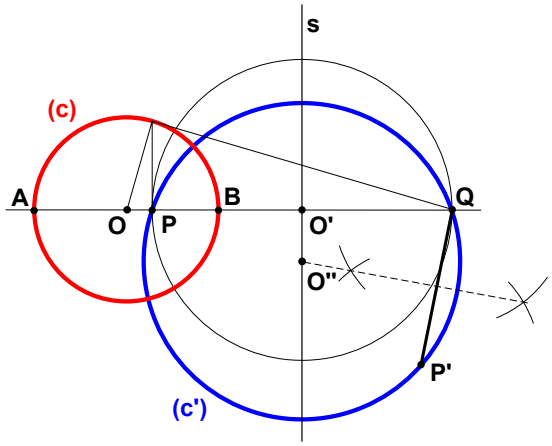
Evidentemente el número de posibles circunferencias $(\mathbf{c}')$ ortogonales con la $(\mathbf{c})$, que pasen por **P**, es ilimitado, puesto que todas las que tengan su centro sobre la recta **s**, y pasen por **P** y **Q**, cumplirán con lo que nos interesaba.

Ejemplo 9. Dada una circunferencia $(\mathbf{c})$, trazar la circunferencia $(\mathbf{c}')$ ortogonal con la $(\mathbf{c})$, y que pase por los puntos **P** y $\mathbf{P}'$, no alineados con el centro de $(\mathbf{c})$.

Bastará trazar la recta $\overline{\mathbf{OP}}$, que fija un diámetro $\overline{\mathbf{AB}}$, determinando luego el punto **Q**, conjugado armónico del **P** respecto del par de puntos **A** y **B**.

Pasamos luego a determinar la recta **s**, perpendicular a la $\overline{\mathbf{OP}}$ en el punto medio $\mathbf{O}'$ del segmento $\overline{\mathbf{PQ}}$.

Cualquier circunferencia de centro situado sobre la recta **s**, pasando por el punto **P** será ortogonal con la $(\mathbf{c})$. Luego, sólo nos quedará por determinar de entre todas ellas la que pasa por $\mathbf{P}'$ para tener resuelto nuestro problema; el centro $\mathbf{O}''$ de una tal circunferencia será el punto de intersección de la mediatriz del segmento $\overline{\mathbf{P}'\mathbf{Q}}$ con la recta **s**.



20.2 Haz de circunferencias

En la lección anterior, estudiamos como determinar el eje radical de dos circunferencias. Nos proponemos en ésta como, dada una circunferencia $(\mathbf{c})$, y una recta **r** de su plano, determinar todas las circunferencias que tengan con la $(\mathbf{c})$ el mismo eje radical **r**. Al conjunto de tales circunferencias, incluida la $(\mathbf{c})$, le llamaremos **haz de circunferencias.**

Los casos posibles, que estudiaremos, serán los siguientes:

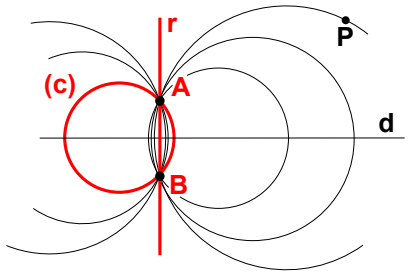
1.- La recta **r** corta a la circunferencia $(\mathbf{c})$.

2.- La recta **r** es tangente a la circunferencia $(\mathbf{c})$.

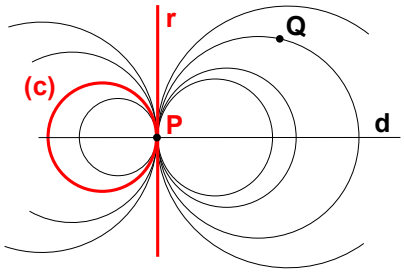
3.- La recta **r** es exterior a la circunferencia $(\mathbf{c})$.

y en todos ellos será **d** la recta diametral perpendicular a la **r**.

1.- La recta r corta a la circunferencia $(\mathbf{c})$: Si **A** y **B** son los puntos de intersección de **r** con $(\mathbf{c})$, todas las circunferencias que pasen por dichos puntos cumplirán con la condición que nos interesa; luego todo punto de la recta **d** es centro de una de tales circunferencias. Además, por todo punto **P** del plano, no perteneciente a **r**, pasará una circunferencia y sólo una del haz, precisamente la determinada por los puntos **A**, **B** y **P**.

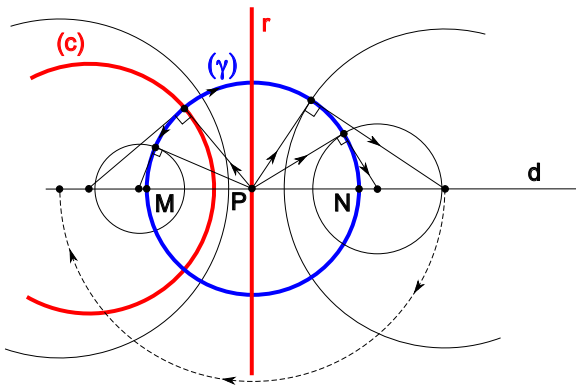


2.- La recta r es tangente a la circunferencia $(\mathbf{c})$: Si es **P** el punto de tangencia, entonces cualquier otra circunferencia, tangente en el punto **P** a la recta **r**, será una circunferencia del haz, y los centros de todas ellas serán los distintos puntos de la recta **d**, excepto el propio **P**. Además por todo punto **Q** del plano, no perteneciente a **r** pasará una circunferencia y sólo una del haz, precisamente la de centro en la intersección de la mediatriz del segmento $\overline{\mathbf{PQ}}$ con la recta **d**.



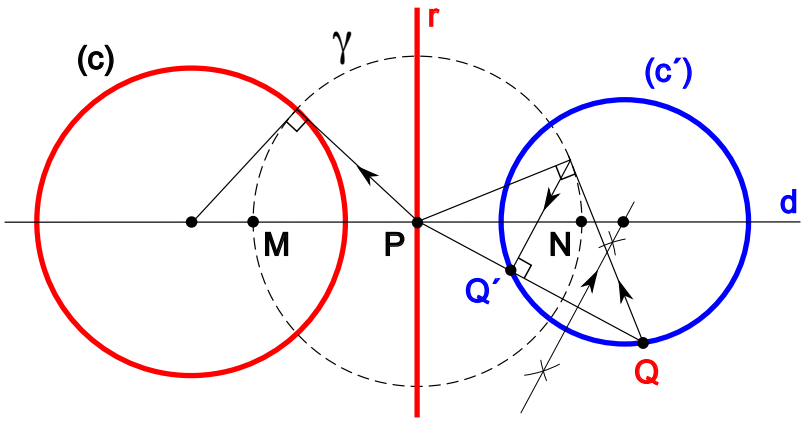
3.- La recta r es exterior a la circunferencia $(\mathbf{c})$**:** En este caso las circunferencias del haz se construirán de forma que teniendo su centro en **d**, el punto **P**, intersección de las rectas **r** y **d**, debe tener la misma potencia respecto de $(\mathbf{c})$, que respecto de las distintas circunferencias del haz.

La construcción se apoya en el trazado de la circunferencia auxiliar $\boldsymbol{\gamma}$, de centro **P** y ortogonal a $(\mathbf{c})$. Así, cualquier otra circunferencia ortogonal a $\boldsymbol{\gamma}$ cumplirá con la condición que nos interesa y recíprocamente. En consecuencia, los centros de las circunferencias del haz serán los puntos de la recta **d**, exteriores al diámetro $\overline{\mathbf{MN}}$ de la circunferencia $\boldsymbol{\gamma}$. A los puntos **M** y **N** se les llamará **polos del haz**.



Al igual que en los dos casos anteriores se verificará que para todo punto **Q**, exterior a la recta **r**, pasará una única circunferencia del haz. Para su determinación deberíamos hallar el punto $\mathbf{Q}'$, armónicamente separado del **Q** respecto de los extremos del diámetro de $\boldsymbol{\gamma}$ alineado con los puntos **P** y **Q**; el centro de la circunferencia buscada será el punto de intersección de la recta **d** con la mediatriz del segmento $\overline{\mathbf{QQ}'}$.

Ejemplo 1. Dada la recta **r**, exterior a la circunferencia $(\mathbf{c})$, y el punto **Q**, exterior a la recta **r**, se trata de determinar la circunferencia, $(\mathbf{c}')$, del haz de circunferencias que tienen con la $(\mathbf{c})$ el mismo eje radical **r**, y pase por el punto **Q**. La construcción resulta de aplicar lo establecido en el anterior punto **(3)**:



20.3 Haces ortogonales

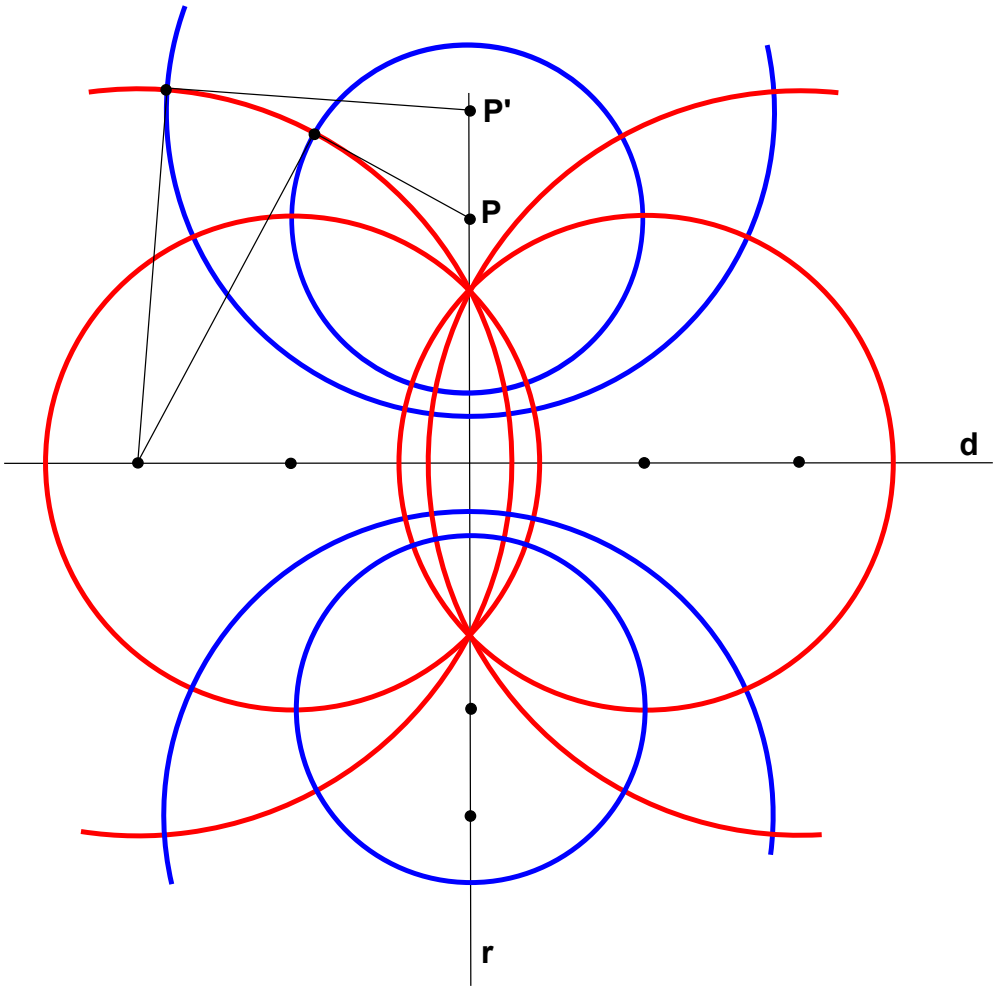
Para cualquiera que sea el haz de circunferencias se verifica la propiedad siguiente:

PROPOSICIÓN 1. Todo punto del eje radical de un haz de circunferencias, exterior a todas las circunferencias del haz, es centro de una circunferencia ortogonal a todas ellas.

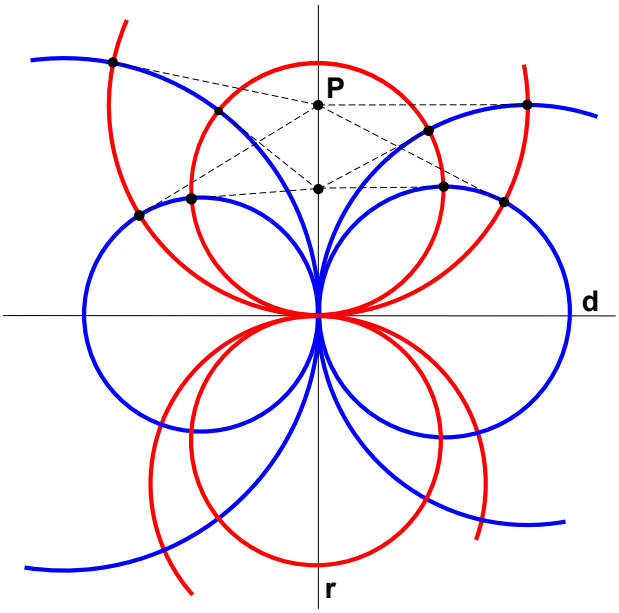
> En efecto: Dado que todos los puntos del eje radical de un haz tienen igual potencia respecto de todas las circunferencias del haz, si desde uno cualquiera de dichos puntos, exterior a todas ellas, sea el **P**, trazamos tangentes a las mismas, todos los segmentos de dichas tangentes, comprendidos entre el **P** y los puntos de contacto, son iguales, lo que significa que son radios de una circunferencia de centro el punto **P**, ortogonal a todas las circunferencias del haz.

Ilustremos lo anterior con unos ejemplos.

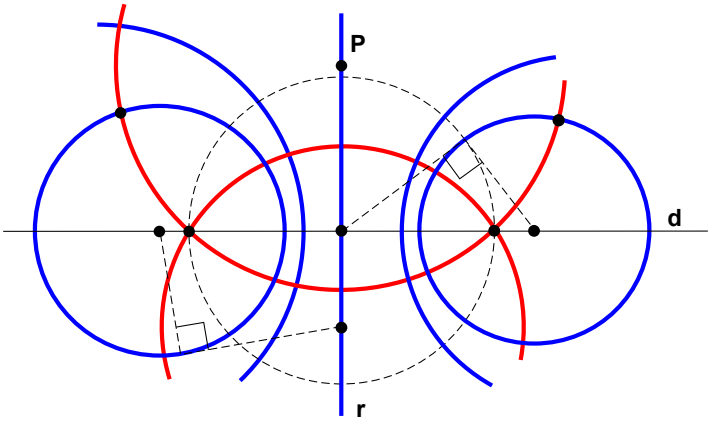
Ejemplo 1. Si el eje radical corta a las circunferencias del haz, la representación gráfica será la siguiente:



Ejemplo 2. Si el eje radical es tangente a las circunferencias del haz la representación gráfica será la siguiente.



Ejemplo 3. Si el eje radical no corta a las circunferencias del haz, la representación gráfica será la siguiente.



Como continuación de la proposición anterior tenemos la siguiente:

PROPOSICIÓN 2. Todas las circunferencias ortogonales a las circunferencias de un haz, H, constituyen a su vez otro haz, cuyo eje, d, es la línea de centros del primero, y cuya línea de centros r, es el eje del primero.

En efecto: Toda circunferencia del haz inicial es ortogonal a todas las circunferencias construidas como se indicaba en la proposición anterior; por consiguiente, su centro es punto de igual potencia respecto de todas ellas. Así resultará que la recta **d**, de los centros de **H**, es eje radical común a todas las circunferencias ortogonales.

20.4 Involución de puntos en la sección de un haz

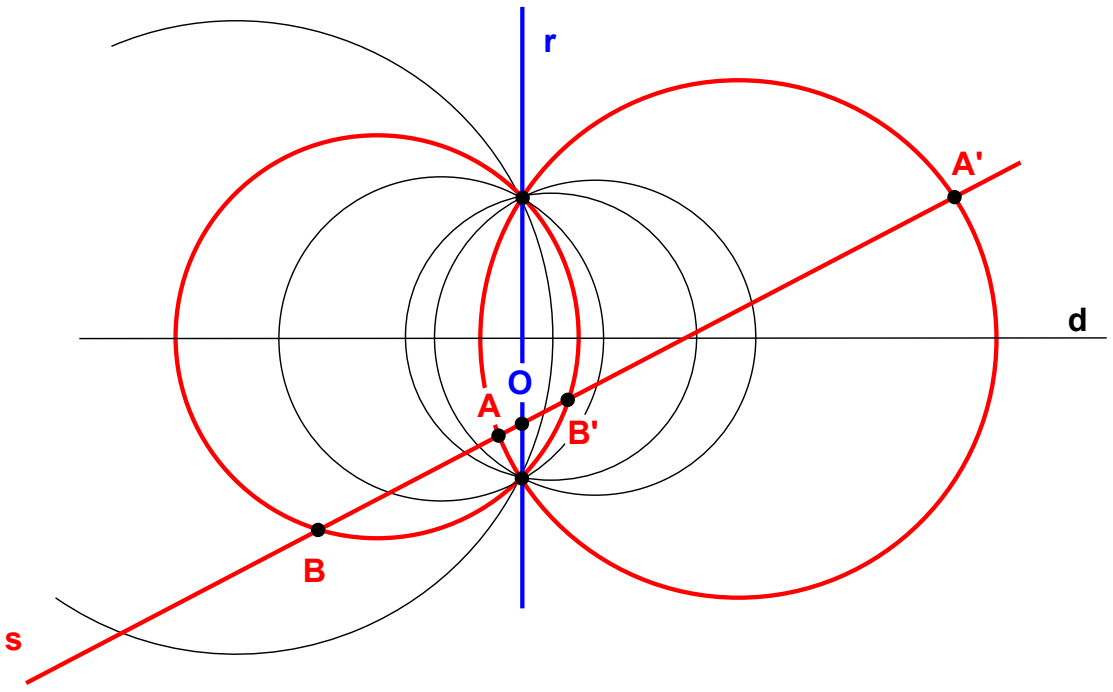
A partir de un haz de circunferencias es fácil establecer involuciones sobre determinadas rectas, como muestra la propiedad siguiente:

PROPOSICIÓN 1. Dado un haz de circunferencias, al cortarlas por cualquier recta, s, no paralela al eje radical, r, los pares de puntos de intersección son puntos homólogos de una involución, cuyo centro, O es la intersección de la recta con el eje radical del haz.

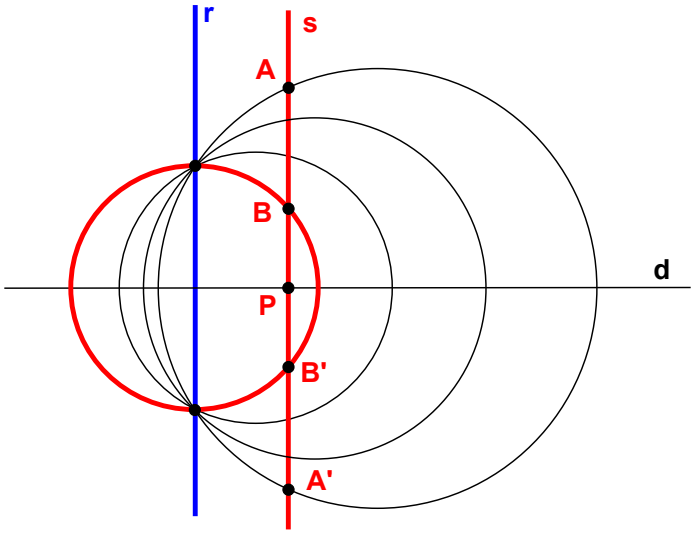
En efecto: Sin son $\mathbf{A}$, $\mathbf{A'}$; $\mathbf{B}$, $\mathbf{B'}$;... los pares de intersección de la recta dada, **s**, con las circunferencias del haz, y es **O** la intersección de **s** con **r**, se verificará

$$\overline{\mathbf{OA}} \cdot \overline{\mathbf{OA'}} = \overline{\mathbf{OB}} \cdot \overline{\mathbf{OB'}} = (\mathbf{constante})$$

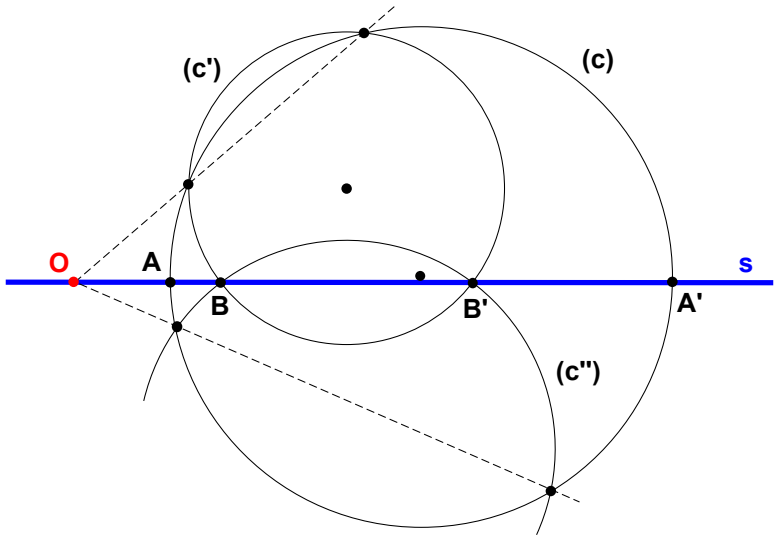
por ser la misma la potencia del punto **O**, respecto de todas las circunferencias del haz.



Ejemplo 1. En el caso de que la recta **s** sea paralela al eje radical del haz de circunferencias, los pares de puntos de intersección resultarán ser simétricos respecto de la línea de centros del haz, y en consecuencia obtendremos una involución simétrica respecto del punto **P**, intersección de la recta **s** con la mencionada línea de centros, **d**.



Ejemplo 2. Como aplicación de la proposición establecida, es posible construir el centro de una involución rectilínea no simétrica de la que se conocen dos pares de puntos homólogos: **A**, **A′** y **B**, **B′**.
Bastará trazar una circunferencia por cada par, y hallar el eje radical de ambas circunferencias (**c**) y (**c′**). La intersección, **O**, de dicho eje con la recta dada, **s**, será el centro buscado.



El centro así determinado es único, puesto que si sustituimos, por ejemplo, la circunferencia (**c′**), que pasa por los puntos **B** y **B′**, por otra (**c″**), el punto de intersección de la recta **s** con el nuevo eje radical, de (**c**) y (**c″**), será el centro radical de las tres circunferencias (**c**), (**c′**), (**c″**), y por tanto coincide con la intersección de **s** y el eje radical anterior.

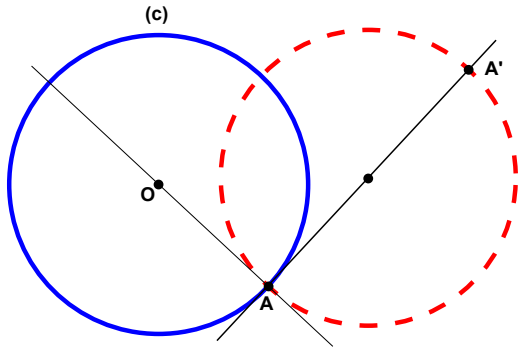
Lección 21.- POLARIDAD EN LA CIRCUNFERENCIA.

21.1 Polo y polar respecto de una circunferencia
21.2 Polaridad recíproca
21.3 Transformación por polares recíprocas
21.4 Involución de puntos conjugados en una recta
21.5 Polar de un punto respecto de un ángulo

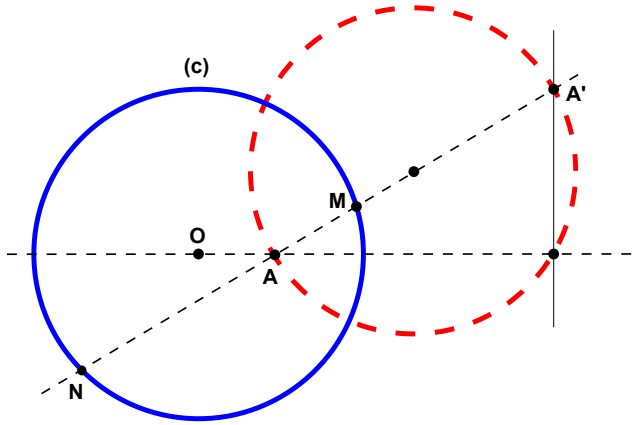
21.1 Polo y polar respecto de una circunferencia

De dos puntos **A** y **A′** diremos que son **conjugados**, respecto de una circunferencia (**c**), cuando la circunferencia de diámetro $\overline{\mathbf{AA'}}$ sea ortogonal a la (**c**).

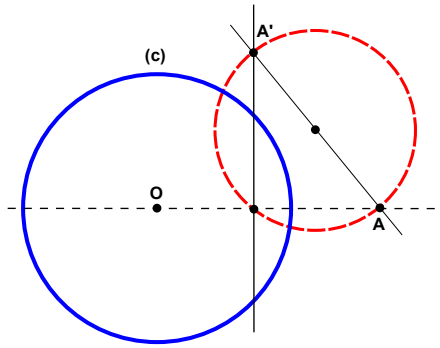
Ejemplo 1. Dada una circunferencia, (**c**), todo punto de la misma es conjugado con todos los de la tangente a (**c**) en dicho punto.



Ejemplo 2. En virtud de lo establecido en el párrafo 20.1 de la lección anterior, podemos afirmar que: Dos puntos **A** y **A′** conjugados, uno interior y el otro exterior a una circunferencia, (**c**), están armónicamente separados por los de intersección de la recta que determinan con la circunferencia dada.



Ejemplo 3. Dos puntos **A** y **A′**, exteriores, a la circunferencia (**c**), pueden evidentemente ser conjugados. La definición de polo y polar, que estableceremos a continuación, nos dará amplia información sobre esta posibilidad.



Llamaremos **polar** de un punto, **A**, respecto de una circunferencia, (**c**), al lugar geométrico de los puntos conjugados de **A** respecto de (**c**).

Ejemplo 4. El primero de los ejemplos anteriores nos permite afirmar que la polar de cualquier punto de una circunferencia, respecto de ella, es la tangente a la misma en dicho punto.

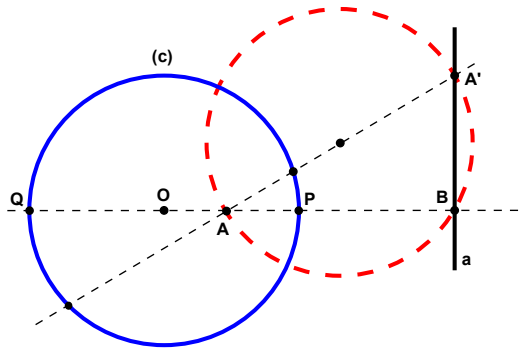
En relación a la definición anterior se verifica la propiedad siguiente:

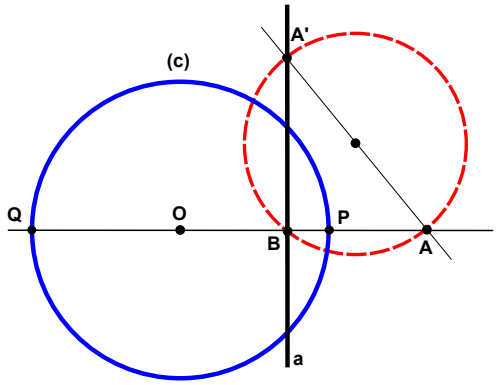
PROPOSICIÓN 1. La polar, a, de un punto, A, no perteneciente a la circunferencia (c) y distinto de su centro, O, es una recta perpendicular a la que une el punto A con el O.

En efecto: Observemos que, en principio, el punto **A** pueda ser tanto interior como exterior a (**c**).

Así, si **B** es el punto armónicamente separado del **A** por los **P** y **Q**, extremos del diámetro situado sobre la recta $\overline{\mathbf{OA}}$, se verificará que **B**, por lo establecido en el párrafo 20.1 de la lección anterior, pertenece a la polar; en consecuencia, cualquier otro punto $\mathbf{A}'$, de la perpendicular $\overline{\mathbf{BA}'}$ a la recta $\overline{\mathbf{OA}}$ por el punto **B**, será también conjugado del **A**, puesto que la circunferencia de diámetro $\overline{\mathbf{AA}'}$ pasa por **B**, y es por tanto también ortogonal a (**c**).

Se verifica asimismo que, recíprocamente: Si el punto $\mathbf{A}'$, es conjugado del **A**, la circunferencia del diámetro $\overline{\mathbf{AA}'}$, ortogonal a (**c**), cortará a la recta $\overline{\mathbf{OA}}$ en el punto **B**, armónicamente separado del **A** por los puntos **P** y **Q**, y puesto que el ángulo $\widehat{\mathbf{A}'\mathbf{BA}}$ es recto, $\mathbf{A}'$ pertenecerá a la perpendicular $\overline{\mathbf{BA}'}$ a la recta $\overline{\mathbf{OA}}$ por el punto **B**

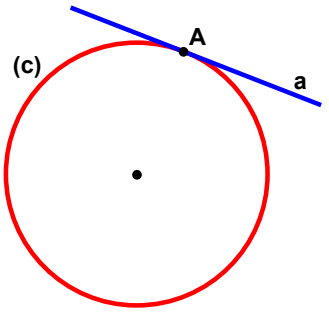




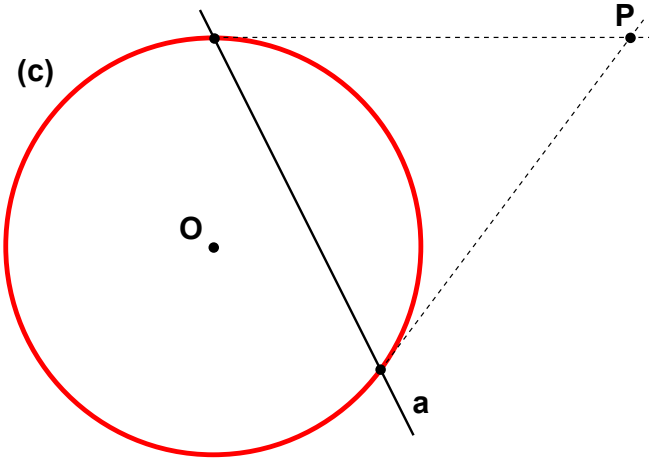
Ejemplo 5. Lo establecido hasta aquí nos permite dar otra definición de polar. Así, podríamos decir que, la **polar** de un punto **A**, no perteneciente a la circunferencia (**c**), es la recta que contiene todos los puntos armónicamente separados del **A** por los de intersección de las distintas secantes trazadas por **A**.

Dada una circunferencia, (**c**), si **a** es la recta polar del punto **A**, respecto de (**c**), del punto **A** diremos que es el **polo** de la recta **a**.

Ejemplo 6. Si la recta **a** es tangente a la circunferencia (**c**), el polo de **a** es el punto **A** de contacto de **a** con (**c**).



Ejemplo 7. El polo de una recta a que corta a la circunferencia (**c**), y no pasa por su centro **O**, es el punto **P** de intersección de las tangentes a (**c**) en los de intersección de **a** con (**c**).



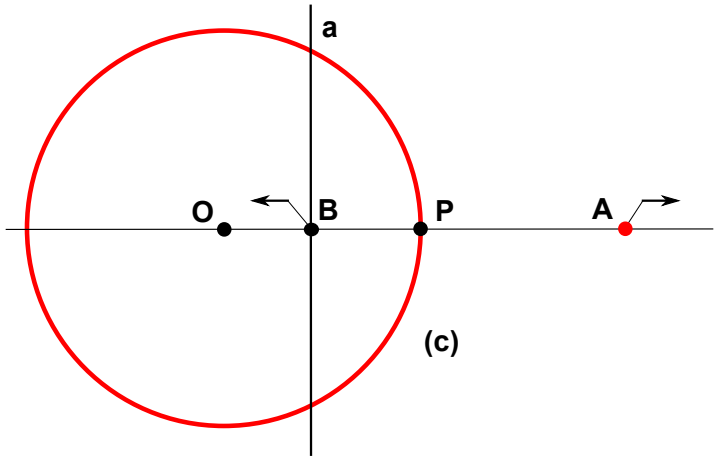
En el ejemplo anterior impusimos que la recta **a** no pasara por el centro, **O**, de la circunferencia $(\mathbf{c})$, dado que al acercarse la recta **a**, al centro **O**, su polo se va alejando de él. Así, si $\overline{\mathbf{OB}}$ es la distancia del **O** a la recta **a**, por la propiedad de la cuaterna armónica establecida en el párrafo 20.1 de la lección anterior, deberá verificarse que

$$\overline{\mathbf{OB}} \cdot \overline{\mathbf{OA}} = \overline{\mathbf{OP}}^2 = (\mathbf{constante})$$

es decir

$$\overline{\mathbf{OA}} = \frac{\overline{\mathbf{OP}}^2}{\overline{\mathbf{OB}}}$$

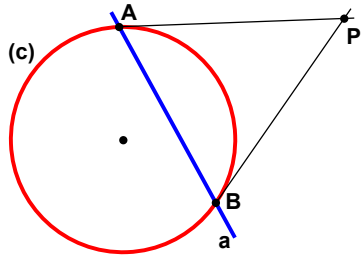
con lo que si $\overline{\mathbf{OB}}$ tiende a cero, $\overline{\mathbf{OA}}$ tenderá a infinito.



Llegados a este punto convendremos en decir que, el **polo** de una recta diametral es el punto del infinito de la recta perpendicular a ésta por el punto **O**, es decir su **punto impropio**.

21.2 Polaridad recíproca

La definición que establecimos, acerca de los puntos conjugados, es recíproca; así, si el punto **A** es conjugado del $\mathbf{A}'$, respecto de una circunferencia $(\mathbf{c})$, también el punto $\mathbf{A}'$ es conjugado del **A**.
Significa esto que si $\mathbf{A}'$ está en la polar de **A**, también **A** está en la polar de $\mathbf{A}'$.
Podemos, por tanto, afirmar que: La polar **a** de un punto **P** exterior a una circunferencia $(\mathbf{c})$ pasará por los puntos de contacto **A** y **B** de las tangentes trazadas a ella por el punto **P**, puesto que dichos puntos son los polos de las referidas tangentes.

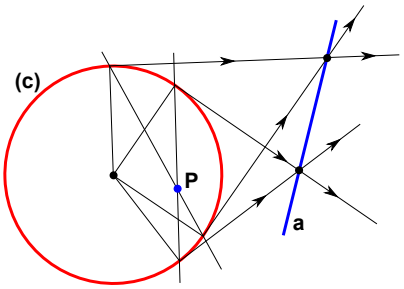


Las consideraciones anteriores permiten establecer que, dada una circunferencia, existe una biyección entre los puntos y rectas de su plano, que hace corresponder a cada punto, distinto del centro de la circunferencia, su polar, y a cada recta, que no pase por ese centro, su polo. A esta biyección se la llamará **polaridad** respecto de la circunferencia dada.

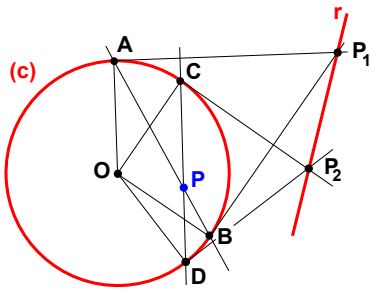
Para dar generalidad al concepto así establecido, convendremos en asignar como polar del centro a la recta impropia del plano, y como polo de cualquier recta diametral el punto impropio de cualquiera de sus rectas perpendiculares. La polaridad resultará ser, así, una biyección sin excepciones entre los puntos y rectas del plano de la circunferencia que la determina.

Resulta evidente la siguiente propiedad de la polaridad respecto de una circunferencia, que en el apartado siguiente estudiaremos con detalle: **Las polares de los distintos puntos de una recta pasan por el polo de dicha recta, y recíprocamente, los polos de las distintas rectas de un haz pertenecen a la polar del centro de dicho haz.**

Ejemplo 1. Para dibujar la polar, **a**, de un punto, **P**, interior a la circunferencia, $(\mathbf{c})$, que establece la polaridad, bastará considerar dos rectas concurrentes en dicho punto y determinar sus polos; la recta que pasa por ambos será la polar buscada.

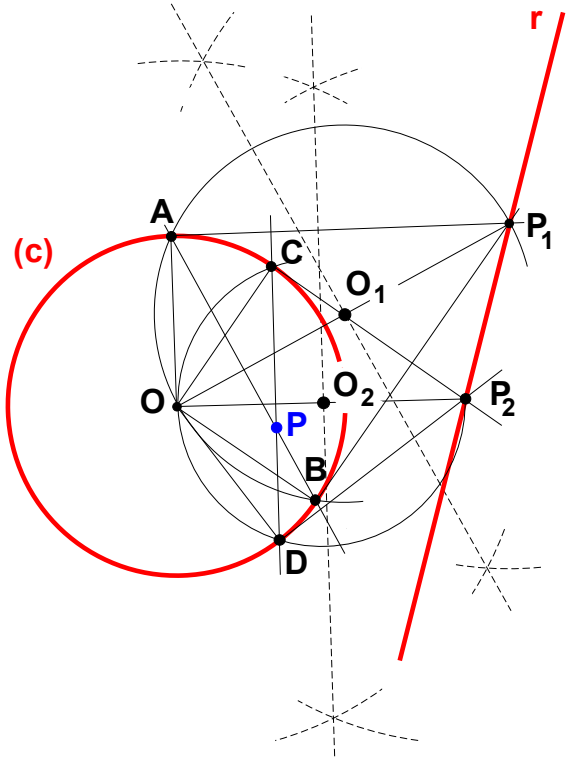


Ejemplo 2. Determinar el polo de una recta, **r**, respecto de una circunferencia $(\mathbf{c})$, siendo **r** exterior a $(\mathbf{c})$.



Desde los puntos cualesquiera, $\mathbf{P_1}$ y $\mathbf{P_2}$, de la recta **r** se trazan sendas tangentes a la circunferencia $(\mathbf{c})$, cuyos puntos de contacto son, respectivamente, **A**, **B** y **C**, **D**. El punto de intersección de las rectas $\overline{\mathbf{AB}}$ y $\overline{\mathbf{CD}}$ es el punto **P**, polo de la recta **r** respecto de la circunferencia $(\mathbf{c})$.

Ejemplo 3. Determinar el polo de una recta **r**, respecto de una circunferencia $(\mathbf{c})$, siendo **r** exterior a $(\mathbf{c})$.



El proceso es el mismo que el del ejemplo anterior. La diferencia es que en éste se determinan exactamente los puntos **A**, **B**, **C**, **D** de las tangentes desde los $\mathbf{P_1}$ y $\mathbf{P_2}$, cualesquiera a la circunferencia $(\mathbf{c})$, lo que redunda en que el polo, **P**, queda determinado, también exactamente.

21.3 Transformación por polares recíprocas

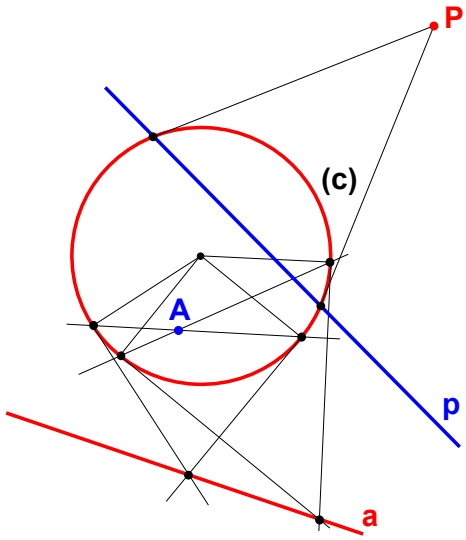
Vamos a analizar con más detalle el concepto de **polaridad** establecido en el punto anterior estableciendo lo que llamaremos **polaridad recíproca** entre figuras.

Fijemos una circunferencia $(\mathbf{c})$, a la que daremos el nombre de **circunferencia de referencia**, y consideremos una figura **F**, conjunto compuesto de puntos y rectas.

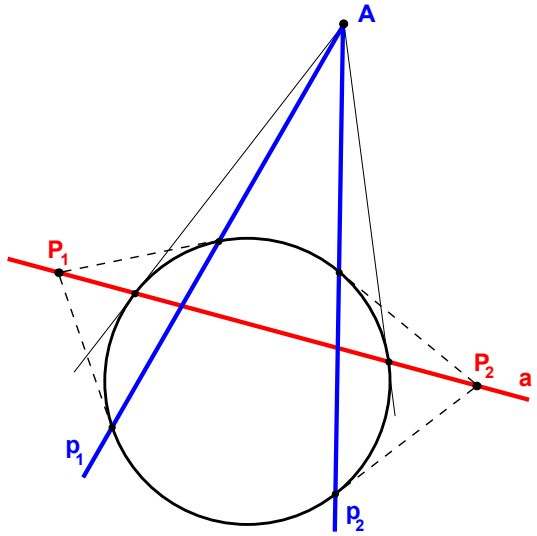
Si a todo punto de **F** se le hace corresponder su polar respecto de $(\mathbf{c})$, y a toda recta, también de **F**, se la hace corresponder su polo respecto de $(\mathbf{c})$, resultará que el conjunto de rectas y puntos así obtenidos constituirá una nueva figura, $\mathbf{F'}$, a la que llamaremos **polar recíproca de F respecto de** $(\mathbf{c})$.

Dado que la figura **F** se deduce de la $\mathbf{F'}$ por el mismo procedimiento, podemos decir que **F** es, también, la **polar recíproca de** $\mathbf{F'}$ **respecto de** $(\mathbf{c})$, lo que justifica que se diga que las figuras **F** y $\mathbf{F'}$ son **polares recíprocas respecto de** $(\mathbf{c})$.

Ejemplo 1. Las figuras $\mathbf{F} = \{\mathbf{P}, \mathbf{a}\}$ y $\mathbf{F} = \{\mathbf{p}, \mathbf{A}\}$ son polares recíprocas respecto de la circunferencia de referencia $(\mathbf{c})$.



Ejemplo 2. Dadas dos figuras, $\mathbf{F}$ y $\mathbf{F}'$, polares recíprocas respecto de una circunferencia de referencia, $(\mathbf{c})$, resultará que a puntos alineados de $\mathbf{F}$ corresponderán rectas concurrentes de $\mathbf{F}'$.
Basta con observar que si los puntos $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$,..., de $\mathbf{F}$, están sobre una recta $\mathbf{r}$, las polares de dichos puntos pasan por un punto bien determinado, que no es otro que el polo $\mathbf{A}$ de $\mathbf{a}$ respecto de $(\mathbf{c})$.



Un razonamiento análogo nos permitiría afirmar que, a rectas concurrentes de la figura $\mathbf{F}$, corresponderían puntos alineados de la figura $\mathbf{F}'$.

La polaridad recíproca nos establece que a toda propiedad de una figura $\mathbf{F}$ corresponderá una propiedad de la figura polar recíproca $\mathbf{F}'$ y de ambas propiedades diremos que son **correlativas**, es decir que la una es la transformada de la otra por polares recíprocas, que es en lo que consiste el **principio de dualidad**

en geometría.
Sin embargo, no siempre es fácil obtener la propiedad correlativa de una propiedad dada.
Dividamos las propiedades geométricas en dos clases:

- **Propiedades descriptivas.-** Aquellas que consideran puntos y rectas sin hacer intervenir el concepto de medida.

- **Propiedades métricas.-** Las que hacen intervenir la medida, por ejemplo de ángulos y distancias.

Las propiedades descriptivas son fácilmente transformables por polares recíprocas. Prácticamente basta con aplicar las propiedades que subyacen en los dos ejemplos anteriores.
Las propiedades métricas, más difíciles de transformar, pueden, en algunos casos, tener éxito apoyándonos en las propiedades que siguen.

PROPOSICION 1. Dados dos haces planos de rectas, de vértices respectivos O y O′, si las cuatro rectas $(\mathbf{O.\ D_1D_2D_3D_4})$ y $(\mathbf{O'.\ D'_1D'_2D'_3D'_4})$ son tales que los ángulos de las rectas del primer haz son, respectivamente, iguales en valor y signo a los ángulos del segundo haz, resultará que si la primera cuaterna de rectas es armónica, también lo será la segunda.

En efecto: Por hipótesis tenemos que se verifican las igualdades

$$\widehat{\mathbf{D_1D_2}} = \widehat{\mathbf{D'_1D'_2}} \quad , \quad \widehat{\mathbf{D_2D_3}} = \widehat{\mathbf{D'_2D'_3}} \quad , \quad \widehat{\mathbf{D_3D_4}} = \widehat{\mathbf{D'_3D'_4}}$$

Al desplazar el segundo haz de forma que hagamos coincidir el vértice $\mathbf{O'}$ con el $\mathbf{O}$ y el rayo $\mathbf{D'_1}$ con el $\mathbf{D_1}$, dado que el ángulo $\widehat{\mathbf{D_1D_2}}$ es igual al ángulo $\widehat{\mathbf{D'_1D'_2}}$, el rayo $\mathbf{D'_2}$ coincidirá con el $\mathbf{D_2}$, y por las mismas razones coincidirán el $\mathbf{D'_3}$ con el $\mathbf{D_3}$, y el $\mathbf{D'_4}$ con el $\mathbf{D_4}$. La conclusión es que en este movimiento los dos haces coincidirán, y en consecuencia si el primero es armónico también lo será el segundo.

Como caso particular de la proposición anterior tendremos que: **Si las rectas $\mathbf{D_1}$, $\mathbf{D_2}$, $\mathbf{D_3}$, $\mathbf{D_4}$ son respectivamente perpendiculares, a las $\mathbf{D'_1}$, $\mathbf{D'_2}$, $\mathbf{D'_3}$, $\mathbf{D'_4}$, si la cuaterna $(\mathbf{O.\ D_1D_2D_3D_4})$ es armónica también lo será la $(\mathbf{O'.\ D'_1D'_2D'_3D'_4})$.**

PROPOSICION 2. Si cuatro puntos alineados A, B, C, D, de la figura F, forman una cuaterna armónica, las cuatro rectas correspondientes, de la figura F′, forman también una cuaterna armónica.

En efecto: Dada la cuaterna armónica (**ABCD**), las polares de los puntos **A, B, C, D,** pasarán por un mismo punto, **I**, y serán respectivamente perpendiculares a las rectas $\overline{\mathbf{OA}}$, $\overline{\mathbf{OB}}$, $\overline{\mathbf{OC}}$, $\overline{\mathbf{OD}}$, siendo **O** el centro de la circunferencia de referencia.
Como la cuaterna de rectas (**O**.**ABCD**) es armónica, y en virtud de la propiedad particular establecida más arriba, resultará que las cuatro rectas polares, del haz de vértice **I**, constituirán también una cuaterna armónica.

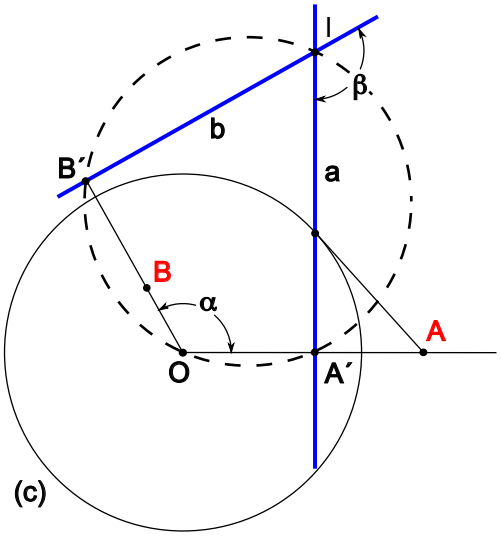
Un razonamiento análogo al anterior nos establecería que: **A toda cuaterna armónica, de rectas de un haz, de una figura F, corresponderá una cuaterna armónica, de puntos de la figura F′.**

PROPOSICION 3. Las rectas que unen dos puntos cualesquiera, A y B, de una de las figuras, F, con el centro, O, de la circunferencia de referencia, (c), forman el mismo ángulo que las rectas correspondientes, a y b, de la otra figura, F′.

En efecto: Supongamos que las rectas **a** y **b** se cortan en el punto **I**. Dado que estas rectas son, respectivamente, las polares de los puntos **A** y **B**, resultará que cortarán según ángulos rectos a las rectas $\overline{\mathbf{OA}}$ y $\overline{\mathbf{OB}}$ en los puntos $\mathbf{A}'$ y $\mathbf{B}'$. En consecuencia, el cuadrilátero $\mathbf{OA'IB'}$ es inscribible, es decir los cuatro puntos **O**, $\mathbf{A}'$, **I**, $\mathbf{B}'$ son concíclicos, de donde resultará

$$\alpha = \beta$$

siendo α el ángulo formado por los rayos $\overline{\mathbf{OA'}}$ y $\overline{\mathbf{OB'}}$, y β el formado por los $\overline{\mathbf{IA'}}$ y $\overline{\mathbf{IB'}}$.
Si en particular, las rectas $\overline{\mathbf{OA}}$ y $\overline{\mathbf{OB}}$ fuesen perpendiculares, también lo serían las **a** y **b**.



Ejemplo 3. En la Lección 27, del Tomo II, estableceremos el que llamaremos Teorema de Pappus, que admitiremos aquí como cierto, y que dice así:

Dados dos ternas de puntos en sendas líneas rectas, A, B, C, y $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'$ si α es el punto de intersección de las rectas $\overline{\mathbf{BC'}}$ y $\overline{\mathbf{CB'}}$, β el de intersección de las $\overline{\mathbf{CA'}}$ y $\overline{\mathbf{AC'}}$, y por último γ el de intersección de las $\overline{\mathbf{AB'}}$ y $\overline{\mathbf{BA'}}$, resultará que los puntos α, β, γ estarán alineados.

Vamos a transformar esta proposición por polares recíprocas, siendo la circunferencia de referencia arbitraria.
En cualquier caso, a los tres puntos alineados **A, B, C,** corresponderán tres rectas concurrentes $\overline{\mathbf{Ia}}$, $\overline{\mathbf{Ib}}$, $\overline{\mathbf{Ic}}$, de la misma manera que a los otros tres puntos alineados $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'$, corresponderán tres rectas concurrentes $\overline{\mathbf{I'a'}}$, $\overline{\mathbf{I'b'}}$, $\overline{\mathbf{I'c'}}$.
A la recta $\overline{\mathbf{BC'}}$ le corresponderá el punto α_1 (intersección de las rectas $\overline{\mathbf{Ib}}$, $\overline{\mathbf{I'c'}}$), y a la recta $\overline{\mathbf{CB'}}$ le corresponderá el

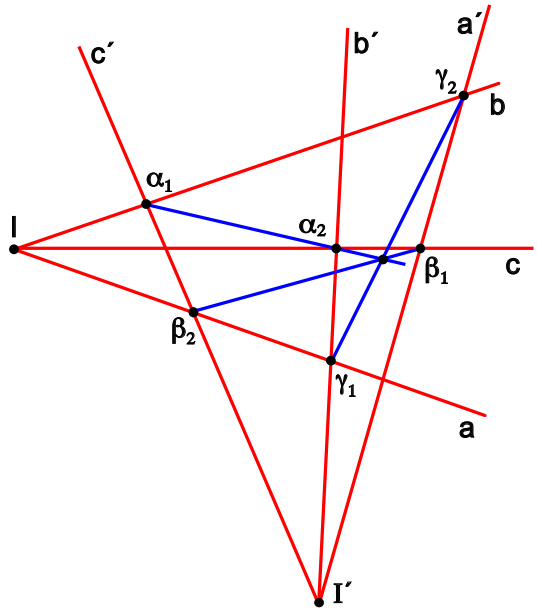
punto $\boldsymbol{\alpha_2}$ (intersección de las rectas $\overline{\mathbf{Ic}}$, $\overline{\mathbf{I'b'}}$.). Por tanto, al punto $\boldsymbol{\alpha}$ (intersección de las rectas $\overline{\mathbf{BC'}}$, $\overline{\mathbf{CB'}}$) le corresponderá la recta $\overline{\boldsymbol{\alpha_1\alpha_2}}$.

Así mismo, al punto $\boldsymbol{\beta}$ (intersección de las rectas $\overline{\mathbf{CA'}}$, $\overline{\mathbf{AC'}}$) le corresponderá la recta $\overline{\boldsymbol{\beta_1\beta_2}}$, siendo $\boldsymbol{\beta_1}$ el punto de intersección de las rectas $\overline{\mathbf{Ic}}$, $\overline{\mathbf{I'a'}}$ y $\boldsymbol{\beta_2}$ el de intersección de las $\overline{\mathbf{Ia}}$, $\overline{\mathbf{I'c'}}$; al punto $\boldsymbol{\gamma}$ (intersección de las rectas $\overline{\mathbf{AB'}}$, $\overline{\mathbf{BA'}}$) la corresponderá la recta $\overline{\boldsymbol{\gamma_1\gamma_2}}$, siendo $\boldsymbol{\gamma_1}$ el punto de intersección de las rectas $\overline{\mathbf{Ia}}$, $\overline{\mathbf{I'b'}}$ y $\boldsymbol{\gamma_2}$ el de intersección de las $\overline{\mathbf{Ib}}$, $\overline{\mathbf{I'a'}}$

Dado que los puntos $\boldsymbol{\alpha, \beta, \gamma}$ están alineados, las rectas $\overline{\boldsymbol{\alpha_1\alpha_2}}$, $\overline{\boldsymbol{\beta_1\beta_2}}$, $\overline{\boldsymbol{\gamma_1\gamma_2}}$ serán concurrentes.

En consecuencia, podemos enunciar la **proposición correlativa** de la dada como sigue:

Dadas dos ternas de rectas concurrentes $\overline{\mathbf{Ia}}$, $\overline{\mathbf{Ib}}$, $\overline{\mathbf{Ic}}$, e $\overline{\mathbf{I'a'}}$, $\overline{\mathbf{I'b'}}$, $\overline{\mathbf{I'c'}}$, si consideramos los puntos $\boldsymbol{\alpha_1}$ (intersección de las rectas $\overline{\mathbf{Ib}}$, $\overline{\mathbf{I'c'}}$), $\boldsymbol{\alpha_2}$ (intersección de las rectas $\overline{\mathbf{Ic}}$, $\overline{\mathbf{I'b'}}$), $\boldsymbol{\beta_1}$ (intersección de las rectas $\overline{\mathbf{Ic}}$, $\overline{\mathbf{I'a'}}$) $\boldsymbol{\beta_2}$ (intersección de las rectas $\overline{\mathbf{Ia}}$, $\overline{\mathbf{I'c'}}$), $\boldsymbol{\gamma_1}$ (intersección de las rectas $\overline{\mathbf{Ia}}$, $\overline{\mathbf{I'b'}}$), $\boldsymbol{\gamma_2}$ (intersección de las rectas $\overline{\mathbf{Ib}}$, $\overline{\mathbf{I'a'}}$), las rectas $\overline{\boldsymbol{\alpha_1\alpha_2}}$, $\overline{\boldsymbol{\beta_1\beta_2}}$, $\overline{\boldsymbol{\gamma_1\gamma_2}}$ serán concurrentes.



Ejemplo 4. En la Lección 16 establecimos el Teorema de Desargues de los triángulos homológicos. Veamos, aquí, como podemos aplicando la polaridad recíproca establecer el recíproco del enunciado directo siguiente:

Dados dos triángulos $\overset{\triangle}{\mathbf{ABC}}$, $\overset{\triangle}{\mathbf{A'B'C'}}$, si las rectas $\overline{\mathbf{AA'}}$, $\overline{\mathbf{BB'}}$, $\overline{\mathbf{CC'}}$ son concurrentes, entonces los puntos de intersección de las rectas $\overline{\mathbf{BC}}$ y $\overline{\mathbf{B'C'}}$, $\overline{\mathbf{CA}}$ y $\overline{\mathbf{C'A'}}$, $\overline{\mathbf{AB}}$ y $\overline{\mathbf{A'B'}}$ están alineados.

Por polares recíprocas, a los puntos **A, B, C** corresponderán tres rectas, que formarán un nuevo rectángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{A_1B_1C_1}}$, correspondiendo los lados $\overline{\mathbf{B_1C_1}}$, $\overline{\mathbf{C_1A_1}}$, $\overline{\mathbf{A_1B_1}}$ respectivamente, a los puntos **A, B, C.**

En forma análoga, al triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{A'B'C'}}$ corresponderá el triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{A'_1B'_1C'_1}}$.

A las rectas $\overline{\mathbf{AA'}}$, $\overline{\mathbf{BB'}}$, $\overline{\mathbf{CC'}}$, corresponderán respectivamente, los puntos de intersección de las rectas $\overline{\mathbf{B_1C_1}}$ y $\overline{\mathbf{B'_1C'_1}}$, $\overline{\mathbf{C_1A_1}}$ y $\overline{\mathbf{C'_1A'_1}}$, $\overline{\mathbf{A_1B_1}}$ y $\overline{\mathbf{A'_1B'_1}}$.

Como las rectas $\overline{\mathbf{AA'}}$, $\overline{\mathbf{BB'}}$, $\overline{\mathbf{CC'}}$ son, por hipótesis, concurrentes, los tres puntos de intersección anteriores estarán alineados.

Así, a los lados $\overline{\mathbf{BC}}$, $\overline{\mathbf{B'C'}}$, corresponden los puntos $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A'_1}$, luego, al punto de intersección de las rectas $\overline{\mathbf{BC}}$, $\overline{\mathbf{B'C'}}$, corresponde la recta $\overline{\mathbf{A_1A'_1}}$. Por la misma razón, a los puntos de intersección de las rectas $\overline{\mathbf{CA}}$, $\overline{\mathbf{C'A'}}$, y $\overline{\mathbf{AB}}$, $\overline{\mathbf{A'B'}}$ corresponden las rectas $\overline{\mathbf{B_1B'_1}}$, $\overline{\mathbf{C_1C'_1}}$.

Al estar los tres puntos, intersecciones de de las rectas $\overline{\mathbf{BC}}$ y $\overline{\mathbf{B'C'}}$, $\overline{\mathbf{CA}}$ y $\overline{\mathbf{C'A'}}$, $\overline{\mathbf{AB}}$ y $\overline{\mathbf{A'B'}}$, alineados, las correspondientes rectas $\overline{\mathbf{A_1A'_1}}$, $\overline{\mathbf{B_1B'_1}}$, $\overline{\mathbf{C_1C'_1}}$ serán concurrentes, lo que nos permite enunciar la **proposición correlativa** de la dada, como sigue:

Dados dos triángulos $\overset{\triangle}{\mathbf{A_1B_1C_1}}$, $\overset{\triangle}{\mathbf{A'_1B'_1C'_1}}$, si los puntos de intersección de las rectas $\overline{\mathbf{B_1C_1}}$ y $\overline{\mathbf{B'_1C'_1}}$, $\overline{\mathbf{C_1A_1}}$ y $\overline{\mathbf{C'_1A'_1}}$, $\overline{\mathbf{A_1B_1}}$ y $\overline{\mathbf{A'_1B'_1}}$ están alineados, entonces las rectas $\overline{\mathbf{A_1A'_1}}$, $\overline{\mathbf{B_1B'_1}}$, $\overline{\mathbf{C_1C'_1}}$ son concurrentes.

En general en las aplicaciones, como hemos visto en los ejemplos anteriores, la circunferencia de referencia puede en general ser arbitraria; sin embargo, en determinados casos puede ser conveniente su mejor elección, a efectos de que la proposición correlativa admita un enunciado sencillo. Veámoslo en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 5. En el ejemplo 5, del apartado 26.3, de la lección 26, del Tomo II, estableceremos el siguiente resultado, que admitiremos aquí como cierto y que dice así:

En un triángulo, las rectas que unen los vértices con los puntos de los lados opuestos en contacto con la circunferencia inscrita se cortan en un punto.

Admitiendo, por tanto, la proposición como cierta, vamos a proceder a determinar su proposición correlativa transformando la dada por polares recíprocas.

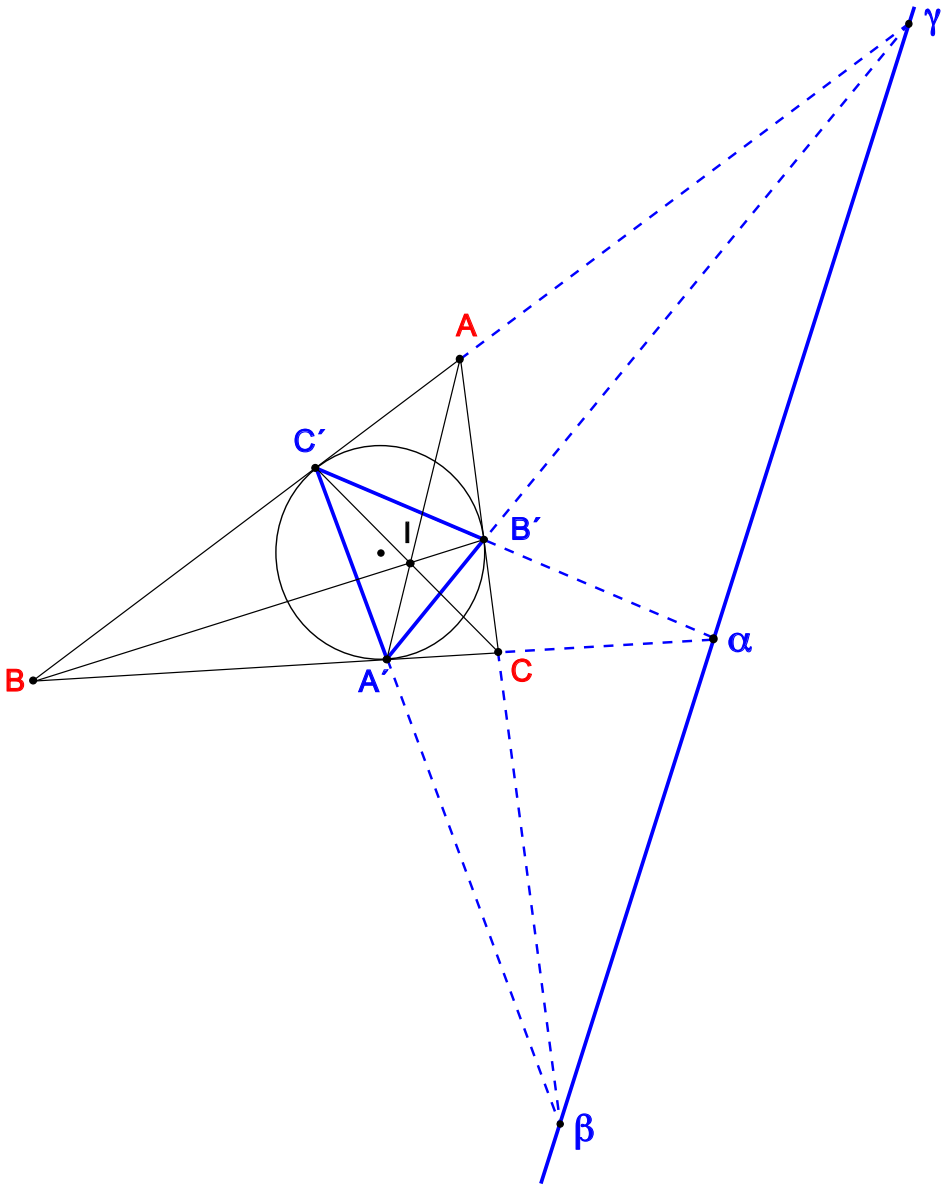
Dado el triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{ABC}}$, designemos por $\mathbf{A'}$, $\mathbf{B'}$, $\mathbf{C'}$, los puntos de contacto de los lados $\overline{\mathbf{BC}}$, $\overline{\mathbf{CA}}$, $\overline{\mathbf{AB}}$ con la circunferencia $(\mathbf{c})$, inscrita en el triángulo; es decir las rectas $\overline{\mathbf{AA'}}$, $\overline{\mathbf{BB'}}$, $\overline{\mathbf{CC'}}$ pasan por un mismo punto $\mathbf{I}$.

Tomemos como circunferencia de referencia la $(\mathbf{c})$.
Aplicando polares recíprocas resultará que, al punto $\mathbf{A}$ le corresponderá su polar $\overline{\mathbf{B'C'}}$, y al punto $\mathbf{A'}$ su polar $\overline{\mathbf{BC}}$; por tanto, a la recta $\overline{\mathbf{AA'}}$ le corresponderá el punto $\boldsymbol{\alpha}$, (intersección de las rectas $\overline{\mathbf{B'C'}}$ y $\overline{\mathbf{BC}}$).
Asimismo, a las rectas $\overline{\mathbf{BB'}}$, $\overline{\mathbf{CC'}}$, les corresponderán, respectivamente, los puntos $\boldsymbol{\beta}$, (intersección de las rectas $\overline{\mathbf{C'A'}}$ y $\overline{\mathbf{CA}}$), y $\boldsymbol{\gamma}$ (intersección de las rectas $\overline{\mathbf{A'B'}}$ y $\overline{\mathbf{AB}}$).

Dado que las rectas $\overline{\mathbf{AA'}}$, $\overline{\mathbf{BB'}}$, $\overline{\mathbf{CC'}}$, pasan por el mismo punto, $\mathbf{I}$, los puntos $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ estarán sobre una misma recta, precisamente la polar de $\mathbf{I}$.

En consecuencia, podemos enunciar la proposición correlativa de la dada como sigue:

Si un triángulo está inscrito en una circunferencia, las tangentes en los vértices cortarán a los lados opuestos en tres puntos alineados.

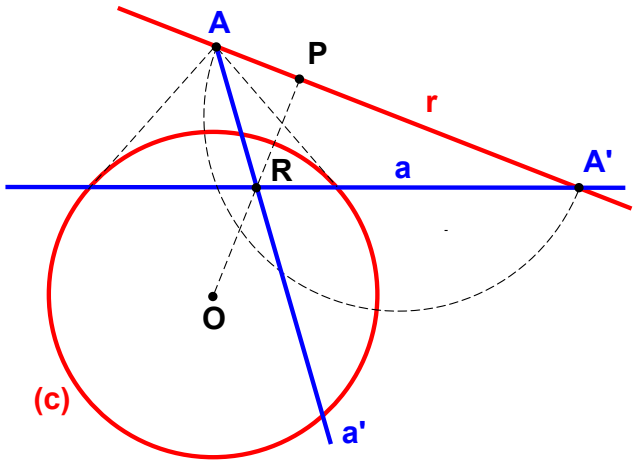


21.4 Involución de puntos conjugados en una recta

Establezcamos ahora la propiedad siguiente:

PROPOSICION 1. Los pares de puntos conjugados respecto de una circunferencia, situados en una recta de su plano, no tangente a la misma, forman una involución, que será común a todas las circunferencias del haz definido por la circunferencia y la recta dada. Además, el centro de la misma será el pie de la perpendicular bajada desde el centro de la circunferencia a la recta dada.

En efecto: Sea $(\mathbf{c})$ una circunferencia y **r** una recta, no tangente a ella, de su plano. Hagamos corresponder a todo punto **A** de **r** su conjugado $\mathbf{A}'$, intersección de la polar **a** del punto **A** con la recta **r**.



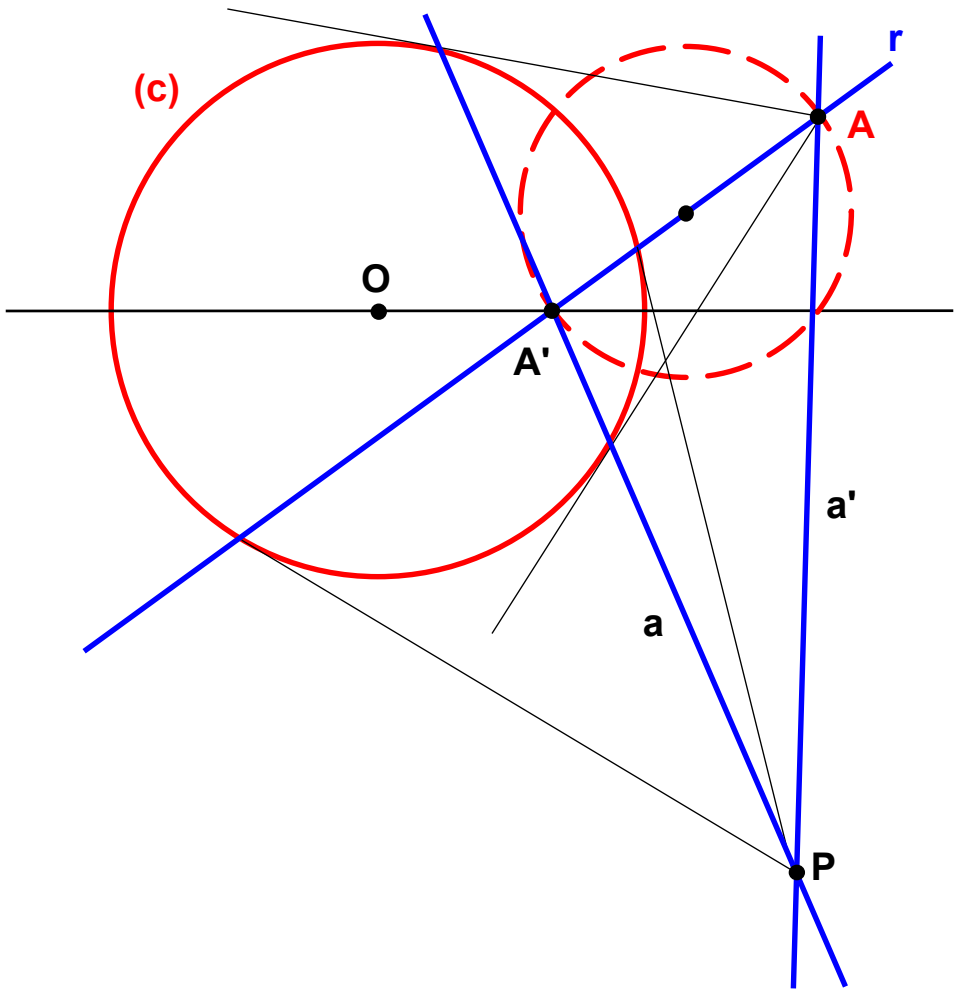
La circunferencia de diámetro $\overline{\mathbf{AA}'}$ pertenece al haz ortogonal del haz definido por el eje **r** y la circunferencia $(\mathbf{c})$. En consecuencia, los puntos **A** y $\mathbf{A}'$, intersecciones de **r** con las circunferencias de este haz, se corresponden en una involución cuyo centro, **P**, es la intersección de **r** con la perpendicular por **O**.

Los puntos dobles de la involución establecida en esta proposición, supuesto que existen, serán los de intersección de la recta **r** con la circunferencia $(\mathbf{c})$, ya que por ellos pasan sus polares respectivas.
Evidentemente, si la recta **r** fuera tangente a la circunferencia $(\mathbf{c})$, no existiría una tal involución, puesto que todo punto de **r** tendría por conjugado el de contacto con $(\mathbf{c})$.
Como consecuencia de lo que hemos establecido podemos afirmar que: **Sobre el eje radical de dos circunferencias no tangentes, existe una involución de puntos conjugados común a ambas.**

Se verificará, así mismo, la propiedad siguiente, recíproca de la anterior: **Si una recta r es base de una involución de puntos conjugados común a dos circunferencias $(\mathbf{c})$ y $(\mathbf{c}')$ no tangentes, esta recta es el eje radical de ambas.**

En efecto: Dadas las dos circunferencias no tangentes $(\mathbf{c})$ y $(\mathbf{c}')$, toda circunferencia que tenga por diámetro el segmento definido por dos puntos conjugados, $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}'$, será ortogonal tanto a $(\mathbf{c})$ como a $(\mathbf{c}')$, y por tanto pertenecerá al haz ortogonal que definen $(\mathbf{c})$ y $(\mathbf{c}')$. En consecuencia, la recta $\mathbf{r}$ será el eje radical de $(\mathbf{c})$ y $(\mathbf{c}')$.

Al proyectar dos puntos conjugados, $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}'$, no alineados con el centro, $\mathbf{O}$, de una circunferencia, $(\mathbf{c})$, desde el polo $\mathbf{P}$ de la recta $\mathbf{r}$ que los contiene, se obtienen las polares $\mathbf{a}$ y $\mathbf{a}'$, cada una de las cuales pasa por el polo de la otra; llamaremos a éstas **rectas conjugadas** respecto de la circunferencia.
Por otra parte, los puntos $\mathbf{P}$, $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}'$ determinan un triángulo en el que cada una de las rectas $\mathbf{r}$, $\mathbf{a}$ y $\mathbf{a}'$, que contienen los lados del mismo, es la polar del vértice opuesto. De dicho triángulo diremos que es un **triángulo autopolar**, y también que es **conjugado** respecto de la circunferencia.

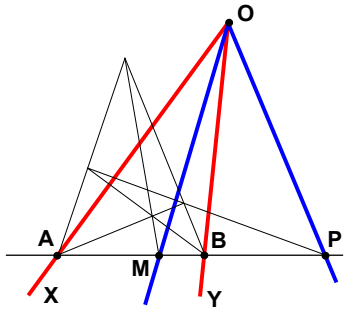


21.5 Polar de un punto respecto de un ángulo

PROPOSICION 1. Consideremos un ángulo $\widehat{XOY}$ y un punto P. Tracemos por ese punto una secante que corta a los lados $\overline{OX}$ y $\overline{OY}$, del ángulo, en los puntos A y B. Sea ahora el punto M el conjugado armónico de P respecto de los puntos A y B.

Si hacemos ahora que la secante $\overline{PAB}$ varíe, pasando siempre por el punto P, resultará que el lugar geométrico del punto M es una recta, de la que diremos es la polar del punto P respecto del ángulo $\widehat{XOY}$.

En efecto: Dado que las rectas $\overline{OM}$ y $\overline{OP}$ son conjugadas armónicas respecto de las rectas $\overline{OX}$ y $\overline{OY}$, resultará que como la recta $\overline{OP}$ permanece fija, lo mismo le ocurrirá a la recta $\overline{OM}$, siendo esta recta el lugar geométrico buscado.

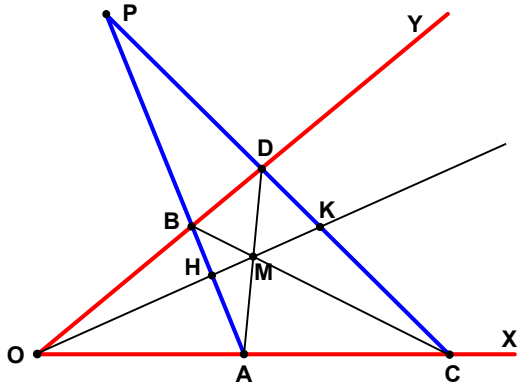


PROPOSICION 2. Consideremos un punto P y un ángulo $\widehat{XOY}$, y por dicho punto P trazamos dos secantes $\overline{PAB}$ y $\overline{PCD}$, que cortan a la recta $\overline{OX}$ en los puntos A y C, y a la recta $\overline{OY}$ en los puntos B y D. Se verifica, entonces, que las rectas $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ se cortan en un punto M situado sobre la polar P respecto del ángulo $\widehat{XOY}$.

En efecto: Sean **H** y **K** los conjugados armónicos de **P** respecto a los pares de puntos **A, B** y **C, D**, respectivamente.

Los puntos **H** y **K** pertenecen a la polar **P** respecto del ángulo $\widehat{XOY}$, pero también están situados sobre la polar del punto **P** respecto del ángulo $\widehat{AMB}$.

Así resulta que, la recta $\overline{HK}$ pasa por los puntos **O** y **M**, lo que significa que la polar del punto **P** respecto del ángulo $\widehat{XOY}$ pasa por el punto **M**.



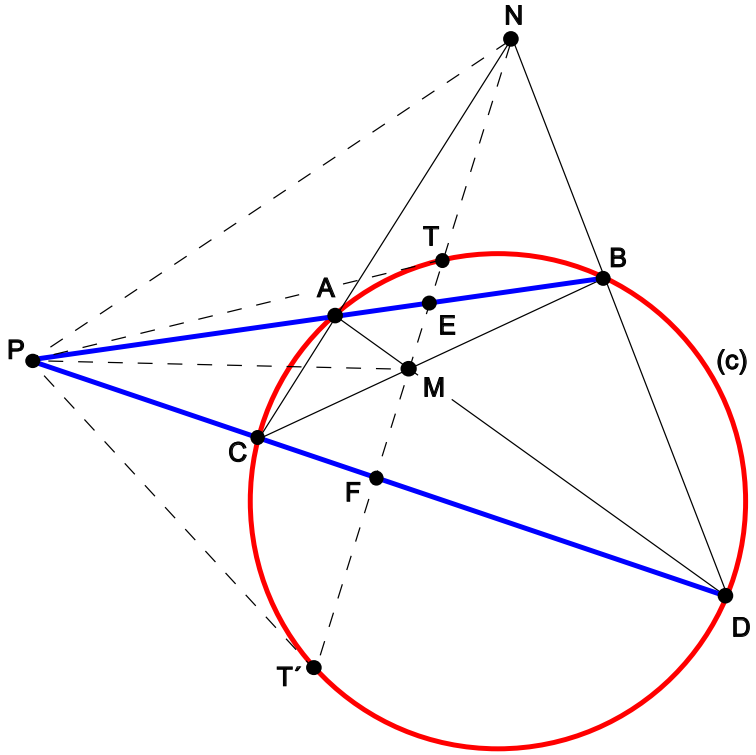
PROPOSICION 3. Consideremos una circunferencia, (c), y un punto P exterior a la misma; por ese punto trazamos las dos secantes $\overline{PAB}$ y $\overline{PCD}$, cortándose las rectas $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ en el punto M, y las rectas $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ en el punto N. Resulta entonces que la recta $\overline{MN}$ es la polar del punto P respecto de la circunferencia dada.

En efecto: Según la anterior proposición 2, la recta $\overline{MN}$ es la polar del punto **P** respecto a cada uno de los ángulos $\widehat{AMB}$ y $\widehat{ANB}$, luego corta a las rectas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, respectivamente, en los puntos **E** y **F**, que son conjugados armónicos de **P** respectivamente, respecto de las parejas de puntos **A, B** y **C, D**.

Por tanto, los puntos **E, F** pertenecen a la polar de **P** respecto de la circunferencia dada. En consecuencia, la recta $\overline{MN}$ es la polar del punto **P** respecto de la circunferencia.

Siendo el punto **P** exterior a la circunferencia, la recta $\overline{MN}$ corta a ésta en los puntos de contacto **T** y **T′** de las tangentes trazadas desde el punto **P** a la circunferencia. Resulta así un trazado muy sencillo para esas tangentes.

Podemos ver, asimismo, que la polar del punto **M** es la recta $\overline{NP}$, y que la de **N** es la recta $\overline{MP}$. Luego el triángulo $\overset{\triangle}{MNP}$ es conjugado respecto de la circunferencia, es decir, es un triángulo autopolar.



Lección 22.- LA INVERSIÓN EN EL PLANO (II)

22.1 Aplicaciones de la inversión

22.2 Propiedades de las tangentes a las curvas inversas

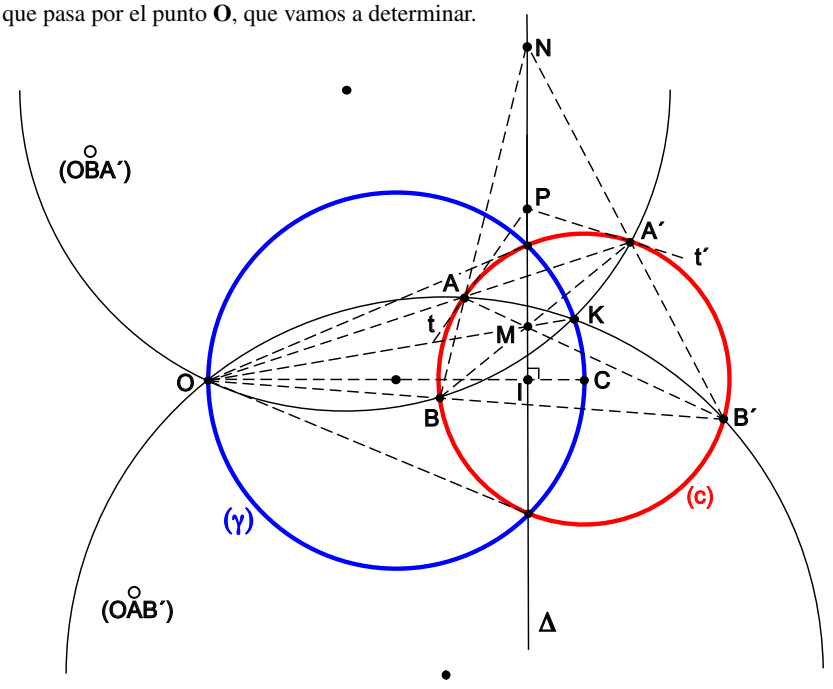
22.1 Aplicaciones de la inversión

PROPOSICIÓN 1. Consideremos una circunferencia, (c), de centro C, y un punto O no situado sobre (c); por ese punto se trazan dos secantes $\overline{OAA'}$ y $\overline{OBB'}$, y se consideran las dos circunferencias $\overset{\bigcirc}{OAB'}$ y $\overset{\bigcirc}{OBA'}$, que se cortan en el punto O y en un segundo punto K. Se verifica, entonces, que el punto K está situado sobre la circunferencia (γ) que tiene por diámetro $\overline{OC}$.

En efecto: Consideremos la proposición 3, del apartado 21.5, de la lección anterior, y transformemos esa propiedad por inversión, tomando como polo el **O**, y como módulo la potencia de **O** respecto de la circunferencia $(\mathbf{c})$. Se transformará ésta en ella misma, y los puntos **A** y **A'** resultarán puntos inversos, lo mismo que los puntos **B** y **B'** .

La recta $\overline{\mathbf{AB'}}$ tiene por inversa la circunferencia que pasa por el punto **O**, y por los inversos de los puntos **A** y **B'**, es decir por los **A'** y **B**. La recta $\overline{\mathbf{AB'}}$ tiene por inversa la circunferencia $\overset{\bigcirc}{\mathbf{OA'B}}$. Así mismo, la recta $\overline{\mathbf{A'B}}$ tiene por inversa la circunferencia $\overset{\bigcirc}{\mathbf{OAB'}}$; y el punto **M**, intersección de las rectas $\overline{\mathbf{AB'}}$ y $\overline{\mathbf{A'B}}$, tiene por inverso el segundo punto de intersección **K**, de las circunferencias $\overset{\bigcirc}{\mathbf{OA'B}}$ y $\overset{\bigcirc}{\mathbf{OAB'}}$.

Como el punto **M** describe una recta, **Δ**, que no pasa por el polo, el punto **K** describe una circunferencia $(\boldsymbol{\gamma})$, que pasa por el punto **O**, que vamos a determinar.



Si **C** es el centro de la circunferencia dada $(\mathbf{c})$, la polar $\boldsymbol{\Delta}$ del punto **O** es perpendicular a $\overline{\mathbf{OC}}$ en el punto **I**, que está definido por la relación.

$$\overline{\mathbf{CO}} \cdot \overline{\mathbf{CI}} = \mathbf{R^2}$$

siendo **R** el radio de $(\mathbf{c})$.
Se deduce entonces que

$$\overline{\mathbf{CO}} \cdot (\overline{\mathbf{CO}} - \overline{\mathbf{OI}}) = \mathbf{R^2}$$

o bien

$$\overline{\mathbf{CO}}^{\mathbf{2}} - \overline{\mathbf{OI}} \cdot \overline{\mathbf{OC}} = \mathbf{R^2}$$

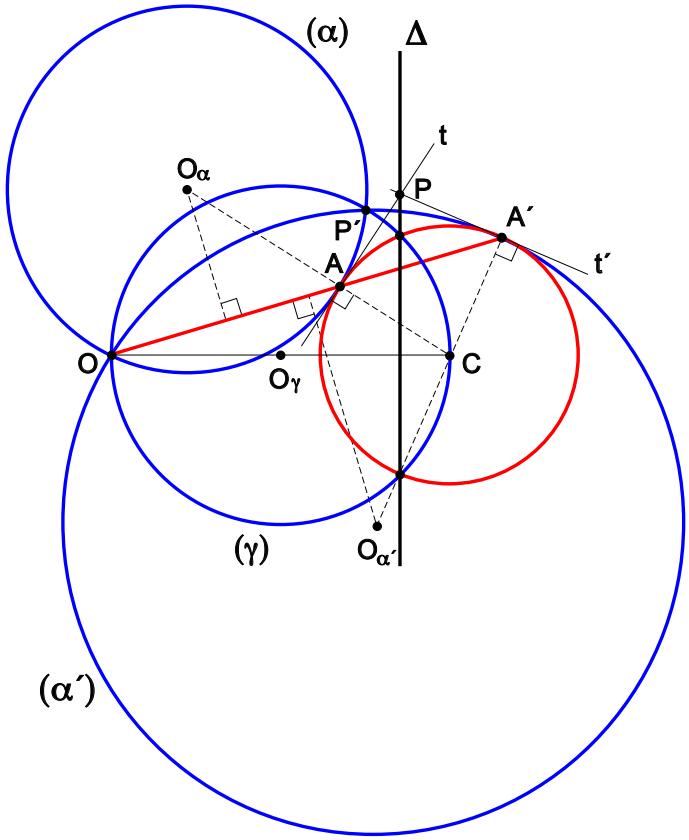
es decir

$$\overline{\mathbf{OI}} \cdot \overline{\mathbf{OC}} = \overline{\mathbf{CO}}^{\mathbf{2}} - \mathbf{R^2}$$

Dado que $\overline{\mathbf{CO}}^{\mathbf{2}} - \mathbf{R^2}$ es la potencia del punto **O** respecto de la circunferencia $(\mathbf{c})$, resulta que es el módulo de la inversión, mostrándonos esa igualdad que los puntos **I** y **C** son puntos inversos. En consecuencia, la circunferencia $(\boldsymbol{\gamma})$, inversa de la recta $\boldsymbol{\Delta}$, tiene por diámetro $\overline{\mathbf{OC}}$, como queríamos establecer.
Observemos, por otra parte, que las rectas $\overline{\mathbf{AB}}$ y $\overline{\mathbf{A'B'}}$ se cortan en un punto **N**, situado igualmente sobre la recta $\boldsymbol{\Delta}$.
Transformando con la misma inversión, obtendríamos que las circunferencias $\overset{\bigcirc}{\mathbf{OAB'}}$ y $\overset{\bigcirc}{\mathbf{OBA'}}$ se cortan en el punto **K**, situado sobre la circunferencia $(\boldsymbol{\gamma})$.

PROPOSICION 2. Dada una circunferencia $(\mathbf{c})$, de centro C, y un punto O, no situado sobre ella, si trazamos por este punto una secante $\overline{\mathbf{OAA'}}$, las dos circunferencias que pasan por O y son tangentes a la $(\mathbf{c})$, en los dos puntos A y A′, se cortarán en un segundo punto, P, situado sobre la circunferencia, $(\boldsymbol{\gamma})$, de diámetro $\overline{\mathbf{OC}}$.

En efecto: Volvamos a la figura que aparece al principio de este apartado, en la que vemos que las tangentes $\mathbf{t}$, $\mathbf{t'}$ en los puntos **A** y $\mathbf{A'}$ a la circunferencia de centro **C**, se cortan en un punto **P**, situado sobre la recta $\boldsymbol{\Delta}$.
Transformemos esta propiedad por la misma inversión que utilizamos en la anterior proposición, es decir: Tomamos como **polo** el punto **O**, y como **potencia de inversión** la potencia del punto **O** respecto de la circunferencia $(\mathbf{c})$.
Así, a la recta $\mathbf{t}$ corresponde una circunferencia $(\boldsymbol{\alpha'})$ que pasa por el punto **O** y por el punto $\mathbf{A'}$, y puesto que a curvas tangentes corresponden curvas tangentes, la circunferencia $(\boldsymbol{\alpha'})$ sera tangente en $\mathbf{A'}$ a la circunferencia $(\mathbf{c})$.
Así mismo, a la tangente $\mathbf{t'}$ corresponde la circunferencia $(\boldsymbol{\alpha})$, que pasará por el punto **O**, y será tangente en el punto **A** a la circunferencia $(\mathbf{c})$.
En definitiva, las circunferencias $(\boldsymbol{\alpha})$ y $(\boldsymbol{\alpha'})$ se cortarán en el punto $\mathbf{P'}$, inverso de **P**, y situado sobre la circunferencia $(\boldsymbol{\gamma})$, de diámetro $\overline{\mathbf{OC}}$.



PROPOSICION 3. Dada una circunferencia (Δ') y tres cuerdas $\overline{OA'}$, $\overline{OB'}$ y $\overline{OC'}$, con un extremo común, el punto O, consideremos las tres circunferencias que tienen por diámetros, respectivamente, $\overline{OA'}$, $\overline{OB'}$ y $\overline{OC'}$ Se verifica, entonces, que los puntos de intersección, distintos de O, de las circunferencias, tomadas de dos en dos, están alineados.

En efecto: Consideramos tres puntos, **A**, **B**, **C**, sobre una misma recta $\boldsymbol{\Delta}$ y un punto **O** exterior a esta recta. Por el punto **A** trazamos la recta $\boldsymbol{\alpha}$, perpendicular a $\overline{\mathbf{OA}}$, por el punto **B** la recta $\boldsymbol{\beta}$, perpendicular a $\overline{\mathbf{OB}}$, y por el punto **C** la recta $\boldsymbol{\gamma}$, perpendicular a $\overline{\mathbf{OC}}$; consideremos, entonces, el triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{DEF}}$ formado por las rectas $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$.

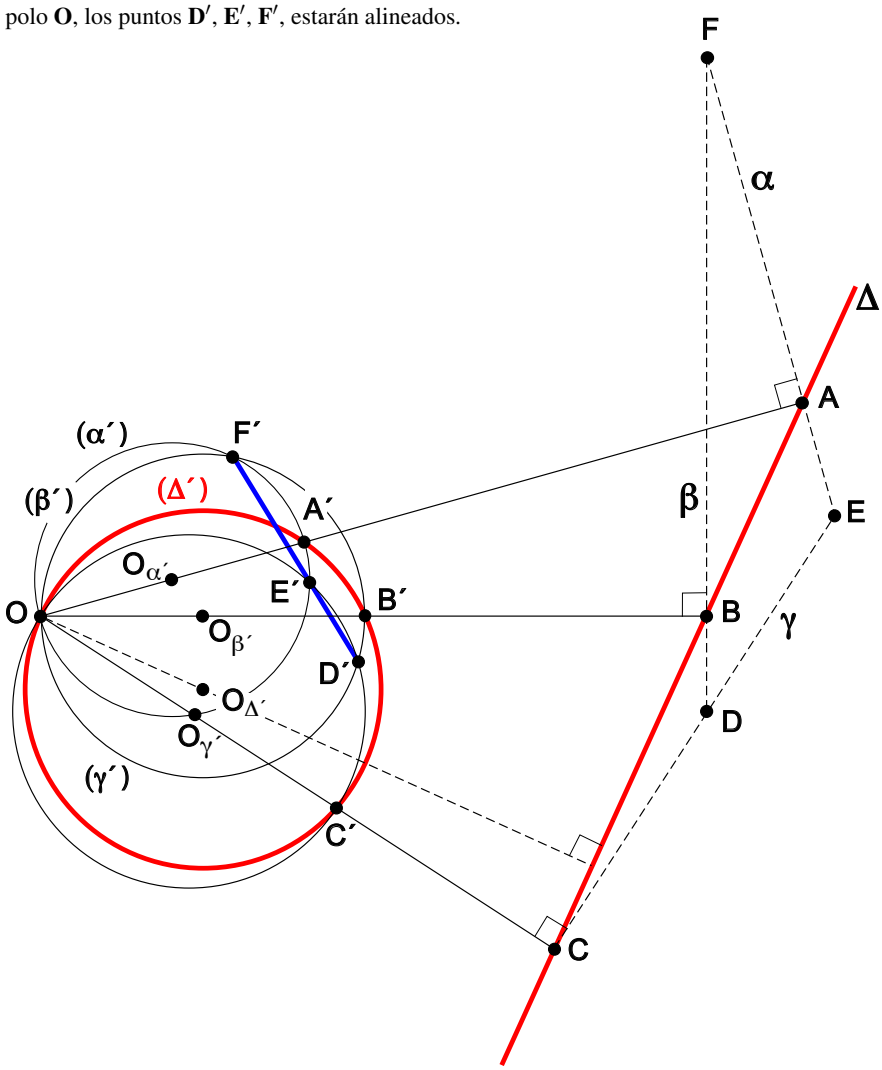
Dado que las proyecciones **A**, **B**, **C** del punto **O** sobre los lados del triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{DEF}}$ están en línea recta, sabemos que el punto **O** está situado sobre la circunferencia circunscrita del triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{DEF}}$.

Vamos a transformar esta propiedad, por inversión, tomando como polo el punto **O**, siendo el módulo de la inversión arbitrario.

Como los puntos **A**, **B**, **C**, están alineados, sus inversos $\mathbf{A'}$, $\mathbf{B'}$, $\mathbf{C'}$ estarán sobre una circunferencia, $(\boldsymbol{\Delta}')$, que pasa por el punto **O**, y que es la inversa de la recta $\boldsymbol{\Delta}$.

La recta $\boldsymbol{\alpha}$ admitirá por inverso la circunferencia $(\boldsymbol{\alpha}')$ de diámetro $\overline{\mathbf{OA'}}$; en la misma forma, las rectas $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, admitirán como inversos las circunferencias $(\boldsymbol{\beta}')$, $(\boldsymbol{\gamma}')$, descritas, respectivamente, sobre $\overline{\mathbf{OB'}}$, $\overline{\mathbf{OC'}}$, como diámetros.

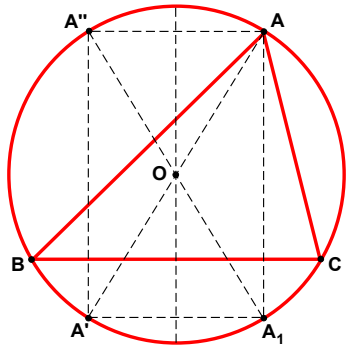
A los puntos **D**, **E**, **F** corresponderán los puntos de intersección $\mathbf{D}'$, $\mathbf{E}'$, $\mathbf{F}'$, de las circunferencias $(\boldsymbol{\alpha}')$, $(\boldsymbol{\beta}')$, $(\boldsymbol{\gamma}')$ tomadas de dos en dos, dado que los puntos **D**, **E**, **F**, están sobre una circunferencia que pasa por el polo **O**, los puntos $\mathbf{D}'$, $\mathbf{E}'$, $\mathbf{F}'$, estarán alineados.



PROPOSICION 4. Consideremos un triángulo, $\overset{\triangle}{ABC}$, inscrito en una circunferencia de centro O. Si designamos por A', B', C' los simétricos de A, B, C, respecto del punto O, y por A'', B'', C'', los simétricos de esos mismos puntos respecto de las perpendiculares trazadas por los puntos medios de los lados opuestos, se verifica que:

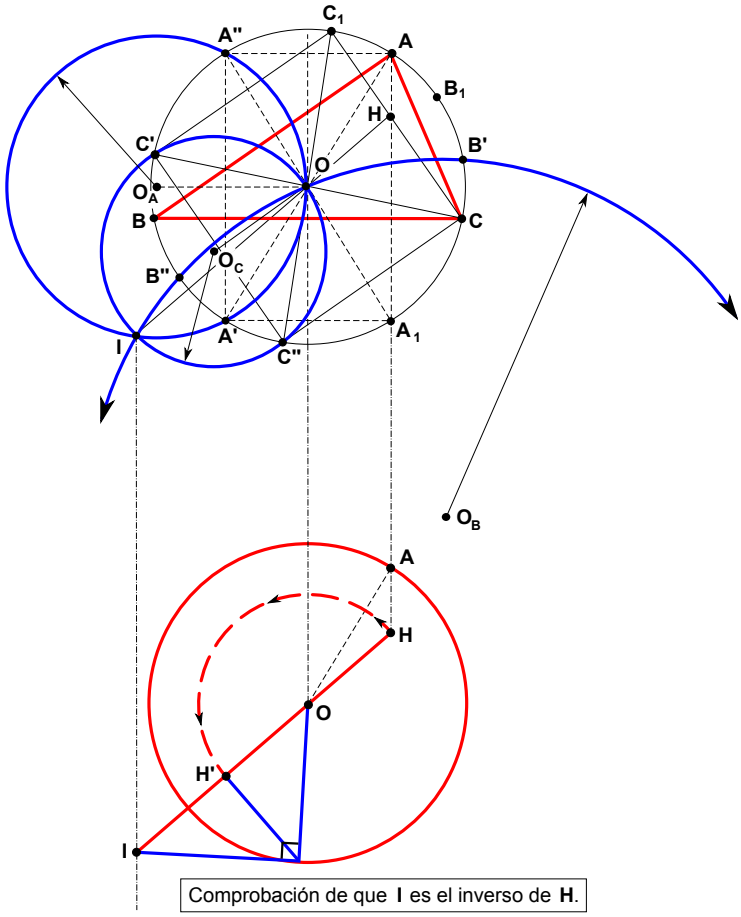
Las circunferencias $(\overset{\bigcirc}{OA'A''})$, $(\overset{\bigcirc}{OB'B''})$, $(\overset{\bigcirc}{OC'C''})$ tienen un segundo punto común, I.

En efecto: Es inmediato ver que los puntos $\mathbf{A}'$, $\mathbf{A}''$ están situados sobre la circunferencia, que la recta $\overline{\mathbf{A}'\mathbf{A}''}$ es perpendicular a $\overline{\mathbf{BC}}$, y que el punto $\mathbf{A_1}$, diametralmente opuesto a $\mathbf{A}''$, está situado sobre la altura trazada desde el punto **A**. Veámoslo en la figura siguiente:



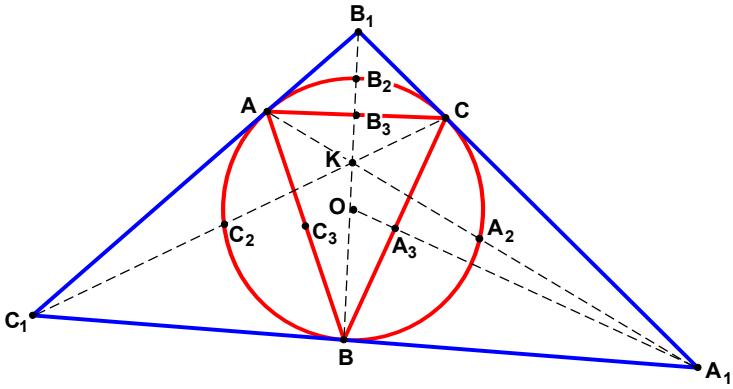
Si transformamos la figura anterior por inversión, tomando como polo el punto **O**, y por módulo $-\overline{\mathbf{OA}}^2$, los puntos $\mathbf{A}'$, $\mathbf{A}''$ tienen, respectivamente, por inversos los puntos **A**, $\mathbf{A_1}$, y además la figura inversa de la circunferencia $(\overset{\bigcirc}{\mathbf{OA}'\mathbf{A}''})$ que pasa por el polo es la altura $\overline{\mathbf{AA_1}}$. Igualmente, las circunferencias $(\overset{\bigcirc}{\mathbf{OB}'\mathbf{B}''})$, $(\overset{\bigcirc}{\mathbf{OC}'\mathbf{C}''})$ tendrán por inversas las otras dos alturas.

Como las tres alturas pasan por un mismo punto, **H**, el ortocentro, las circunferencias $(\overset{\bigcirc}{\mathbf{OA}'\mathbf{A}''})$, $(\overset{\bigcirc}{\mathbf{OB}'\mathbf{B}''})$, $(\overset{\bigcirc}{\mathbf{OC}'\mathbf{C}''})$, pasarán por un mismo punto **I**, inverso del punto **H**.



PROPOSICION 5. Consideremos un triángulo, $\overset{\triangle}{ABC}$, inscrito en una circunferencia de centro O. Las tangentes a esta circunferencia en los puntos A, B, C, formarán un nuevo triángulo $\overset{\triangle}{A_1B_1C_1}$, verificándose que A_1 es el polo de $\overline{BC}$, B_1 el de $\overline{AC}$ y C_1 el de $\overline{AB}$. Designemos por A_2, B_2, C_2, los puntos de intersección de la circunferencia con las rectas $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$, y también, respectivamente, por A_3, B_3, C_3 los puntos medios de los lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Se verificará, entonces, que las circunferencias $(\overset{\bigcirc}{AA_2A_3})$, $(\overset{\bigcirc}{BB_2B_3})$, $(\overset{\bigcirc}{CC_2C_3})$ tienen dos puntos comunes.

En efecto: En primer lugar dibujemos la figura descrita en el enunciado:



Si transformamos la figura anterior por inversión, tomando como polo el punto **O**, y por módulo $\overline{OA}^2$, se verificará lo siguiente:

1.- Los puntos **A**, $\mathbf{A_2}$ coindiden con sus inversos, y el punto $\mathbf{A_3}$ tiene por inverso el punto $\mathbf{A_1}$.

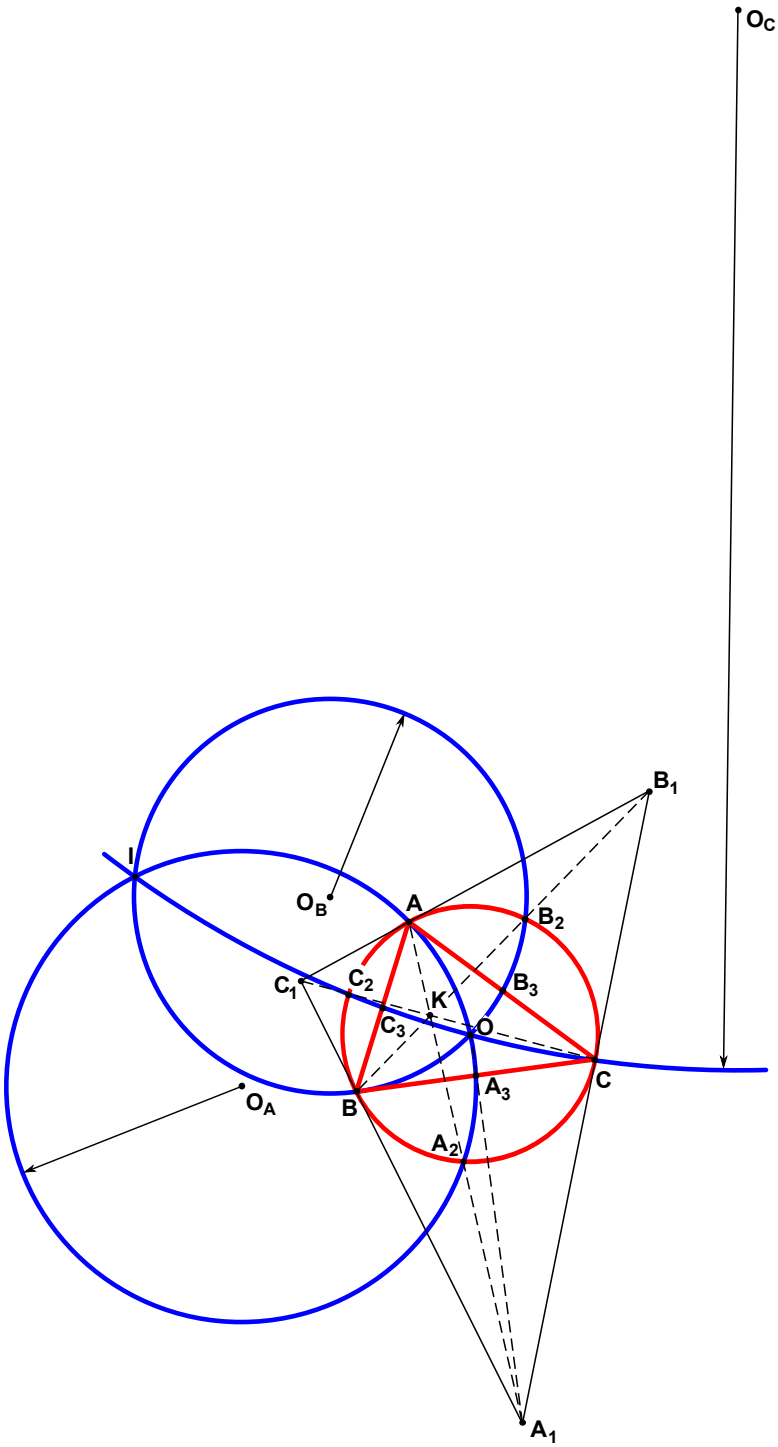
2.- La figura inversa de la circunferencia $(\overset{\bigcirc}{AA_2A_3})$ pasa por los puntos **A**, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_1}$, y dado que estos puntos están alineados, la figura inversa de la circunferencia $(\overset{\bigcirc}{AA_2A_3})$ es la recta $\overline{AA_1}$.

3.- En la misma forma se ve que las circunferencias $(\overset{\bigcirc}{BB_2B_3})$, $(\overset{\bigcirc}{CC_2C_3})$ tienen por inversas las rectas $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$.

Como esas tres circunferencias, de centros respectivos $\mathbf{O_A}$, $\mathbf{O_B}$, $\mathbf{O_C}$, tienen por inversas rectas, estas pasarán por el polo **O**.

Por otra parte, como las rectas $\overline{\mathbf{AA_1}}$, $\overline{\mathbf{BB_1}}$, $\overline{\mathbf{CC_1}}$, pasan por un mismo punto **K**, las circunferencias pasarán por un mismo punto **I**, inverso del punto **K**.

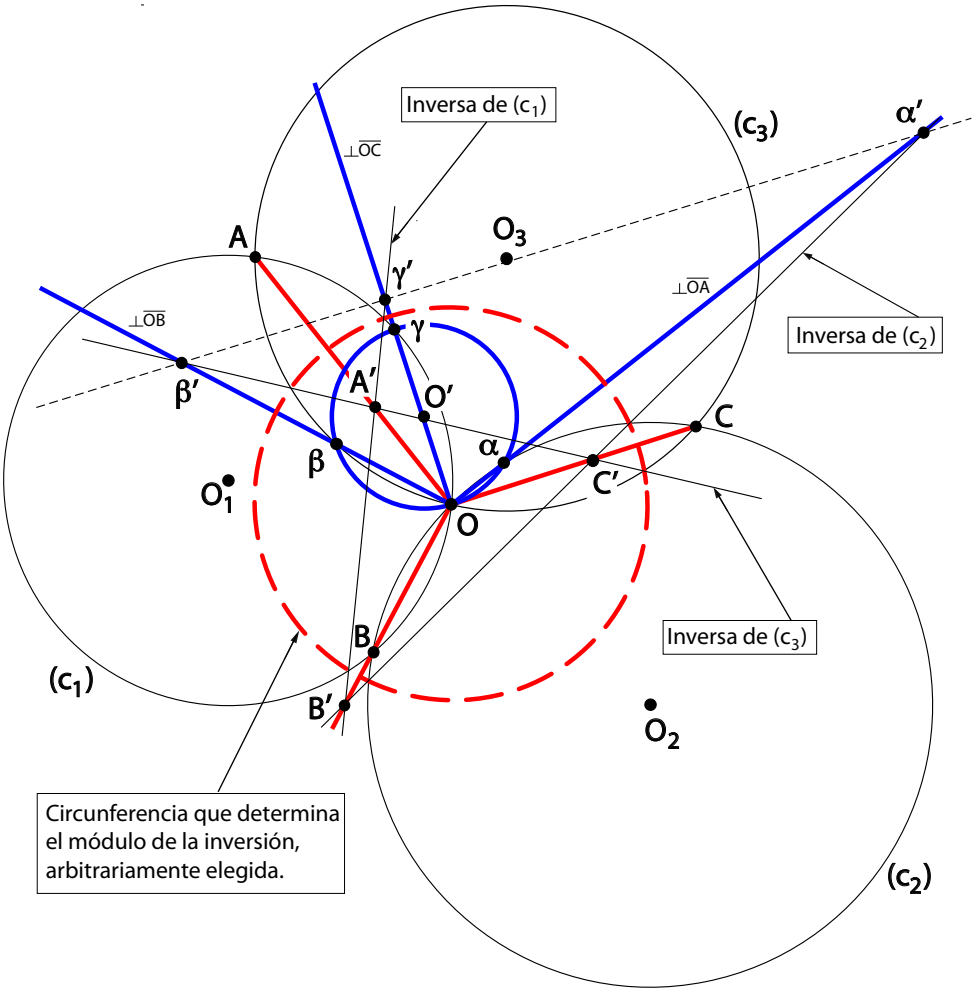
Concluyendo: Las tres circunferencias consideradas pasan por los puntos fijos **O** e **I**.



PROPOSICIÓN 6. Consideremos tres circunferencias con un punto común, O, que se cortan dos a dos en tres puntos A, B, C. Las perpendiculares trazadas por el punto O a las cuerdas $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, cortan, respectivamente, a las circunferencias $(\overset{\bigcirc}{OBC})$, $(\overset{\bigcirc}{OCA})$, $(\overset{\bigcirc}{OAB})$ en los puntos α, β, γ. Se verifica, entonces, que los puntos α, β, γ, O pertenecen a una misma circunferencia.

En efecto: Si transformamos la figura por inversión, tomando el punto **O** como polo, las circunferencias dadas se transformarán en rectas, que formarán un triángulo, cuyos vértices $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'$, serán los inversos de los puntos **A**, **B**, **C**. Las perpendiculares trazadas por **O** a las cuerdas $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ se transformarán en sí mismas; son perpendiculares a $\overline{OA'}$, $\overline{OB'}$, $\overline{OC'}$, y cortarán, respectivamente, a los lados $\overline{B'C'}$, $\overline{C'A'}$, $\overline{A'B'}$, del triángulo $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ en los puntos α', β', γ', inversos de los α, β, γ.

Como, según sabemos, los puntos α', β', γ', están alineados, los puntos α, β, γ, pertenecerán a una circunferencia que pasa por **O**.



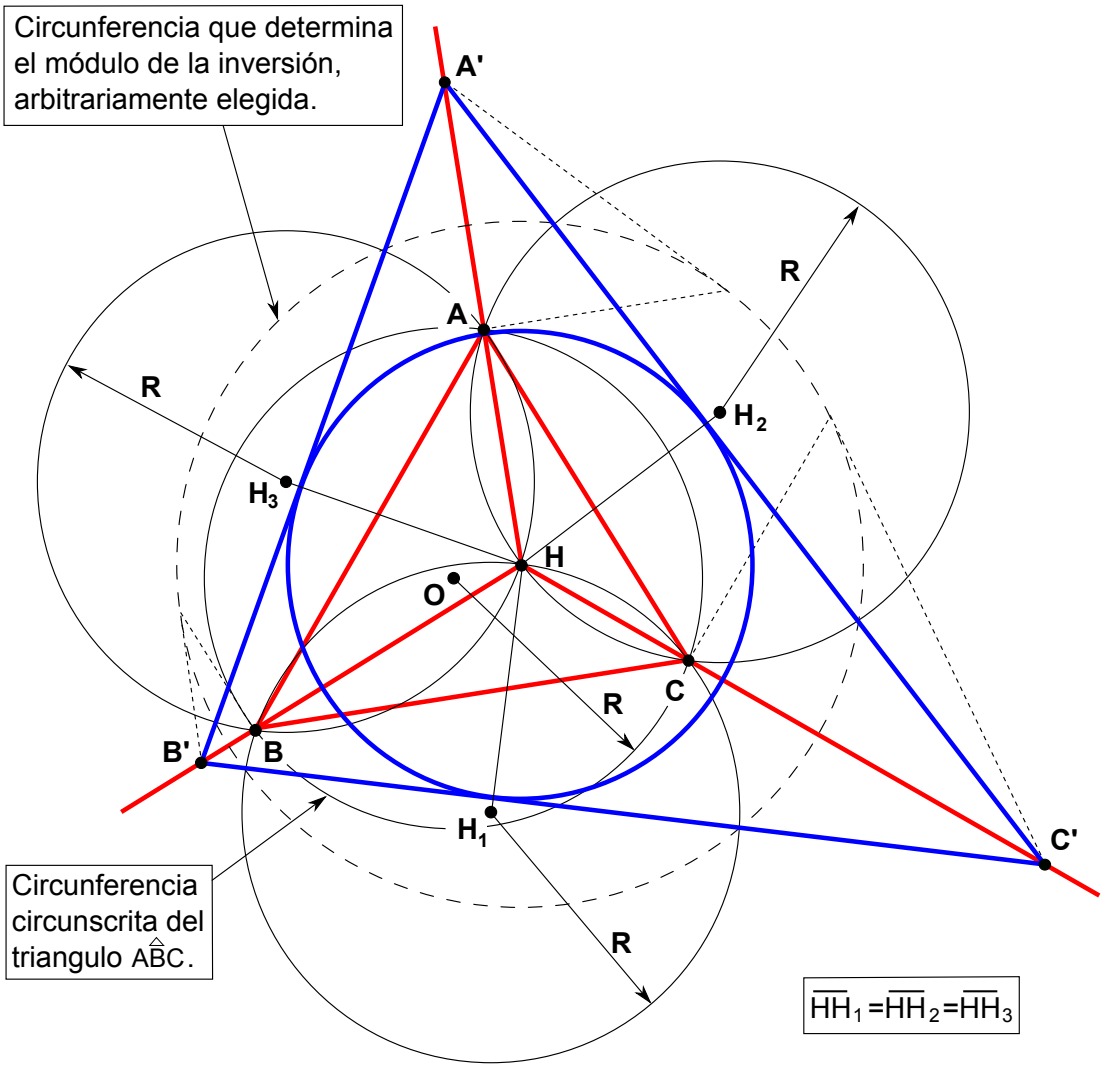
Ejemplo 1. Sea $\mathbf{H}$ el ortocentro de un triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{ABC}}$. Sobre las rectas $\overline{\mathbf{HA}}$, $\overline{\mathbf{HB}}$, $\overline{\mathbf{HC}}$ se toman respectivamente los puntos $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'$ tales que se verifique:

$$\overline{\mathbf{HA}} \cdot \overline{\mathbf{HA}'} = \overline{\mathbf{HB}} \cdot \overline{\mathbf{HB}'} = \overline{\mathbf{HC}} \cdot \overline{\mathbf{HC}'}.$$

Se verifica que el punto $\mathbf{H}$ equidista de los lados del triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{A}'\mathbf{B}'\mathbf{C}'}$.

Observamos que los puntos $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'$ son los inversos de los puntos $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, siendo el polo el punto $\mathbf{H}$.

Por tanto, las rectas $\overline{\mathbf{B}'\mathbf{C}'}$, $\overline{\mathbf{C}'\mathbf{A}'}$, $\overline{\mathbf{A}'\mathbf{B}'}$ se transformarán en las circunferencias $(\overset{\bigcirc}{\mathbf{HBC}})$, $(\overset{\bigcirc}{\mathbf{HCA}})$, $(\overset{\bigcirc}{\mathbf{HAB}})$. Como éstas son iguales que la circunferencia circunscrita del triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{ABC}}$, tendremos que las rectas $\overline{\mathbf{B}'\mathbf{C}'}$, $\overline{\mathbf{C}'\mathbf{A}'}$, $\overline{\mathbf{A}'\mathbf{B}'}$, están a la misma distancia del punto $\mathbf{H}$.



22.2 Propiedades de las tangentes a las curvas inversas

PROPOSICIÓN 1. Las tangentes en dos puntos correspondientes M, M′ de dos curvas inversas C, C′ forman con la recta $\overline{\mathbf{MM'}}$ ángulos iguales y de signos contrarios.

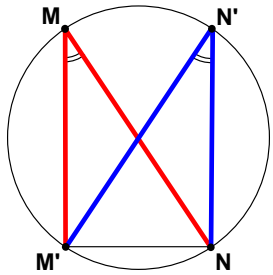
En efecto: Tomemos sobre la curva **C** un punto **N** próximo al punto **M**, y sea **N′** el inverso del punto **N**; el punto **N′** estará situado sobre la curva **C′**.

Los cuatro puntos **M**, **M′**, **N**, **N′** están situados sobre una circunferencia, luego se verificará

$$(\widehat{\overline{\mathbf{MM'}},\ \overline{\mathbf{MN}}}) = (\widehat{\overline{\mathbf{N'M'}},\ \overline{\mathbf{N'N}}})$$

o lo que es lo mismo

$$(\widehat{\overline{\mathbf{MM'}},\ \overline{\mathbf{MN}}}) = -(\widehat{\overline{\mathbf{NN'}},\ \overline{\mathbf{M'N'}}})$$

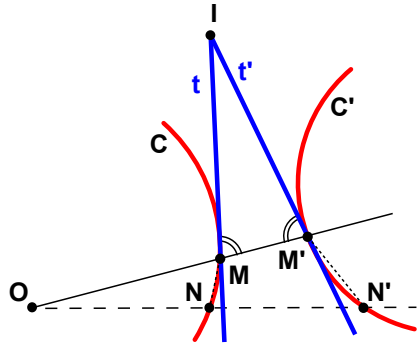


Supongamos que el punto **N** se aproxima indefinidamente al punto **M**; en esas condiciones el punto **N′** se aproximará indefinidamente al punto **M′**. El límite de $\overline{\mathbf{MN}}$ será la tangente **t**, en el punto **M** de la curva **C**, el limite de $\overline{\mathbf{M'N'}}$ será la tangente **t′**, en el punto **M′** de la curva **C′**. Además la recta $\overline{\mathbf{NN'}}$ tiene por límite la recta $\overline{\mathbf{MM'}}$.

En consecuencia, la última igualdad se transforma, en el límite, en la siguiente

$$(\widehat{\overline{\mathbf{MM'}},\ \mathbf{t}}) = -(\widehat{\overline{\mathbf{MM'}},\ \mathbf{t'}})$$

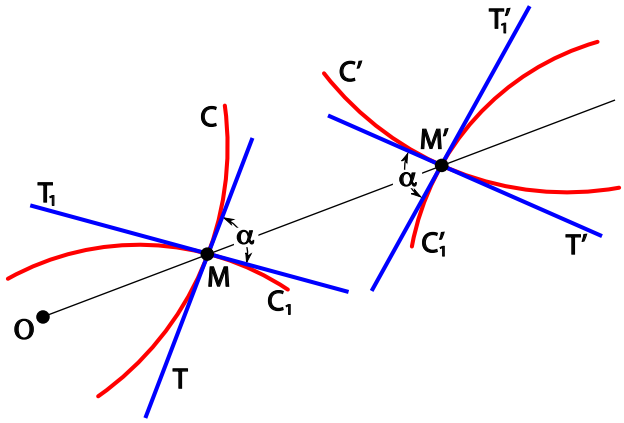
como queríamos establecer.



En alguna forma, podemos decir que las tangentes **t**, $\overline{\mathbf{t'}}$ forman con la recta $\overline{\mathbf{MM'}}$ un triángulo isósceles, $\overset{\triangle}{\mathbf{MM'I}}$, en el que $\overline{\mathbf{MM'}}$ es la base, y también que las tangentes son simétricas respecto de la perpendicular a $\overline{\mathbf{MM'}}$, en su punto medio.

PROPOSICIÓN 2. El ángulo de las tangentes a dos curvas C, C_1, en uno de sus puntos de intersección M, es igual y de signo contrario al ángulo de las tangentes a las curvas inversas C', C'_1 en el punto M', inverso del punto M.

En efecto: La siguiente figura nos ayudará en el razonamiento.



Designemos por $\overline{MT}$, $\overline{MT_1}$ las tangentes en M a las curvas C, C_1 y por $\overline{M'T'}$, $\overline{M'T'_1}$, las tangentes en M' a las curvas C', C'_1. Según la proposición anterior tenemos:

$$(\widehat{\overline{MM'},\ \overline{MT}}) = -(\widehat{\overline{MM'},\ \overline{M'T'}})$$

$$(\widehat{\overline{MM'},\ \overline{MT_1}}) = -(\widehat{\overline{MM'},\ \overline{M'T'_1}})$$

Si restamos, ahora, miembro a miembro resultará

$$(\widehat{\overline{MM'},\ \overline{MT_1}}) - (\widehat{\overline{MM'},\ \overline{MT}}) = (\widehat{\overline{MM'},\ \overline{M'T'}}) - (\widehat{\overline{MM'},\ \overline{M'T'_1}})$$

o también

$$(\widehat{\overline{MT},\ \overline{MM'}}) + (\widehat{\overline{MM'},\ \overline{MT_1}}) = (\widehat{\overline{M'T'_1},\ \overline{MM'}}) + (\widehat{\overline{MM'},\ \overline{M'T'}})$$

con lo que podemos escribir

$$(\widehat{\overline{MT},\ \overline{MT_1}}) = (\widehat{\overline{M'T'_1},\ \overline{M'T'}}) = -(\widehat{\overline{M'T'},\ \overline{MT'_1}})$$

como queríamos establecer.

Del ángulo $\boldsymbol{\alpha}$ (o de su suplementario $\boldsymbol{\pi - \alpha}$), diremos que es el ángulo de las curvas C y C_1 en el punto M. La proposición anterior nos ha establecido, entonces, que **la inversión conserva los ángulos.**

Consideremos, ahora, dos casos particulares interesantes:

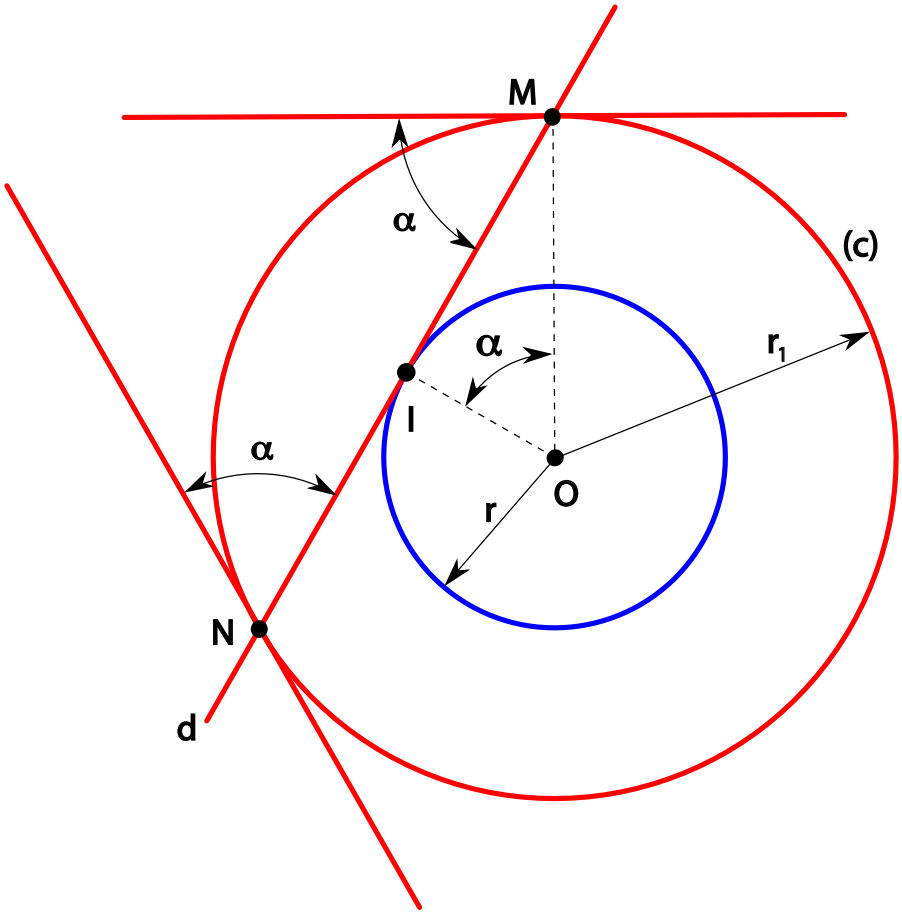
1.- Si las curvas C, C_1 son tangentes en el punto M, el ángulo $\boldsymbol{\alpha}$ es nulo, y las curvas inversas C', C'_1 son también tangentes en el punto M', y

2.- Si las tangentes $\overline{MT}$, $\overline{MT_1}$, son perpendiculares, es decir $\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{2}}$, diremos que las curvas C, C_1 son **ortogonales** en el punto M. Las curvas inversas C', C'_1 serán también ortogonales en el punto M'.

PROPOSICIÓN 3. La envolvente de las rectas que forman un ángulo agudo constante, α, con una circunferencia fija, $(\mathbf{c})$, de radio $\mathbf{r_1}$, es una circunferencia concéntrica con la $(\mathbf{c})$, y de radio $\mathbf{r = r_1 \cdot \cos \alpha}$.

En efecto: Consideremos una circunferencia, $(\mathbf{c})$, de centro **O** y radio $\mathbf{r_1}$, y una recta cualquiera, **d**, que la corta, en los puntos **M**, **N**.

Resulta inmediato comprobar que la recta forma el mismo ángulo agudo $\boldsymbol{\alpha}$ con las tangentes en los puntos **M**, **N**. Luego, el ángulo de la recta y la circunferencia es igual $\boldsymbol{\alpha}$ (o a $\boldsymbol{\pi - \alpha}$).



Si trazamos $\overline{\mathbf{OI}}$, perpendicular a **d**, el ángulo $\widehat{\mathbf{IOM}} = \boldsymbol{\alpha}$, y se tiene

$$\overline{\mathbf{OI}} = \overline{\mathbf{OM}} \cdot \mathbf{cos}\ \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{r_1} \cdot \mathbf{cos}\ \boldsymbol{\alpha}$$

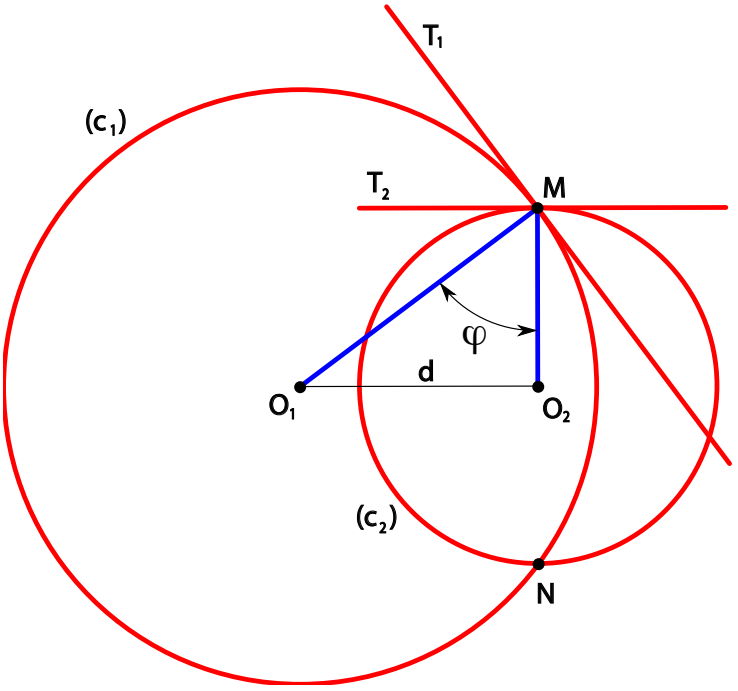
Si hacemos variar la recta manteniendo el mismo ángulo con la circunferencia, la longitud $\overline{\mathbf{OI}}$ conserva un valor constante y, por tanto, la recta **d** es tangente a una circunferencia concéntrica con la $(\mathbf{c})$.

El ejemplo siguiente va a terminar estableciéndonos lo que entenderemos por ángulo de dos circunferencias que se cortan.

Ejemplo 1. Consideremos dos circunferencias $(\mathbf{c_1})$, $(\mathbf{c_2})$, que tienen por centros los puntos $\mathbf{O_1}$, $\mathbf{O_2}$, y por radios $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, designando por $\mathbf{d}$ la distancia de los centros.

Supongamos que las dos circunferencias tienen dos puntos comunes, **M**, **N**.

Las tangentes, $\overline{\mathbf{MT_1}}$, $\overline{\mathbf{MT_2}}$, a esas dos circunferencias en el punto **M**, son respectivamente perpendiculares a los radios $\overline{\mathbf{O_1M}}$, $\overline{\mathbf{O_2M}}$; por tanto, los ángulos de las tangentes son iguales a los ángulos de los radios.



Consideremos, en particular, el ángulo: $\boldsymbol{\varphi} = \widehat{\mathbf{O_1MO_2}}$.

En el triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{O_1MO_2}}$, tenemos

$$\overline{\mathbf{O_1O_2}}^2 = \overline{\mathbf{O_1M}}^2 + \overline{\mathbf{O_2M}}^2 - \mathbf{2}\cdot\overline{\mathbf{O_1M}}\cdot\overline{\mathbf{O_2M}}\cdot\mathbf{cos}\,(\widehat{\mathbf{O_1MO_2}})$$

es decir

$$\mathbf{d^2} = \mathbf{r_1^2} + \mathbf{r_2^2} - \mathbf{2}\cdot\mathbf{r_1}\cdot\mathbf{r_2}\cdot\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\varphi}$$

de donde resulta

$$\cos\,\boldsymbol{\varphi} = \frac{\mathbf{r_1^2} + \mathbf{r_2^2} - \mathbf{d^2}}{\mathbf{2}\cdot\mathbf{r_1}\cdot\mathbf{r_2}} \quad .$$

Esta fórmula define un ángulo $\boldsymbol{\varphi}$, comprendido entre **O** y $\boldsymbol{\pi}$, que será agudo si $\mathbf{d^2} < \mathbf{r_1^2} + \mathbf{r_2^2}$, obtuso si $\mathbf{d^2} > \mathbf{r_1^2} + \mathbf{r_2^2}$, y recto si $\mathbf{d^2} = \mathbf{r_1^2} + \mathbf{r_2^2}$.

El ángulo $\boldsymbol{\varphi}$, (o el $\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\varphi}$), es el **ángulo de las dos circunferencias** en el punto **M**.

Lección 23.- EL PROBLEMA DE APOLONIO

23.1 Determinación de una circunferencia por condiciones de tangencia
23.2 El problema de Apolonio

23.1 Determinación de una circunferencia por condiciones de tangencia

Diversos son los problemas que se nos pueden presentar a la hora de determinar una circunferencia por condiciones de tangencia, en los que pueden intervenir tanto puntos y rectas como circunferencias.
Si designamos por **p** la condición de pasar por un punto, por **r** la condición de ser tangente a una recta, y por **c** la de ser tangente a una circunferencia, el número de combinaciones de estas tres condiciones de todas las maneras posibles será:

$\mathbf{RC_{m,\,n} = C_{m+n-1,\,n}}$, y siendo $\mathbf{m = n = 3}$, tendremos:

$$\boxed{\mathbf{RC_{3,\,3} = C_{3+3-1,\,3} = C_{5,\,3} = \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10}}$$

Apuntamos, a continuación, los diez problemas posibles, con indicación del número máximo de soluciones en cada caso:

1.- ppp (1 solución).

2.- ppr (2 soluciones)

3.- ppc (2 soluciones)

4.- prr (2 soluciones)

5.- prc (4 soluciones)

6.- pcc (4 soluciones)

7.- rrr (4 soluciones)

8.- rrc (8 soluciones)

9.- rcc (8 soluciones)

10.- ccc (8 soluciones)

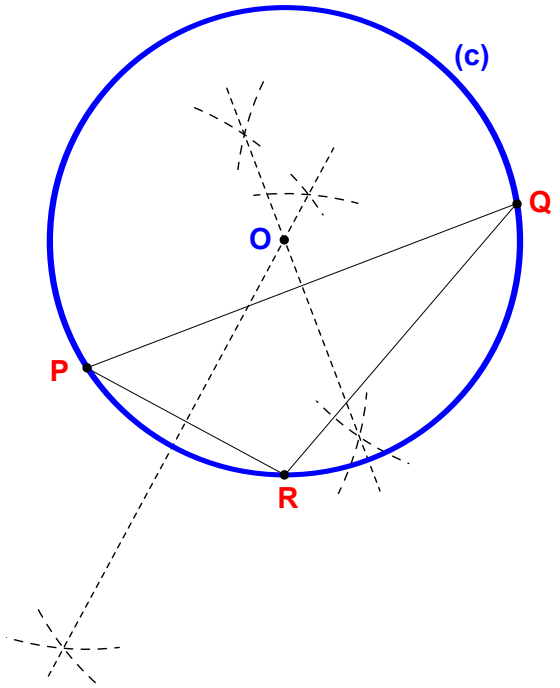
De entre todos, el problema a destacar, por lo que tiene de histórico es el **10**, conocido como **el problema de Apolonio**, que trataremos en particular en el próximo apartado.

Los siguientes ejemplos ilustran el listado anterior; recordemos que se trata, tal como comentamos más arriba, de la determinación de la circunferencia (o circunferencias) tangente a los tres elementos dados (**p**=punto, **r**=recta, **c**=circunferencia):

1.	**ppp**	.....	**Ejemplo 1**	(Dibujada la única solución.)
2.	**ppr**	.....	**Ejemplo 2**	(Dibujada las dos soluciones.)
3.	**ppc**	.....	**Ejemplo 3**	(Dibujada las dos soluciones.)
4.	**prr**	.....	**Ejemplo 4**	(Dibujada las dos soluciones.)
5.	**prc**	.....	**Ejemplo 5**	(Dibujada dos de las cuatro soluciones posibles.)
6.	**pcc**	.....	**Ejemplo 6**	(Dibujada una de las cuatro soluciones posibles.)
7.	**rrr**	.....	**Ejemplo 7**	(Dibujadas las cuatro soluciones.)
8.	**rrc**	.....	**Ejemplo 8**	(Dibujadas dos de las ocho soluciones posibles.)
9.	**rcc**	.....	**Ejemplo 9**	(Dibujada una de las ocho soluciones posibles.)
10.	**ccc**	.....		(Se trata en el siguiente apartado.)

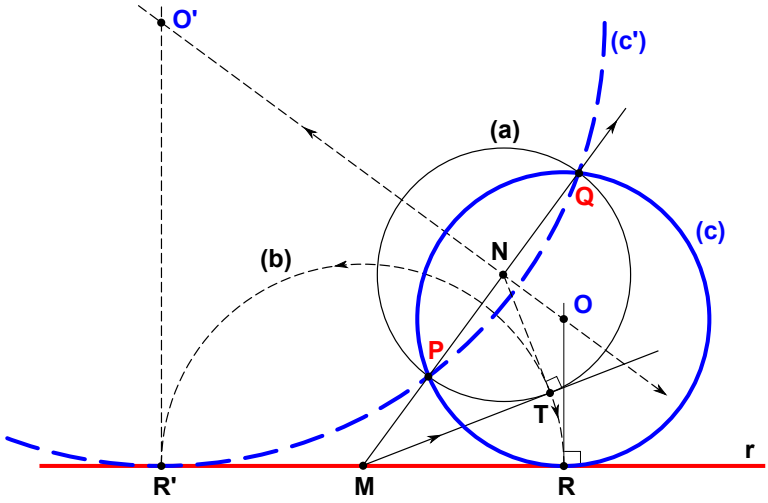
Los ejemplos 3, 5 y 6, fueron resueltos en el apartado 2.2 de la Lección 2, como ejemplos respectivos 10, 7 y 8, utilizando como herramienta la inversión.

Ejemplo 1. Determinar la circunferencia (**c**) que pase por tres puntos dados **P**, **Q**, y **R**.



Si los puntos dados no están alineados, bastará trazar las mediatrices de, por ejemplo, los segmentos $\overline{\mathbf{PR}}$ y $\overline{\mathbf{PQ}}$, cuya intersección nos proporciona el centro de la solución, (**c**). Evidentemente, si los puntos estuviesen alineados no existiría la tal circunferencia.

Ejemplo 2. Trazar una circunferencia (**c**)., tangente a una recta **r**, y que pase por dos puntos **P** y **Q**.



La recta $\overline{\mathbf{PQ}}$ corta a la **r** en el punto **M**.

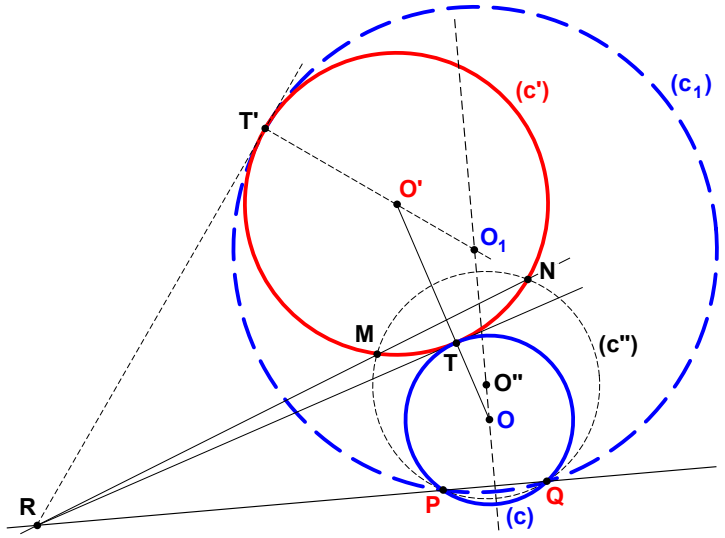
Con centro en el punto medio del segmento $\overline{\mathbf{PQ}}$, es decir el **N**, trazamos la circunferencia auxiliar (**a**).

Desde **M** trazamos la tangente $\overline{\mathbf{MT}}$, a la circunferencia (**a**).

Con centro en **M** y radio $\overline{\mathbf{MT}}$ dibujamos el arco (**b**), que cortará a **r** en el punto **R**; levantando en éste la perpendicular a **r**, cortará ésta a la mediatriz del segmento $\overline{\mathbf{PQ}}$ en el punto **O**, centro de la circunferencia solución, (**c**).

La segunda solución, (**c**′)está dibujada a trazos.

Ejemplo 3. Trazar una circunferencia (**c**), que pasa por dos puntos **P** y **Q**, y sea tangente a una circunferencia, (**c**′). (Resolvimos este problema en el Ejemplo 10, del apartado 2.2. de la Lección 2, aplicando la inversión.)



Aunque lo que hemos hecho es dibujar una solución, el mismo razonamiento nos permitiría obtener una segunda solución, (dibujada a trazos, circunferencia $(\mathbf{c_1})$ de centro $\mathbf{O_1}$).

Utilizamos una circunferencia auxiliar, $(\mathbf{c''})$, cualquiera con la condición de que pase por los puntos **P** y **Q**, y corte a la $(\mathbf{c'})$, en dos puntos **M** y **N**.

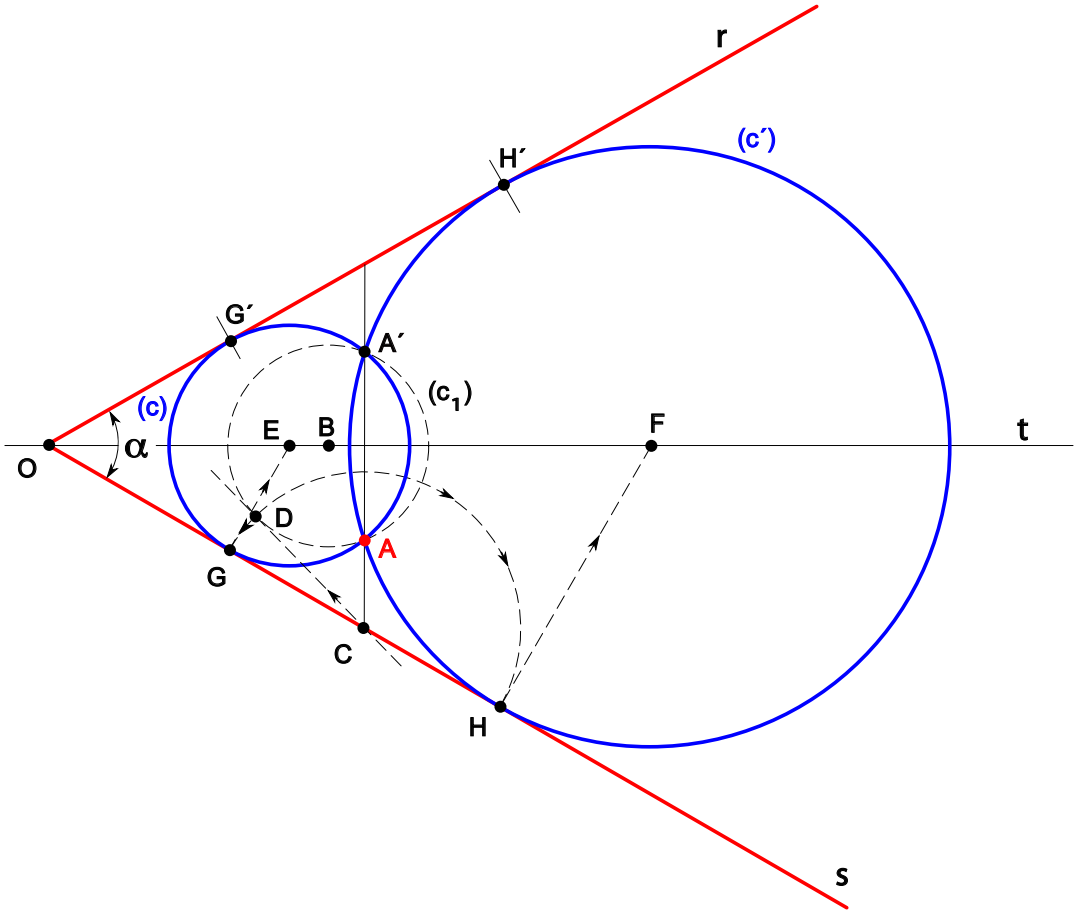
Determinamos el punto **R**, como intersección de las rectas $\overline{\mathbf{PQ}}$ y $\overline{\mathbf{MN}}$.

Desde **R** trazamos la tangente a $(\mathbf{c'})$, con punto de contacto el **T**.

La intersección de la recta $\overline{\mathbf{O'T}}$ con la mediatriz del segmento $\overline{\mathbf{PQ}}$, nos da el centro, **O**, de la circunferencia solución.

La segunda solución, $(\mathbf{c_1})$está dibujada a trazos.

Ejemplo 4. Trazar una circunferencia que sea tangente a dos rectas dadas, **r** y **s**, no paralelas, y que pase por un punto **A** no situado en ellas.



La solución debe pasar, además de por **A**, por el punto $\mathbf{A'}$, simétrico del **A** respecto de la bisectriz **t**, del ángulo $\boldsymbol{\alpha}$.

Con centro en un punto cualquier, **B**, de **t**, y con radio $\overline{\mathbf{BA}}$ trazamos la circunferencia auxiliar $(\mathbf{c_1})$.

Trazamos la tangente a $(\mathbf{c_1})$ desde el punto **C**, siendo el de la tangencia el **D**.

Con centro en **C** y radio $\overline{\mathbf{CD}}$ trazamos el arco que corta a la recta **s** en los puntos **G** y **H**, sobre los que levantamos perpendiculares a **s**, que cortan a **t** en los puntos **E** y **F**.

Las circunferencias de centros **E** y **F**, y radios respectivos $\overline{\mathbf{EG}}$ y $\overline{\mathbf{FH}}$, son las soluciones buscadas.

Ejemplo 5. Trazar una circunferencia $(\mathbf{c}')$ tangente a una circunferencia $(\mathbf{c})$ y a una recta dada **r**, y que pase por un punto dado **P**.

(Resolvimos este problema en el Ejemplo 7, del apartado 2.2 de la Lección 2, aplicando la inversión.)

Si suponemos el problema resuelto tendremos que se verifica lo siguiente:

Si **I** es el centro de $(\mathbf{c}')$, la recta $\overline{\mathbf{AI}}$, que une los dos centros, pasa por el punto de contacto **L**.

Por el centro **A** de $(\mathbf{c})$, trazamos la recta $\overline{\mathbf{OG}}$ perpendicular a la **r**, y luego las rectas $\overline{\mathbf{OLD}}$, $\overline{\mathbf{OPH}}$, $\overline{\mathbf{ID}}$ y $\overline{\mathbf{LF}}$.

Los triángulos $\overset{\triangle}{\mathbf{OAL}}$ y $\overset{\triangle}{\mathbf{LID}}$ son isósceles, y tienen iguales sus ángulos en **L**; luego también serán iguales sus ángulos en **O** y **D**.

Resulta, entonces, que la recta $\overline{\mathbf{ID}}$ es paralela a la $\overline{\mathbf{OG}}$, y por tanto, perpendicular a la **r**; y el punto **D** es el de contacto de la circunferencia $(\mathbf{c}')$ con la recta **r**.

Dado que el ángulo $\widehat{\mathbf{OLF}}$ es recto, el cuadrilátero $\overset{\square}{\mathbf{LFGD}}$ tiene los dos ángulos opuestos en **L** y **G** rectos, luego el cuadrilátero es inscribible. Se tiene entonces:

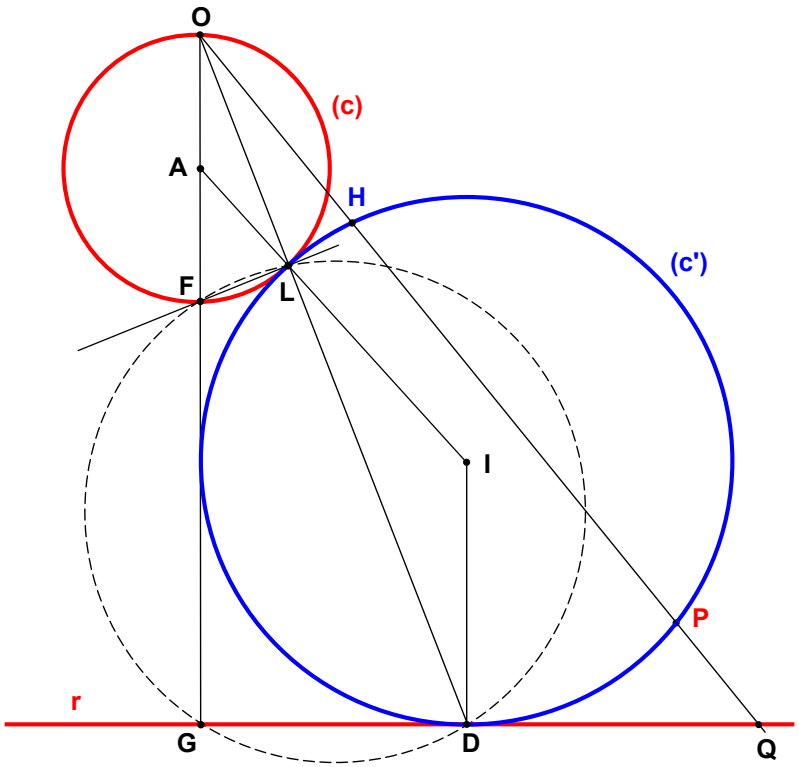
$$\overline{\mathbf{OF}} \cdot \overline{\mathbf{OG}} = \overline{\mathbf{OL}} \cdot \overline{\mathbf{OD}} = \overline{\mathbf{OH}} \cdot \overline{\mathbf{OP}}$$

de donde resulta

$$\frac{\overline{\mathbf{OP}}}{\overline{\mathbf{OF}}} = \frac{\overline{\mathbf{OG}}}{\overline{\mathbf{OH}}}$$

igualdad que permite encontrar $\overline{\mathbf{OH}}$, y por tanto el punto **H**.

El problema se reconduce al siguiente. Trazar una circunferencia que pase por los dos puntos **P** y **H** y que sea tangente a la recta **r**. (Resolvimos este problema en el Ejemplo 10, del apartado 2.2., de la lección 2, utilizando la inversión).

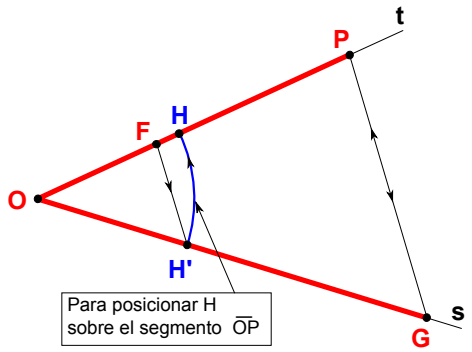


La construcción que nos resuelve el problema será la siguiente:

1.- Determinación del segmento $\overline{\mathbf{OH}}$: Dada la igualdad

$$\frac{\overline{\mathbf{OP}}}{\overline{\mathbf{OF}}} = \frac{\overline{\mathbf{OG}}}{\overline{\mathbf{OH}}}$$

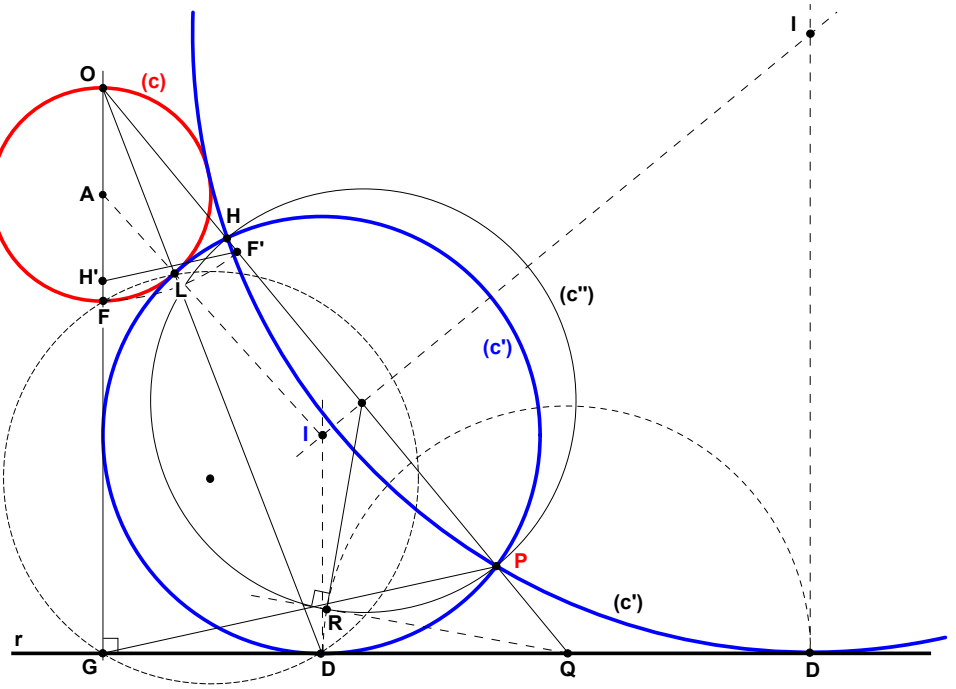
la determinación de $\overline{\mathbf{OH}}$ se hace como se indica en la figura siguiente:



Para la determinación de $\overline{\mathbf{OH}}$ las rectas **s** y **t** pueden ser cualesquiera; los que deben respetarse son las medidas de los segmentos $\overline{\mathbf{OG}}$, $\overline{\mathbf{OP}}$ y $\overline{\mathbf{OF}}$.

2.- A continuación situamos en su posición, en el dibujo el punto **H**.

3.- Trazamos ahora la circunferencia auxiliar $(\mathbf{c}'')$, de diámetro $\overline{\mathbf{PH}}$, luego la tangente a ella desde el punto **Q**, con punto de tangencia el **R**. Luego, con centro en **Q** y radio $\overline{\mathbf{QR}}$ trazamos el arco $\overset{\frown}{\mathbf{RD}}$, que nos determina, en su intersección con **r**, el punto **D**. La intersección de la perpendicular a **r** en **D**, con la mediatriz del segmento $\overline{\mathbf{PH}}$, nos determina el centro **I**, de la circunferencia $(\mathbf{c}')$, de radio $\overline{\mathbf{ID}}$. Observemos que procediendo así, hemos obtenido dos soluciones.



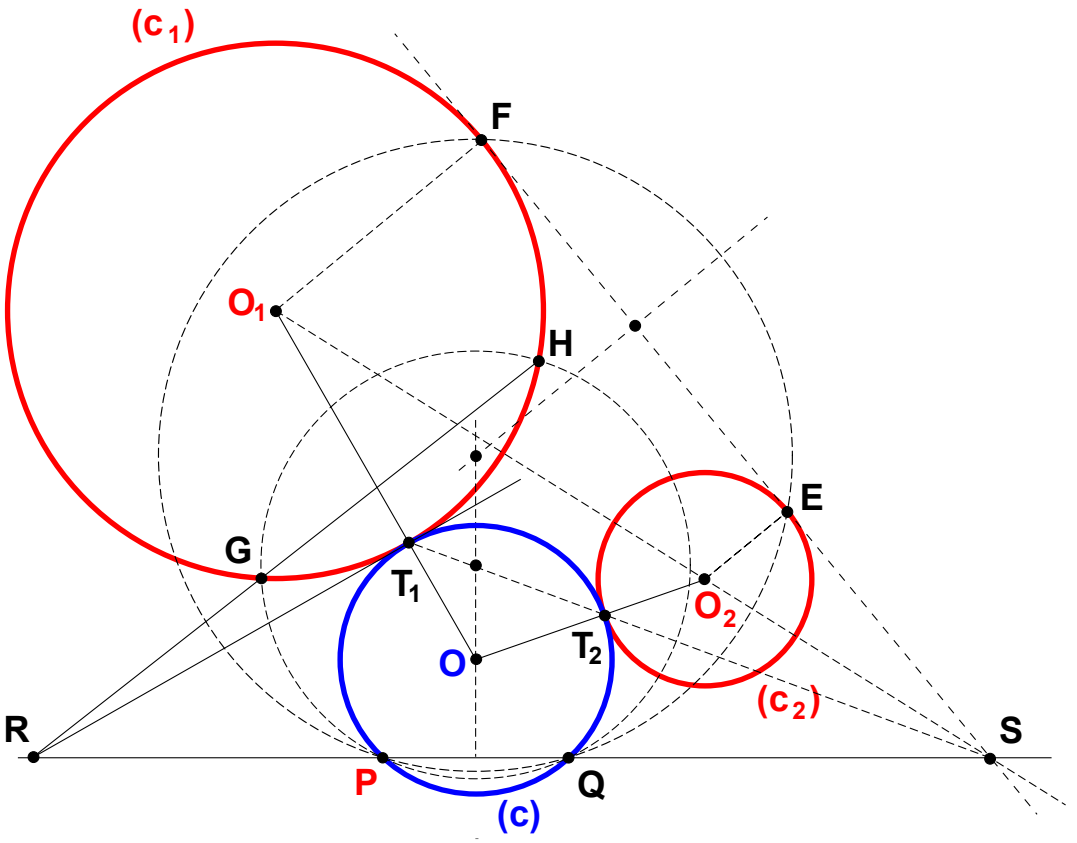
Ejemplo 6. Trazar una circunferencia $(\mathbf{c})$ tangente a dos circunferencias dadas $(\mathbf{c_1})$ y $(\mathbf{c_2})$, y que pase por un punto dado **P**. (Resolvimos este problema en el Ejemplo 8, del apartado 2.2, de la Lección 2, aplicando la inversión).

Supongamos que $(\mathbf{c})$ sea la circunferencia $(\overset{\circ}{\mathbf{PQT_1T_2}})$. La línea $\overline{\mathbf{T_1T_2}}$ de los puntos de contacto pasa por el punto **S**, de semejanza da las circunferencias dadas $(\mathbf{c_2})$ y $(\mathbf{c_1})$. El punto **S**, quedará determinado por la intersección de la tangente común $\overline{\mathbf{FES}}$ con la recta $\overline{\mathbf{PQ}}$, cuyo punto **Q** determinamos a continuación.

La circunferencia determinada por los puntos **P**, **E** y **F** determina sobre $\overline{\mathbf{SP}}$, el punto **Q**, que pertenecerá a la circunferencia que nos interesa, puesto que se verifica:

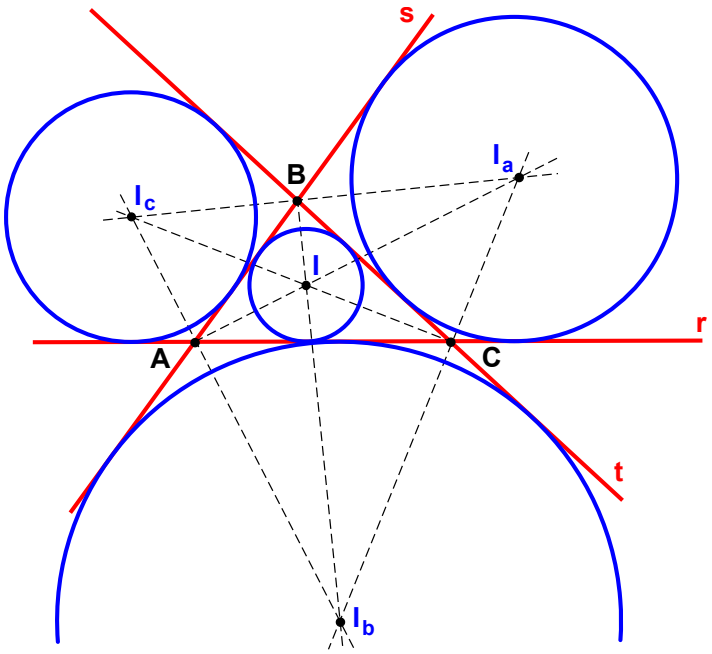
$$\overline{\mathbf{SP}} \cdot \overline{\mathbf{SQ}} = \overline{\mathbf{ST_1}} \cdot \overline{\mathbf{ST_2}} = \overline{\mathbf{SE}} \cdot \overline{\mathbf{SF}}$$

El problema planteado queda, así, reducido al siguiente: Por dos puntos **P**, **Q** hacer pasar una circunferencia que sea tangente a la $(\mathbf{c_1})$ (Este problema es el que resolvimos en el anterior ejemplo 3).



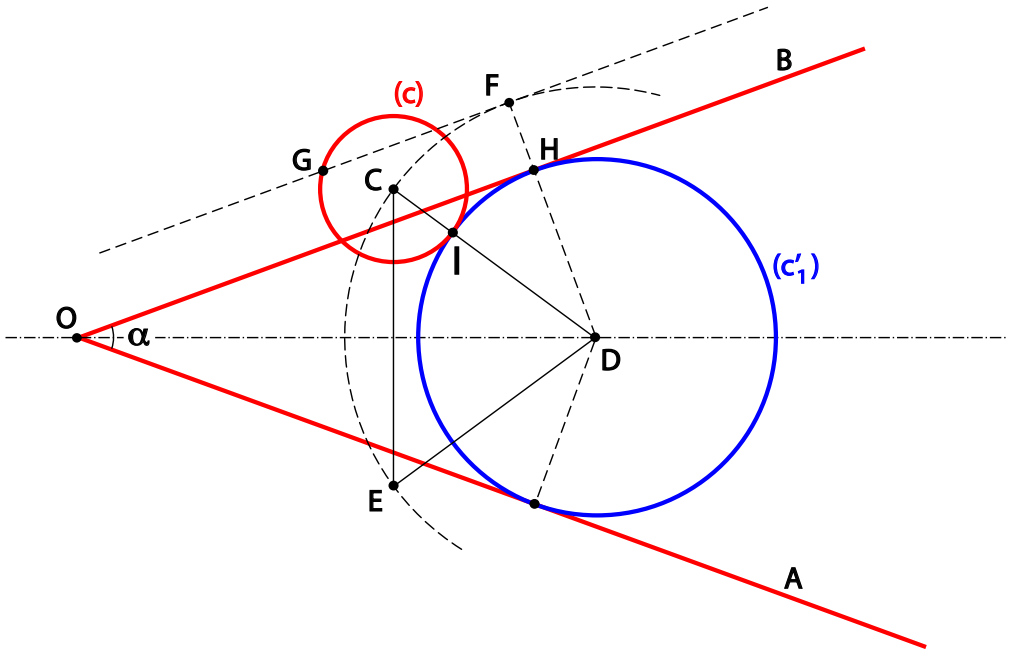
Ejemplo 7. Trazar una circunferencia $(\mathbf{c})$, tangente a tres rectas dadas **r**, **s** y **t**.

Las rectas dadas determinan el triángulo $\overset{\triangle}{\mathbf{ABC}}$. El incentro, **I**, y los exincentros $\mathbf{I_a}$, $\mathbf{I_b}$, $\mathbf{I_c}$, serán centros de circunferencias solución. (Existirán, por tanto, cuatro soluciones).



Ejemplo 8. Trazar una circunferencia $(\mathbf{c}'_1)$ tangente a dos rectas $\overline{\mathbf{OA}}$, $\overline{\mathbf{OB}}$, y a una circunferencia dada $(\mathbf{c})$.

Si suponemos el problema resuelto tendremos que $(\mathbf{c}'_1)$ tendrá su centro sobre la bisectriz $\overline{\mathbf{OD}}$, del ángulo $\boldsymbol{\alpha}$, siendo **D** el centro de $(\mathbf{c}'_1)$ y $\boldsymbol{\alpha}$ el ángulo que forman las rectas $\overline{\mathbf{OA}}$ y $\overline{\mathbf{OB}}$.



La recta $\overline{\mathbf{CE}}$ es perpendicular a la bisectriz $\overline{\mathbf{OD}}$, y $\overline{\mathbf{DF}}$ es perpendicular a la recta $\overline{\mathbf{OB}}$.

Desde el punto **D**, con $\overline{\mathbf{DC}}$ como radio, describimos el arco $\overset{\frown}{\mathbf{ECF}}$.

La recta $\overline{\mathbf{FG}}$ es perpendicular a la $\overline{\mathbf{DF}}$, luego paralela a la $\overline{\mathbf{OB}}$.

Se verifica entonces que:

$$\overline{\mathbf{DF}} = \overline{\mathbf{DC}}$$

y además

$$\overline{\mathbf{DH}} = \overline{\mathbf{DI}}\ ,$$

en consecuencia

$$\overline{\mathbf{HF}} = \overline{\mathbf{IC}} = \mathbf{r}\ \ (\text{radio de la circunferencia } (\mathbf{c}))$$

La construcción que nos resolverá el problema es la siguiente:

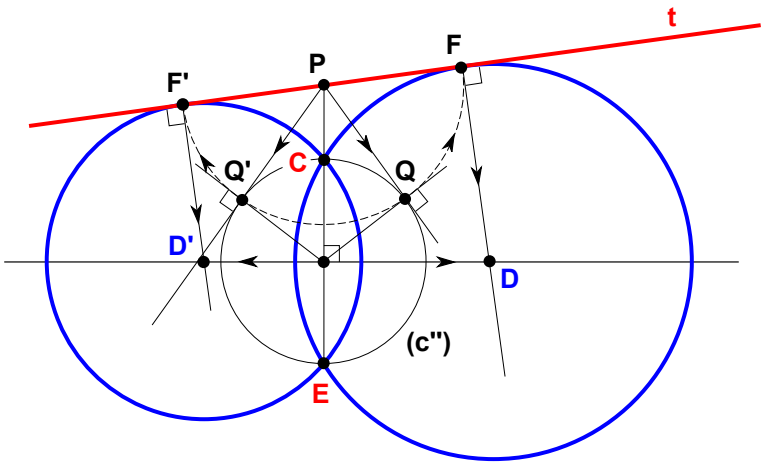
1.- Se traza la recta $\overline{\mathbf{GF}}$, paralela a la $\overline{\mathbf{OB}}$, y a una distancia **r**.

2.- Se determina el punto **E**, simétrico del **C** respecto de la bisectriz $\overline{\mathbf{OD}}$.

3.- Se traza el arco $\overset{\frown}{\mathbf{ECF}}$, que pasa por los puntos **E** y **C**, y es tangente a la recta $\overline{\mathbf{FG}}$. El centro de este arco, **D**, será el centro de la circunferencia que queríamos determinar, la $(\mathbf{c}'_1)$.

Observemos que lo que es problemático aquí, es como determinar una circunferencia tangente a una recta, y que pase por dos puntos dados también. (Este problema fue resuelto en el Ejemplo 3, del apartado 19.2, de la Lección 19).

La recta $\overline{\mathbf{CE}}$ corta a la **t** en el punto **P**. Se determina el punto **Q**, punto de contacto de la tangente a $(\mathbf{c}'')$ desde el **P**. La circunferencia de centro **P** y radio $\overline{\mathbf{PQ}}$, cortará a **t** en **F**. El punto **D** será la intersección de la mediatriz de $\overline{\mathbf{CE}}$ y de la perpendicular a **t** en el punto **F**.



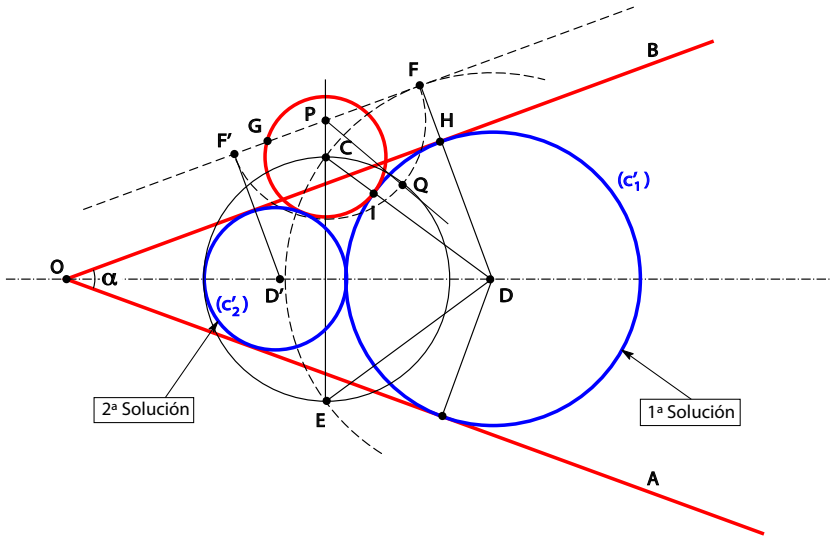
Resolvamos ahora el problema planteado:

1.- Trazamos la recta $\overline{\mathbf{GF}}$, paralelamente a la $\overline{\mathbf{OB}}$, y a una distancia **r** de ella.

2.- Determinamos el punto **E**, simétrico del **C** respecto a la recta $\overline{\mathbf{OD}}$.

3.- Describimos el arco $\overset{\frown}{\mathbf{ECF}}$, que pasa por los punto **E**, **C** y es tangente a la recta $\overline{\mathbf{GF}}$, como hemos explicado antes.

4.- El centro de ese arco es el centro de la circunferencia pedida; que hemos llamado 1ª solución.

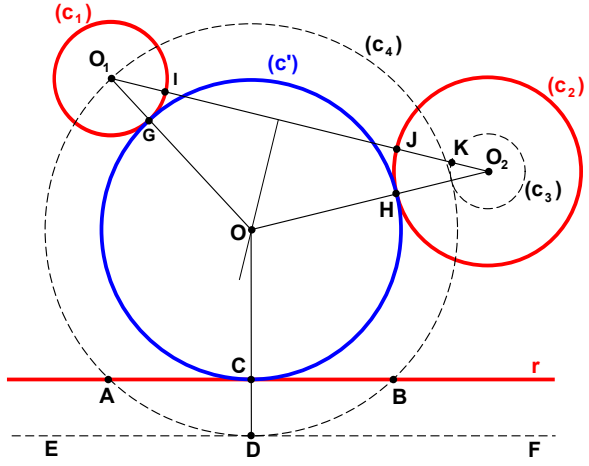


Observemos que si, con centro en **P**, tracemos el arco de radio $\overline{\mathbf{PF}}$, éste cortará a la recta $\overline{\mathbf{GF}}$ también en el punto $\mathbf{F}'$. La perpendicular en $\mathbf{F}'$ a la recta $\overline{\mathbf{GF}}$, cortará a la recta $\overline{\mathbf{OD}}$ en el punto $\mathbf{D}'$, que será el centro de otra circunferencia que llamamos **2ª solución**, la $(\mathbf{C}'_2)$.

Por otra parte, obtendríamos otras dos soluciones si consideramos los centros sobre la bisectriz del ángulo obtuso formado por las dos rectas.

Ejemplo 9. Trazar una circunferencia $(\mathbf{c}')$ tangente a una recta **r**, y a dos circunferencias dadas $(\mathbf{c_1})$ y $(\mathbf{c_2})$.

Si suponemos el problema resuelto su visualización será la siguiente:



El radio de $(\mathbf{c_1})$ es menor que el de $(\mathbf{c_2})$; es decir $\overline{\mathbf{O_1I}} < \overline{\mathbf{O_2J}}$
La circunferencia auxiliar $(\mathbf{c_3})$, de centro $\mathbf{O_2}$ tiene su radio

$$\overline{\mathbf{O_2K}} = \overline{\mathbf{O_2J}} - \overline{\mathbf{O_1I}}.$$

La recta $\overline{\mathbf{OC}}$ es perpendicular a la dada **r**, y la recta $\overline{\mathbf{EF}}$ es paralela a la **r**, y la distancia

$$\overline{\mathbf{CD}} = \overline{\mathbf{O_1I}}$$

La determinación de la circunferencia auxiliar $(\mathbf{c_4})$ nos proporcionará el centro de la circunferencia solución $(\mathbf{c}')$.
El problema queda pues reducido a trazar una circunferencia, $(\mathbf{c_4})$, que pase por un punto, $\mathbf{O_1}$, y sea tangente a una recta, $\overline{\mathbf{EF}}$, y a una circunferencia $(\mathbf{c_3})$.

23.2 El problema de Apolonio

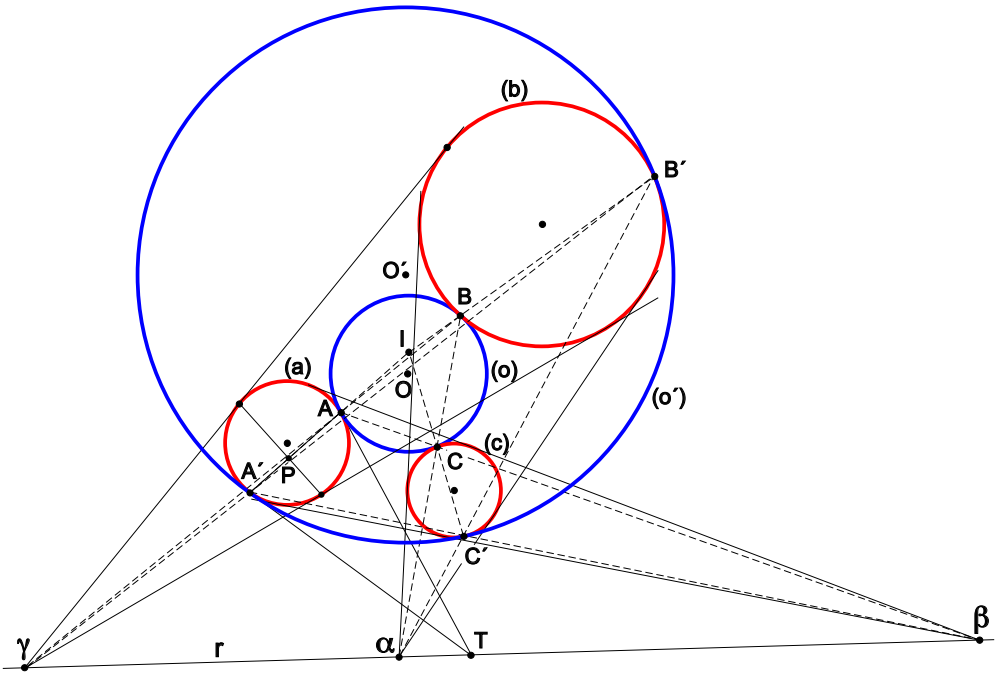
El problema planteado es el de la determinación de las circunferencias tangentes a otras tres dadas. El número de soluciones variará dependiendo de las posiciones relativas de esas tres circunferencias, como veremos más adelante.
En su planteamiento general supondremos que las tres circunferencias dadas, que llamaremos $(\mathbf{a})$, $(\mathbf{b})$, $(\mathbf{c})$, son exteriores dos a dos y sin puntos de tangencia.

> Antes de continuar puede resultar muy ilustrativo repasar lo que establecimos en la lección 18; en particular lo que se estableció en su apartado 18.2.

Habrá que ver, en primer lugar, como determinar los puntos A, B, C para, una vez conocidos, trazar la circunferencia que pasa por ellos; hecho esto, nos quedará por establecer que esa circunferencia es tangente, en esos puntos, a las tres circunferencias dadas.
Por ser los puntos **B** y **C** centros de homotecia, respectivamente, de los pares de circunferencias $(\mathbf{o})$, $(\mathbf{b})$ y $(\mathbf{o})$, $(\mathbf{c})$, la recta $\overline{\mathbf{BC}}$ pasa por uno de los centros de homotecia $\boldsymbol{\alpha}$ de las circunferencias $(\mathbf{b})$, $(\mathbf{c})$. Por lo mismo las rectas $\overline{\mathbf{CA}}$ y $\overline{\mathbf{AB}}$ pasan, respectivamente por uno de los centros de homotecia $\boldsymbol{\beta}$ y $\boldsymbol{\gamma}$, de los pares de circunferencias $(\mathbf{c})$, $(\mathbf{a})$ y $(\mathbf{a})$, $(\mathbf{b})$.
Mostraremos luego que los tres puntos $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ están alineados, para lo que será suficiente establecer que entre esos tres centros hay un número par de centros inversos (considerando que cero es un número par).
Los tres centros de homotecia **B**, **C**, $\boldsymbol{\alpha}$ relativos a las circunferencias $(\mathbf{b})$, $(\mathbf{c})$ $(\mathbf{o})$, tomamos dos a dos, están alineados, luego en el conjunto $\{\mathbf{B},\mathbf{C},\boldsymbol{\alpha}\}$ hay un par de centros inversos. Lo mismo ocurre con los conjuntos $\{\mathbf{C},\mathbf{A},\boldsymbol{\beta}\}$ y $\{\mathbf{A},\mathbf{B},\boldsymbol{\gamma}\}$. Luego, considerando esos tres conjuntos simultáneamente, el número

de centros inversos es par. Como en esta unión, cada uno de los **A**, **B**, **C** figura dos veces, hay un número par de centros inversos en el conjunto $\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\}$.

En consecuencia, los puntos $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ pertenecen a una recta **r**, que es uno de los ejes de homotecia de las tres circunferencias dadas (**a**), (**b**), (**c**).

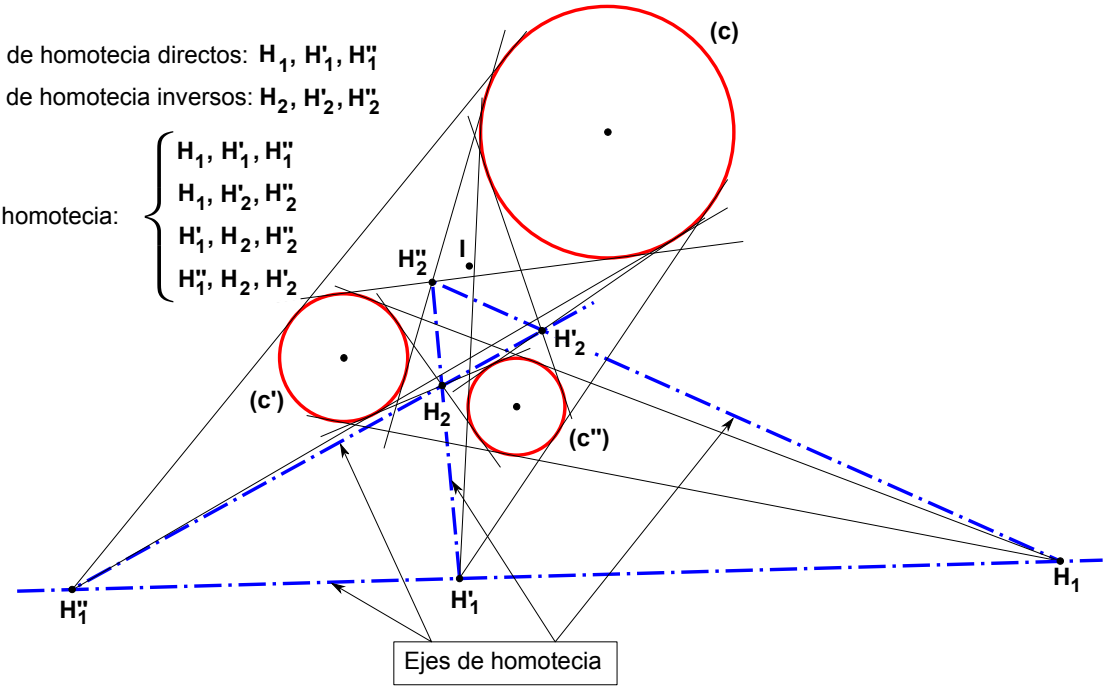


Centros de homotecia directos: H_1, H'_1, H''_1

Centros de homotecia inversos: H_2, H'_2, H''_2

Ejes de homotecia:

- H_1, H'_1, H''_1
- H_1, H'_2, H''_2
- H'_1, H_2, H''_2
- H''_1, H_2, H'_2



Veamos ahora la metodología para construir los puntos **A**, **B**, **C**: Métodos de **Gergonne** y de **Poncelet.**

Método de Gergonne:

Se determina, en primer lugar, el centro radical **I** de las tres circunferencias (**a**), (**b**), (**c**), y se transforma la figura por inversión tomando como polo el punto **I**, y como módulo la potencia del punto **I** respecto de cada una de las circunferencias dadas.

Las circunferencias (**a**), (**b**), (**c**) se transforman en ellas mismas, y la circunferencia (**o**) tendrá por inversa una circunferencia (**o′**), tangente a las (**a**), (**b**), (**c**), respectivamente, en los puntos **A′**, **B′**, **C′**, inversos de los puntos **A**, **B**, **C**.

Nos muestra lo anterior que a toda circunferencia (**o**), tangente a las circunferencias dadas, corresponde una circunferencia (**o′**) tangente a las mismas circunferencias. El número de soluciones es, por tanto, par.

Establezcamos ahora las tres propiedades siguientes:

PROPOSICIÓN 1. Las rectas $\overline{B'C'}$, $\overline{C'A'}$, $\overline{A'B'}$ pasan respectivamente, por los puntos α, β, γ.

En efecto: Las circunferencias (**b**), (**c**) son inversas respecto del polo α, y los puntos **B**, **C**, son puntos antihomólogos, puesto que existe una circunferencia, (la circunferencia (**o**)), tangente a esas circunferencias en los puntos **B**, **C**.

La cuerda $\overline{BB'}$ de la circunferencia (**b**) tiene por antihomóloga, en la circunferencia (**c**), una cuerda que debe pasar por el punto **C**, antihomólogo del **B**, y que debe cortar a $\overline{BB'}$ sobre el eje radical de (**b**) y (**c**).

Puesto que **I** es el centro radical de las circunferencias (**a**), (**b**), (**c**), será **I** el punto de intersección de $\overline{BB'}$ y del eje radical de (**b**) y (**c**); luego la cuerda antihomóloga de $\overline{BB'}$ estará sobre la recta $\overline{IC}$, es decir la $\overline{CC'}$.

Como conclusión, se tiene que **C′** es el antihomólogo de **B′**, y por tanto, $\overline{B'C'}$ pasa por el polo α.

En forma análoga se establece que $\overline{C'A'}$ pasa por β, y $\overline{A'B'}$ por γ.

PROPOSICIÓN 2. La recta r es el eje radical de las circunferencias (o) y (o′).

En efecto: En la inversión de polo **I** que transforma (**o**) en (**o′**), $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$ son cuerdas antihomólogas; luego, su punto de intersección α está situado sobre el eje radical de (**o**) y (**o′**).

Por lo mismo, este eje radical pasa por los puntos β y γ; se confunde por tanto con la recta **r**.

PROPOSICION 3. La recta $\overline{AA'}$ pasa por el polo P de la recta r respecto a la circunferencia (a).

En efecto: Los puntos **A**, **A′** son antihomólogos en la inversión de polo **I**, que transforma (**o**) en (**o′**); luego las tangentes en los puntos **A**, **A′** a las circunferencias (**o**), (**o′**) se cortan en un punto **T**, situado sobre el eje radical **r** de las dos circunferencias. Ahora bien, como esas tangentes son también tangentes a la

circunferencia $(\mathbf{a})$, el punto $\mathbf{T}$ es el polo de $\overline{\mathbf{AA'}}$ respecto de la circunferencia $(\mathbf{a})$. Como ese punto está sobre $\mathbf{r}$, el polo de $\mathbf{r}$ está sobre $\overline{\mathbf{AA'}}$.

Podremos, por tanto, dibujar las circunferencias $(\mathbf{o})$, $(\mathbf{o'})$ en la forma siguiente:

En primer lugar se determina el centro radical $\mathbf{I}$ de las tres circunferencias dadas $(\mathbf{a})$, $(\mathbf{b})$, $(\mathbf{c})$; luego, se dibuja uno de los ejes de homotecia, $\mathbf{r}$, de esas tres circunferencias, definido por los tres centros de homotecia $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, alineados, de los pares de circunferencias $(\mathbf{b})$ y $(\mathbf{c})$, $(\mathbf{c})$ y $(\mathbf{a})$, $(\mathbf{a})$ y $(\mathbf{b})$.

Se une el punto $\mathbf{I}$ con el polo $\mathbf{P}$ de la recta $\mathbf{r}$ respecto de la circunferencia $(\mathbf{a})$, y se fijan los puntos, $\mathbf{A}$, $\mathbf{A'}$, en los que la recta $\overline{\mathbf{IP}}$ corta a esa circunferencia. Se determinan entonces los puntos $\mathbf{B}$, $\mathbf{B'}$ de la circunferencia $(\mathbf{b})$, antihomólogos de los puntos $\mathbf{A}$, $\mathbf{A'}$ de la circunferencia $(\mathbf{a})$ respecto del polo $\boldsymbol{\gamma}$, y los puntos $\mathbf{C}$, $\mathbf{C'}$ de la circunferencia $(\mathbf{c})$, antihomólogos de $\mathbf{A}$, $\mathbf{A'}$ respecto del polo $\boldsymbol{\beta}$.

Por los puntos $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, se hace pasar una circunferencia $(\mathbf{o})$, y por los puntos $\mathbf{A'}$, $\mathbf{B'}$, $\mathbf{C'}$, una circunferencia $(\mathbf{o'})$.

Queda por establecer que esas dos circunferencias son tangentes a $(\mathbf{a})$, $(\mathbf{b})$, $(\mathbf{c})$, en los puntos $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, y $\mathbf{A'}$, $\mathbf{B'}$, $\mathbf{C'}$. Efectivamente es así, ya que $\overline{\mathbf{AA'}}$, $\overline{\mathbf{BB'}}$ son cuerdas antihomólogas de $(\mathbf{a})$, $(\mathbf{b})$ respecto de $\boldsymbol{\gamma}$, luego se cortan sobre el eje radical de $(\mathbf{a})$ y $(\mathbf{b})$. Por tanto, el punto $\mathbf{I}$ es el punto de intersección de este eje radical con $\overline{\mathbf{AA'}}$; por lo mismo, $\overline{\mathbf{BB'}}$ pasa por el punto $\mathbf{I}$, y lo mismo ocurre con $\overline{\mathbf{CC'}}$. Como $\mathbf{I}$ es el centro radical de las tres circunferencias $(\mathbf{a})$, $(\mathbf{b})$, $(\mathbf{c})$ se tiene

$$\overline{\mathbf{IA}} \cdot \overline{\mathbf{IA'}} = \overline{\mathbf{IB}} \cdot \overline{\mathbf{IB'}} = \overline{\mathbf{IC}} \cdot \overline{\mathbf{IC'}}$$

lo que muestra que las circunferencias $(\mathbf{o})$, $(\mathbf{o'})$ son inversas respecto del polo $\mathbf{I}$.

Por otra parte, $\overline{\mathbf{AB}}$, $\overline{\mathbf{A'B'}}$ son cuerdas antihomólogas en esa inversión; luego, se cortan sobre el eje radical de las circunferencias $(\mathbf{o})$, $(\mathbf{o'})$. Por tanto, $\boldsymbol{\gamma}$ está sobre este eje radical, lo mismo que $\boldsymbol{\beta}$ y $\boldsymbol{\alpha}$. En consecuencia se tiene que $\mathbf{r}$ es el eje radical de $(\mathbf{o})$ y $(\mathbf{o'})$.

Así, las tangentes en $\mathbf{A}$, $\mathbf{A'}$ a las circunferencias $(\mathbf{o})$, $(\mathbf{o'})$ forman un triángulo isósceles cuya base es $\overline{\mathbf{AA'}}$, y cuyo vértice opuesto a esta base está sobre el eje radical $\mathbf{r}$.

Como $\overline{\mathbf{AA'}}$ pasa por el polo $\mathbf{P}$ de $\mathbf{r}$ respecto de $(\mathbf{a})$, el polo de $\overline{\mathbf{AA'}}$ está sobre $\mathbf{r}$, y las tangentes en $\mathbf{A}$, $\mathbf{A'}$ a la circunferencia $(\mathbf{a})$ forman un triángulo isósceles cuya base está en $\overline{\mathbf{AA'}}$ y cuyo vértice opuesto a $\overline{\mathbf{AA'}}$ está sobre $\mathbf{r}$. Se concluye, por tanto, que esas tangentes coinciden con las tangentes en $\mathbf{A}$, $\mathbf{A'}$ a las circunferencias $(\mathbf{o})$, $(\mathbf{o'})$, lo que equivale a decir que las circunferencias $(\mathbf{o})$, $(\mathbf{o'})$ son tangentes a la circunferencia $(\mathbf{a})$ en los puntos $\mathbf{A}$, $\mathbf{A'}$.

Transformemos ahora la figura por inversión, tomando como polo el punto $\boldsymbol{\gamma}$, y por módulo la potencia de $\boldsymbol{\gamma}$ respecto de la circunferencia $(\mathbf{o})$, o la $(\mathbf{o'})$, puesto que se verifica

$$\overline{\boldsymbol{\gamma}\mathbf{A}} \cdot \overline{\boldsymbol{\gamma}\mathbf{B}} = \overline{\boldsymbol{\gamma}\mathbf{A'}} \cdot \overline{\boldsymbol{\gamma}\mathbf{B'}}$$

ya que $\boldsymbol{\gamma}$ tiene igual potencia respecto de las dos circunferencias.

Las circunferencias $(\mathbf{o})$, $(\mathbf{o'})$ no cambian, y la circunferencia $(\mathbf{a})$ se transforma en la $(\mathbf{b})$, y como $(\mathbf{a})$

contacta con $(\mathbf{o})$, $(\mathbf{o}')$, en $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$, $(\mathbf{b})$ contacta a las mismas circunferencias en $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}'$. (La demostración es análoga para $(\mathbf{c})$).

Vemos, así, que a todo eje de homotecia de las tres circunferencias $(\mathbf{a})$, $(\mathbf{b})$, $(\mathbf{c})$, corresponden en general dos soluciones; ahora bien esas soluciones no existen más que si la recta $\overline{\mathbf{IP}}$ corta a la circunferencia $(\mathbf{a})$.

Dado que las tres circunferencias dadas admiten cuatro ejes de homotecia, se tendrá que en general existen ocho soluciones.

Apuntemos por último que el método no es aplicable más que si los centros de $(\mathbf{a})$, $(\mathbf{b})$, $(\mathbf{c})$, no están alineados, pues en caso de estarlos el centro radical $\mathbf{I}$ no está a distancia finita.

Método de Poncelet:

Tomamos sobre la circunferencia $(\mathbf{a})$ un punto arbitrario $\mathbf{M}$, y determinemos, sobre la circunferencia $(\mathbf{b})$, el punto $\mathbf{N}$, antihomólogo del $\mathbf{M}$ respecto del polo $\boldsymbol{\gamma}$, y el punto $\mathbf{P}$ de la circunferencia $(\mathbf{c})$, antihomólogo del $\mathbf{M}$ respecto del polo $\boldsymbol{\beta}$. A continuación tomamos la circunferencia $(\boldsymbol{\Gamma})$, pasando por los tres punto $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{P}$, que cortará a la circunferencia $(\mathbf{a})$ en un segundo punto $\mathbf{Q}$.

Veamos, ahora, que **la recta $\overline{\mathbf{MQ}}$ y la tangente en A a la circunferencia $(\mathbf{a})$ se cortan en un punto T, situado sobre el eje de homotecia r.**

> En efecto: La recta $\overline{\mathbf{MQ}}$ es el eje radical de las circunferencias $(\mathbf{a})$ y $(\boldsymbol{\Gamma})$, mientras que $\overline{\mathbf{AT}}$ es el de las circunferencias $(\mathbf{a})$ y $(\mathbf{o})$; en consecuencia, el punto $\mathbf{T}$ es el centro radical de las tres circunferencias $(\mathbf{a})$, $(\boldsymbol{\Gamma})$, $(\mathbf{o})$. Dado que $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ y $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ son pares de puntos antihomólogos de las circunferencias $(\mathbf{a})$ y $(\mathbf{b})$, se verifica que,
>
> $$\overline{\boldsymbol{\gamma}\mathbf{M}} \cdot \overline{\boldsymbol{\gamma}\mathbf{N}} = \overline{\boldsymbol{\gamma}\mathbf{A}} \cdot \overline{\boldsymbol{\gamma}\mathbf{B}} \,,$$
>
> lo que muestra que el punto $\boldsymbol{\gamma}$ tiene la misma potencia respecto a las circunferencias $(\boldsymbol{\gamma})$ y $(\mathbf{o})$. Lo mismo ocurre para el punto $\boldsymbol{\beta}$, puesto que se tiene que
>
> $$\overline{\boldsymbol{\beta}\mathbf{M}} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}\mathbf{P}} = \overline{\boldsymbol{\beta}\mathbf{A}} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}\mathbf{C}} \,.$$
>
> Por lo tanto, la recta $\overline{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}}$, es decir la $\mathbf{r}$, es el eje radical de las circunferencias $(\boldsymbol{\Gamma})$ y $(\mathbf{o})$, por lo que esta recta pasa por el punto $\mathbf{T}$.

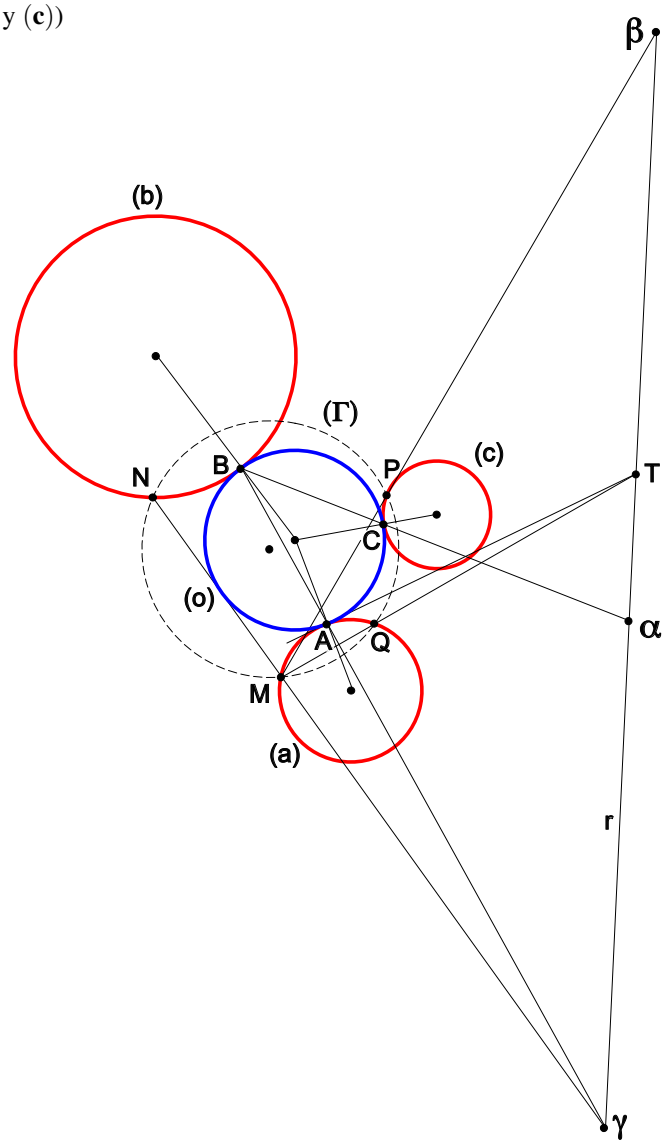
De los razonamientos anteriores se deduce la solución que describimos a continuación:

Construida la circunferencia $(\boldsymbol{\Gamma})$, como se ha explicado mas arriba, se traza la recta $\overline{\mathbf{MQ}}$ que corta a la recta $\mathbf{r}$ en el punto $\mathbf{T}$. Por este punto se traza la tangente $\overline{\mathbf{TA}}$, a la circunferencia $(\mathbf{a})$, y se determinan los antihomólogos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$, del punto $\mathbf{A}$ sobre las circunferencias $(\mathbf{b})$ y $(\mathbf{c})$ respecto de los polos $\boldsymbol{\gamma}$ y $\boldsymbol{\beta}$, respectivamente. Por último, por los puntos $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ se hace pasar la circunferencia $(\mathbf{o})$. No queda, ya, más que demostrar que esta circunferencia contacta con las circunferencias $(\mathbf{a})$, $(\mathbf{b})$,$(\mathbf{c})$ en los puntos $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$.

Dado que se tiene que

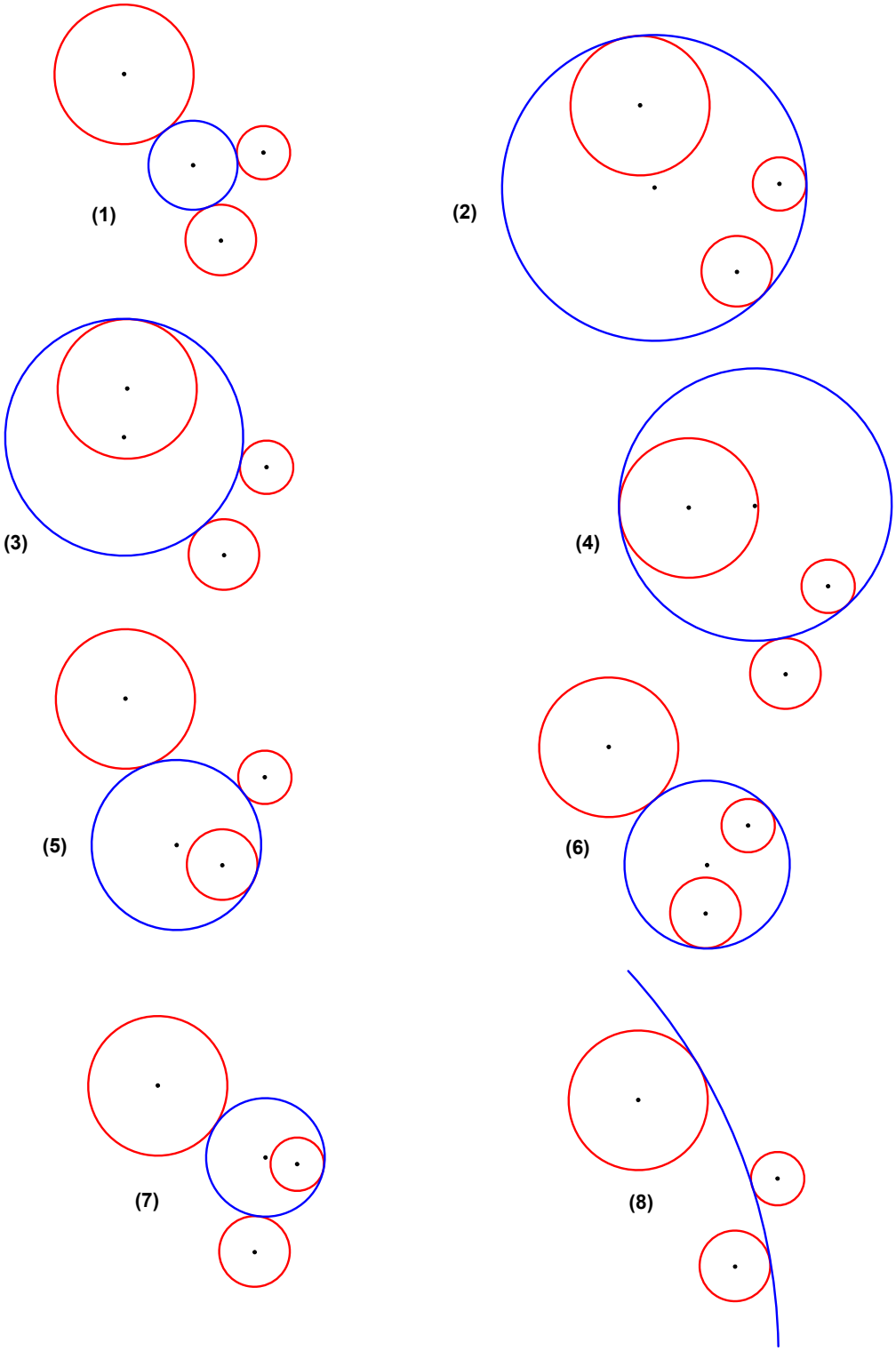
$$\overline{\boldsymbol{\gamma}\mathbf{M}} \cdot \overline{\boldsymbol{\gamma}\mathbf{N}} = \overline{\boldsymbol{\gamma}\mathbf{A}} \cdot \overline{\boldsymbol{\gamma}\mathbf{B}} \quad , \quad \overline{\boldsymbol{\beta}\mathbf{M}} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}\mathbf{P}} = \overline{\boldsymbol{\beta}\mathbf{C}} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}\mathbf{A}} \,,$$

la recta **r** es el eje radical de las circunferencias (**o**) y (**Γ**); por otra parte, $\overline{\mathbf{MQ}}$ lo es de las circunferencias (**a**) y (**Γ**). En consecuencia, el punto **T** es el centro radical de las circunferencias (**o**), (**Γ**), (**a**). Luego el eje radical de las circunferencias (**a**), (**o**), pasa por el punto **T** y por el punto **A**; se trata de la recta $\overline{\mathbf{TA}}$, y como esta recta es tangente en **A** a la la circunferencia (**a**), es también tangente en el mismo punto a la circunferencia (**o**), lo que significa que (**o**) y (**a**) son tangentes en el mismo punto **A**.
(Observamos lo mismo que en el método de Gergonne, la circunferencia (**o**) es tangente en **B** y **C** a las circunferencias (**b**) y (**c**))



Como por el punto **T** se pueden trazar dos tangentes a la circunferencia (**a**), vemos que el problema admite dos soluciones correspondientes al eje de homotecia **r**. Estas soluciones solo existirán si el punto **T** es exterior a la circunferencia (**a**).
Como conclusión, podemos afirmar que, en general, existirán ocho soluciones.

Las ocho soluciones del problema de Apolonio.



ÍNDICE ALFABÉTICO

Abscisas cartesianas..... 71
" proyectivas..... 96
Arco capaz..... 6
Área de un triángulo..... 29

Cambio de abscisas proyectivas..... 112
Característica de una proyectividad hiperbólica..... 119
Centro de homotecia..... 277
" de inversión..... 41
" proyectivo..... 191
" radical de tres circunferencias..... 288
Circunferencias de Tucker..... 12
" inscritas y exinscritas..... 30
" ortogonales..... 303
Coordenadas cartesianas..... 71
" " y proyectivas..... 271
" homogéneas..... 219
" proyectivas homogéneas..... 227
" " puntuales..... 224
" tangenciales..... 235, 237
" plückerianas..... 256
Cuadrilátero completo..... 253
" inscribible..... 7
Cuadrivértice completo..... 254
Cuaterna armónica..... 26, 251
Curvas inversas..... 340

Ecuación de la recta general o implícita y paramétrica..... 232
" " " proyectividad entre series superpuestas..... 117
" " " en coordenadas cartesianas..... 139
" " " " " proyectivas..... 113
Eje perspectivo..... 188, 189, 194
" proyectivo..... 191
" de las series circulares..... 198
" de homotecia..... 282
" radical de dos circunferencias..... 288

Figuras de 1ª, 2ª y 3ª categoría..... 103
Forma reducida de la proyectividad..... 131
" " de la perspectividad..... 187
Fórmula de Chasles..... 72
" de la mediana..... 29
" de Stewart..... 32

Haces circulares..... 197
" de circunferencias..... 303, 309
Homotecias..... 275
" entre circunferencias..... 280

Interpretación euclídea de las coordenadas proyectivas..... 267
Inversión..... 41, 296, 331
Involuciónes..... 139, 173

Método de Gergonne..... 357
" de Poncelet..... 359

Perspectividad..... 187
Plano proyectivo..... 219
Polar de un punto respecto de un ángulo..... 329
Polaridad recíproca..... 318
Polo y polar respecto de una circunferencia..... 315
Potencia de inversión..... 41
" en la circunferencia..... 285
Problema de Apolonio..... 346, 355
Problema de Castillón..... 211
Proyectividad..... 103, 117, 151
Puntos anti-homólogos..... 299
Punto central..... 143
Puntos concíclicos..... 8
" conjugados respecto de una circunferencia..... 315
Puntos dobles..... 117, 201
" de Brianchón..... 204
" de Fregier..... 183

Puntos homólogos..... 41
" límites..... 135, 193

Razón simple..... 71
" doble..... 83, 90, 92, 99, 110, 151, 166
Rectas antiparalelas..... 3
" conjugadas respecto de una circunferencia..... 328
Recta homóloga de una circunferencia..... 45
Rectas isogonales..... 18

Series circulares..... 197
" proyectivas..... 189
Sistemas asociados: puntual y tangencial..... 255

Teorema de la altura..... 14
" " Brianchón..... 204
" del Cateto..... 13
" de Desargues..... 259, 261
" " Frégier..... 183
" " Pappus..... 323
" " Pascal..... 199
" " Pitágoras..... 15
" " Thales..... 20
" fundamental de la proyectividad..... 108
Transformación involutiva..... 42
" por polares recíprocas..... 320
Triángulo auto polar..... 328

BIBLIOGRAFÍA

Bertini, E., COMPLEMENTOS DE GEOMETRÍA PROYECTIVA, 1951

Blázquez García, I. y Palancar Penella, M., GEOMETRÍA MÉTRICA, 1986

Corbalán, F., LA PROPORCIÓN ÁUREA, 2010

Efimov, N.F., GEOMETRÍA SUPERIOR, 1984

F.G.M., EXERCICES DE GÉOMÉTRIE, 1920

Ibarrola Solano, J., PROBLEMAS GRÁFICOS DE GEOMETRÍA, 1945

Izquierdo Asensi, F., CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS, 2002

Lalesco, T., LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE, 1952

Matila C.Ghyka, EL NÚMERO DE ORO, 1968

Olabarrieta, L., Ejercicios de GEOMETRÍA MODERNA, 1944

Olabarrieta, L., GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA, 1952

Olabarrieta, L.,GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA (Ejercicios), 1953

Papelier, G., EXERCICES DE GÉOMÉTRIE MODERNE, 1927

Petersen, J., MÉTODOS Y TEORÍAS (Construcciones Geométricas), 1955

Puig Adam, P., CURSO DE GEOMETRÍA MÉTRICA (Tomos I y II), 1954

Skinner, S., GEOMETRÍA SAGRADA, 2007

PUBLICACIONES DEL AUTOR

Colección ELEMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

I Espacios vectoriales
II Matrices
III Cálculo diferencial. Funciones reales de una variable real
IV Cálculo integral
V Cálculo diferencial. Funciones reales de varias variables

Colección MISCELÁNEA DE GEOMETRÍA

★ I Proyectividades. Inversión
II Circunferencias notables. Homografías
III Lugares geométricos
IV Triángulos
V Cónicas y cuádricas

Colección MISCELÁNEA DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

I Análisis algebraico
II Cálculo diferencial e integral
III Cálculo diferencial de varias variables
IV Ecuaciones diferenciales

Colección MISCELÁNEA DE ÁLGEBRA LINEAL

I Grupos. Anillos. Cuerpos
II Espacios vectoriales. Matrices
III Geometría afín y euclídea
IV Geometrías no euclidianas

9 788469 787076